Université Paris-Sud — 2008-2009
S5 IFIPS — Mathématiques : Intégration

FEUILLE D'EXERCICES N^{0}1

Exercice 1 *Soit A une matrice 2×2. On s'intéresse aux vecteurs (complexes) dépendant du temps $t \mapsto X(t)$, solutions de l'équation différentielle $X''(t) = AX(t)$.*

a. *Chercher les solutions particulières non nulles de la forme $t \mapsto f(t)v$ où v est un vecteur constant.*

b. *Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$. Ecrire la solution générale de l'équation.*

Exercice 2 *Les petits mouvements d'une corde, au voisinage de la position d'équilibre ou la corde est rectiligne, sont gouvernés, en première approximation, par l'*équation des ondes

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},$$

où c est une constante physique, de dimension LT^{-1}. On note ℓ la longueur de la corde, supposée fixée aux extrémités. On modélise le déplacement de la corde par une fonction f à valeurs réelles sur l'intervalle $[0, \ell] \times \mathbf{R}$. Il est commode de prolonger f en une fonction impaire et périodique de période 2ℓ de x.

a. *Quelles sont les solutions réelles* stationnaires, *i.e. de la forme $f(x,t) = u(t)v(x)$? Faire le lien avec les vecteurs propres de l'application linéaire $v \mapsto v''$ sur l'espace des fonctions réelles impaires et périodiques de période 2ℓ. Décrire en termes physiques les mouvements correspondants.*

Dans la suite, on s'intéresse aux solutions *complexes* de l'équation des ondes.

b. *Soit $f(x,t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(t) e^{i\pi k x/\ell}$ un polynôme trigonométrique en x, à coefficients dépendant de t. Ecrire les équations différentielles que doivent satisfaire les fonctions $t \mapsto c_k(t)$ pour que f soit solution de l'équation des ondes.*

c. *Soient f_0 et g_0 deux polynômes trigonométriques de période 2ℓ. Ecrire la solution $(x,t) \mapsto f(x,t)$ de l'équation des ondes telle que $f(x,0) = f_0(x)$ et $\frac{\partial f}{\partial t}(x,0) = g_0$.*

d. *Vérifier que si f_0 et g_0 sont à valeurs réelles (resp. sont des fonctions impaires de x), il en est de même de f.*

e. *Soient u et v des fonctions périodiques de période 2ℓ. Vérifier que les fonctions $g(x,t) = u(x-ct)$ et $h(x,t) = v(x+ct)$ sont des solutions de l'équation des ondes. On appelle ces solutions particulière* ondes progressives.

f. *Montrer que la solution f obtenue en* **c** *est la somme de deux ondes progressives voyageant en sens inverse l'une de l'autre.*

g. *Soit $(x,t) \mapsto f(x,t)$ une solution de l'équation des ondes. Vérifier que l'énergie mécanique de la corde, proportionnelle à $E(t) = \int_0^\ell |\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)|^2\, dx + c^2 \int_0^\ell |\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)|^2\, dx$, reste constante au cours du temps.*

Université Paris-Sud
S5 IFIPS

2008-2009
Mathématiques : Intégration

Feuille d'exercices n^{0}2

Exercice 3 *1. Soit $0 < \epsilon < 1/2$. Démontrer que la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f_\epsilon(t) = \dfrac{1}{1+\epsilon\sin(t)+t^2}$ est intégrable.*

2. Calculer $\displaystyle\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\mathbf{R}} \frac{1}{1+\epsilon\sin(t)+t^2}\,dt$.

Exercice 4 *Soit f une fonction intégrable sur $[0,1]$. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{[0,1]} t^n f(t)\,dt$.*

Exercice 5 *Soit $\psi : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ une fonction continue et bornée sur $\mathbf{R}$. On pose, pour $t \in \mathbf{R}$ et $x \in \mathbf{R}$, $f_t(x) = \frac{e^{itx}}{1+x^2}\psi(tx)$.*

1. *Démontrer que pour tout $t \in \mathbf{R}$, f_t est intégrable sur $\mathbf{R}$.*
2. *Calculer $\displaystyle\lim_{t\to 0}\int_{\mathbf{R}} f_t(x)\,dx$.*

Exercice 6 *Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ une fonction telle qu'il existe des constantes p_0 et $C \in \mathbf{R}$ telles que pour tout $t \geq 0$, $|f(t)| \leq C\,e^{p_0 t}$. La* transformée de Laplace *$\mathcal{L}(f)$ de f est la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $\mathcal{L}f(p) = \displaystyle\int_{[0,+\infty[} f(t)e^{-pt}\,dt$.*

Démontrer que la fonction $\mathcal{L}(f)$ est dérivable sur l'intervalle $]p_0,+\infty[$, de dérivée

$$\frac{d\mathcal{L}(f)}{dp} = \int_{[0,+\infty[} (-t)f(t)e^{-pt}\,dt.$$

Exercice 7 *L'égalité*

$$\int_{[0,1]}\left(\int_{[0,1]}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx\right)dy = \int_{[0,1]}\left(\int_{[0,1]}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dy\right)dx$$

est-elle vraie ?

Exercice 8 *On appelle* fonction de Bessel *la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par*

$$J_0(x) = \frac{2}{\pi}\int_{[0,1]}\frac{\cos(xy)}{\sqrt{1-y^2}}\,dy.$$

Calculer sa transformée de Laplace.

Université Paris-Sud 2008-2009
S5 IFIPS Mathématiques : Intégration

Feuille d'exercices n^{0}3

Exercice 9 1. *Soit la fonction de la variable réelle t définie par $f_1(t) = 1 - t$ pour $0 \leq t \leq 1$ et $f_1(t) = 0$ pour $t < 0$ ou $t > 1$. Calculer la transformée de Fourier $\hat{f}_1(u)$ de cette fonction. Le résultat satisfait-il aux conclusions du théorème de Riemann-Lebesgue ?*

2. *En déduire la transformée de Fourier de la fonction $f_2(t) = 1+t$ pour $-1 \leq t \leq 0$ et $f_2(t) = 0$ pour $t < -1$ ou $t > 0$.*

3. *Quelle est la transformée de Fourier de la fonction $f = f_1+f_2$? Qu'en est-il du comportement pour $|u| \to \infty$ de $\hat{f}$ comparé à celui des fonctions $\hat{f}_1$ et $\hat{f}_2$?*

Exercice 10 1. *On considère pour $b > 0$ la fonction de la variable réelle x donnée par $x \mapsto f(x) = e^{-b|x|}$. Dire pourquoi la transformée de Fourier $\hat{f}$ de f est définie et la calculer.*

2. *En utilisant le résultat précédent, calculer la transformée de Fourier de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2+a^2}$ ($a > 0$).*

Exercice 11 1. *Soient les fonctions de la variable réelle x définie pour $m \in \mathbf{N}$ par $x \mapsto f_m(x) = |x|^m e^{-\pi x^2}$. Démontrer que les f_m sont des fonctions intégrables sur $\mathbf{R}$.*

2. *Trouver une équation différentielle linéaire du premier ordre $\mathcal{E}$ satisfaite par la fonction $x \mapsto f_0(x) = e^{-\pi x^2}$.*

3. *Donner la raison pour laquelle la fonction f_0 admet une transformée de Fourier $\hat{f}$ et montrer que $\hat{f}$ satifait aussi à l'équation différentielle $\mathcal{E}$.*

4. *Déterminer la solution générale de $\mathcal{E}$ et en déduire l'expression de $\hat{f}$. (On rappelle que $\int_{\mathbf{R}} e^{-\pi x^2}\, dx = 1$).*

Exercice 12 *On considère la "fonction porte" symétrique Π de largeur $2a$ et de hauteur 1. Donner la définition du produit de convolution $\Pi \star \Pi$ et le calculer. Représenter graphiquement le résultat. La fonction $\Pi \star \Pi$ possède-t-elle les propriétés attendues en raison des propriétés de Π ?*

Exercice 13 *On pose $P_a(x) = \frac{a}{\pi}\frac{1}{a^2+x^2}$, où $a > 0$.*

1. *Démontrer que*
$$(F(P_a \star P_b))(u) = (F(P_{a+b}))(u).$$

2. *En déduire l'expression de $P_a \star P_b$.*

3. *La fonction $x \mapsto xP_a(x)$ posséde-t-elle une transformée de Fourier ? Comment cela se traduit-il au niveau de la transformée de Fourier FP_a ?*