TRAVAUX PRATIQUES EN MATLAB, deuxième séance

1 Rappel

En utilisant le bouton en haut de la fenêtre, modifier le chemin d'accès à vos fichiers.

2 Au travail

Exercice 1.

1. Tracer un cercle $\mathcal{C}$ dont le centre est le point $M(-2, 1)$ et le rayon est $r = 3$. Indiquer sur la figure le centre du cercle par le symbole $+$. Veiller à ce que l'unité soit la même sur les deux axes (`axis equal`).
2. Tracer sur la même figure le plus petit carré contenant le cercle $\mathcal{C}$ dont les côtés sont parallèles aux axes.
3. Dans un fichier appelé `tracecercle.m`, écrire une fonction `tracecercle` qui prend comme arguments les réels a, b, r et le caractère c et trace le cercle de centre $M(a, b)$ et de rayon r de couleur c. On veillera à insérer un commentaire qui explique ce que fait la fonction.
4. Utiliser la fonction `tracecercle` pour tracer les anneaux olympiques.

Exercice 2. On étudie les suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définies par une condition initiale $u_0 \in \mathbf{N}$ et la relation de récurrence

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{u_n}{2} & \text{si } u_n \text{ est pair,} \\ u_{n+1} = 3u_n + 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Calculer les 10 premiers termes de la suite quand $u_0 = 3$ (`if`, `mod`). Recommencer avec $u_0 = 6$. Que constatez-vous ?
2. Ecrire une fonction qui prend comme arguments deux entiers a et N et retourne le vecteur ligne $U = (u_0, \cdots, u_N)$ des valeurs de la suite de condition initiale $u_0 = a$. Faire varier u_0.
3. Ecrire une fonction qui prend comme argument un entier a, calcule les valeurs de la suite de condition initiale $u_0 = a$ tant que $u_n \neq 1$ (`while`, on limitera à 1000 le nombre d'itérations).

Exercice 3. On considère une population de bactéries, décrite par le nombre e_n d'individus à la n-ème génération. Soit E le nombre maximum de bactéries que le milieu peut supporter. On ne s'intéresse qu'à la fraction $f_n = e_n/E$. L'évolution de la population est décrite par la loi $f_{n+1} = rf_n(1 - f_n)$, où r est un réel entre 0 et 4.

1. On choisit $r = 2.8$, $f_1 = 0.3$. Calculer le vecteur X des 50 premiers termes de la suite (pour réduire le temps de calcul, on pensera à initialiser le vecteur X par la commande `f=zeros(1,50)`). Représenter graphiquement f_n en fonction de n.

2. On veut faire varier les paramètres r, f_1 et le nombre N d'itérés à calculer. Dans un fichier `population.m`, écrire une fonction `f=population(r,N,f1)` qui reçoit en arguments un réel r, un entier N et un réel $f1$ et retourne le vecteur X des N premiers termes de la suite récurrente commençant par $f1$ et de paramètre r. Représenter graphiquement f_n en fonction de n dans les cas suivants :

   • cas a : $r = 3.5$, $f1 = 0.3$,

   • cas b : $r = 3.7$, $f1 = 0.2$.

   Préciser, dans chaque cas, si la suite est périodique ou chaotique.

3. En utilisant la fonction `hist`, tracer l'histogramme des valeurs de la suite, dans chaque cas. Essayer de grandes valeurs de N. Augme,ter le nombre de classes de l'histogramme. Comment se caractérise chacun des régimes ?

4. On veut représenter la suite (f_n) sous la forme d'un diagramme en "toile". On note $g(x) = rx(1-x)$. On choisit $r = 2.8$. Tracer dans une même figure la courbe représentative de g, la droite $y = x$ ainsi que la ligne brisée qui joint les points $(f_1, 0)$, (f_1, f_2), (f_2, f_2), ..., (f_{12}, f_{12}), lorsque $f_1 = 0.1$. *Indication* : si z est un vecteur à N composantes, essayer l'instruction `v(1:2:2*N)=w`. On choisira la fenêtre $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$. Faire la même représentation graphique pour le cas a puis le cas b. Si besoin est, on augmentera le nombre d'itérations que l'on représente.

5. A vous de jouer ! Déterminer d'autres valeurs de r pour lesquelles on constate des oscillations périodiques (choisir des valeurs de r dans $]3, 3.6[$). Déterminer d'autres valeurs de r pour lesquelles on constate un comportement chaotique. Que pensez-vous de l'influence de la condition initiale $f1$?

Exercice 4. On considère l'équation différentielle $(\mathcal{E})$: $y'(t) = \frac{1}{10}y(t) + \sin(t)$.

1. Sur papier, écrire la fonction F de deux variables telle que l'équation $(\mathcal{E})$ s'écrive sous la forme $y' = F(t, y)$. Dans un fichier `F.m`, programmer cette fonction.

2. Si, dans la fenêtre de commande, on tape `[t y]=ode45(@F,[t0 tfin],y0)`, Matlab retourne un vecteur t, subdivision de l'intervalle $[\mathtt{t0}, \mathtt{tfin}]$, et un vecteur y contenant les valeurs aux points de t d'une solution approchée de $(\mathcal{E})$ sur l'intervalle $[\mathtt{t0}, \mathtt{tfin}]$ de condition initiale $y(\mathtt{t0}) = \mathtt{y0}$. Tracer sur une même figure la solution approchée y et la solution exacte $z(t) = \exp(\frac{t}{10}) - \frac{10}{101}(10\cos t + \sin t)$ sur l'intervalle $[0, 15]$ avec condition initiale $y(0) = \frac{1}{101}$.

3. Obtenir de Matlab la valeur de la solution approchée en $t = 2\pi$. `(deval)`.

Exercice 5. On considère le système différentiel $(\mathcal{S})$: $\left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & x - 10y \\ y' & = & 10x + y \end{array} \right.$.

1. Sur papier, écrire la fonction G à valeurs dans $\mathbf{R}^2$ telle que le système $(\mathcal{S})$ s'écrive sous la forme $v' = G(t, v)$. Dans un fichier `G.m`, programmer cette fonction, de sorte que ses arguments soient un nombre t et un vecteur ligne v, et qu'elle retourne un vecteur colonne.

2. Tracer sur une même figure la solution approchée $v = [x\ y]$ (courbe paramétrée) sur l'intervalle $[-2, 2]$ avec condition initiale $v(0) = [1\ 0]$, et la solution exacte $[e^t \cos(10t)\ e^t \sin(10t)]$ (`ode45`, même syntaxe).

3. Soit n un entier. Programmer une fonction `portrait.m` qui trace les solutions approchées de $(\mathcal{S})$ sur l'intervalle $[-2, 2]$ ayant pour conditions initiales n points régulièrement espacés sur le segment reliant l'origine à $[0\ 1]$.

4. Remplacer $(\mathcal{S})$ par $(\mathcal{S}_\epsilon)$: $\left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & x - 10y + \epsilon\cos(t) \\ y' & = & 10x + y + \epsilon\sin(t) \end{array} \right.$.