Université Paris-Sud 2009
S4-IFIPS

TRAVAUX PRATIQUES EN MATLAB

1 Lancer matlab à la MdI dans les salles windows

Entrer (login, mot de passe). Lancer matlab au moyen de l'icône sur le bureau.

A la première utilisation de l'éditeur, avant de sauvegarder un sous-programme, indiquer le chemin. Cliquer sur le bouton situé en haut, à droite de la boîte Current Directory. Dans la fenêtre qui s'ouvre, sélectionner votre répertoire personnel sur le serveur groseille (il est marqué Z:). Cliquer OK.

2 Préambule

Pour résoudre numériquement un système différentiel $Y'(t) = F(t, Y(t))$, on utilisera la fonction `ode45` de Matlab dont on rappelle ici la syntaxe. On définit dans un fichier `F.m` une fonction F qui prend en argument un réel `t` et un vecteur `Y` et renvoie un vecteur. La commande `[t y]=ode45(@F, [t0 t1], Y0)` renvoie alors un vecteur colonne `t` subdvision de l'intervalle $[\mathtt{t}_0, \mathtt{t}_1]$ et une matrice `y` dont la i-ème ligne correspond à la valeur approchée en `t(i)` de la solution de donnée initiale $Y(\mathtt{t}_0) = \mathtt{Y}_0$.

3 Pendule avec frottements

L'équation de Newton d'un pendule sans frottements s'écrit

$$\ddot{\theta}(t) = -\omega^2 \sin\theta(t) - \rho\,\dot{\theta}(t)\,,$$

où ω et ρ sont des constantes positives.

1. Mettre cette équation sous la forme d'un système différentiel du premier ordre:

$$(\mathcal{S}) \qquad \begin{cases} \dot{x}(t) &= y(t)\,, \\ \dot{y}(t) &= f(x(t), y(t))\,. \end{cases}$$

2. Déterminer les points d'équilibre de $(\mathcal{S})$. On désigne par A et B les points de coordonnées respectives $(0, 0)$ et $(\pi, 0)$. Dans la suite, on limite l'étude aux seuls points A et B. Pourquoi ?

3. Etude au voisinage de A.

- **a.** Déterminer le système $(\mathcal{S}_A)$ obtenu par linéarisation de $(\mathcal{S})$ au point A. On note M_A la matrice correspondante.
- **b.** Calculer la trace et le déterminant de M_A. Le point d'équilibre est-il stable ?
- **c.** Déterminer les valeurs propres de M_A. Discuter la nature du point critique en fonction de la valeur des paramètres. On distinguera les cas $\rho < 2\omega$, $\rho = 2\omega$, $\rho > 2\omega$. Interprétation physique ?
- **d.** On suppose ici que $\omega = 2$ et $\rho = 5$.
  - **i.** Déterminer les éléments propres de M_A (`eig`).
  - **ii.** En déduire l'expression des solutions de $(\mathcal{S}_A)$.

iii. Représenter graphiquement quelques solutions de $(\mathcal{S}_A)$ afin de mettre en évidence l'allure du portrait de phase (`ode45, plot`).

iv. Représenter graphiquement quelques solutions de $(\mathcal{S})$ pour des données initiales proches du point critique A (`ode45, plot`). Comparer.

e. Mêmes questions dans les cas $(\omega, \rho) = (\sqrt{2}, 2)$ et $(\omega, \rho) = (1, 2)$.

4. Etude au voisinage de B.

a. Déterminer le système linéarisé en B. On note $(\mathcal{S}_B)$ le linéarisé et M_B la matrice correspondante.

b. Calculer la trace et le déterminant de M_B. Le point critique considéré est-il stable ?

c. Déterminer les valeurs propres de M_B (`eig`). Déterminer la nature du point critique en fonction de la valeur des paramètres. La distinction effectuée au **3.c.** est-elle pertinente ici ?

d. Etude du cas $\omega = 2$ et $\rho = 3$. Eléments propres de M_B (`eig`). Portrait de phase de $(\mathcal{S}_B)$. Représentation graphique des solutions de $(\mathcal{S})$ au voisinage de B (`ode45, plot`).

5. On s'intéresse ici — sans démonstration — à l'allure générale du portrait de phase de $(\mathcal{S})$. On pourra considérer les cas où les paramètres (ω, ρ) sont $(2, 5)$, $(\sqrt{2}, 2)$ ou $(1, 2)$.

a. Représenter graphiquement quelques solutions de $(\mathcal{S})$.

b. Conjecturer le comportement asymptotique des solutions.

c. Déterminer les frontières du "bassin d'attraction" de chaque point critique. Mettre en évidence des trajectoires exceptionnelles.

d. Quelle est l'influence de la valeur des paramètres sur le comportement qualitatif des trajectoires ?

4 Oscillateur de Van der Pol

L'équation suivante, dite équation de Van der Pol, modélise un système — par exemple un circuit électrique — présentant des oscillations non-linéaires:

$$(\mathcal{V}) \qquad \ddot{x}(t) + (\mu + x^2(t))\,\dot{x}(t) + x(t) = 0\,,$$

où μ est une constante mesurant la dissipation. Si $\mu > 0$ le système dissipe son énergie. Si $\mu < 0$ alors au contraire le système comprend un composant actif qui lui apporte de l'énergie.

1. Mettre $(\mathcal{V})$ sous la forme d'un système différentiel:

$$(\mathcal{S}) \qquad \left\{ \begin{array}{lcl} \dot{x}(t) & = & y(t)\,, \\ \dot{y}(t) & = & f(x(t), y(t))\,. \end{array} \right.$$

2. Vérifier que $(\mathcal{S})$ admet une unique solution stationnaire.

3. Comportement au voisinage de l'origine.

a. Déterminer le système $(\mathcal{S}_0)$ obtenu par linéarisation de $(\mathcal{S})$ au voisinage de l'origine. On note M_0 la matrice correspondante.

b. Déterminer les valeurs propres de M_0. Discuter la stabilité du point critique en fonction de la valeur de μ. Qu'observe-t-on ?

c. On suppose $|\mu| < 2$. Quelle est l'allure des solutions de $(\mathcal{S}_0)$?

4. On considère le cas $\mu = 1$. Tracer quelques solutions de $(\mathcal{S})$ et conjecturer le comportement asymptotique global du système.

5. On considère le cas $\mu = -1$. Tracer quelques solutions de $(\mathcal{S})$. Mettre en évidence la présence d'une trajectoire exceptionnelle.

6. Que se passe-t-il pour des valeurs intermédiaires du paramètre μ ?