Université Paris-Sud
S5 IFIPS

2008-2009
Mathématiques : Distributions

Feuille d'exercices n^{0}5

Exercice 1 *La fonction ξ_a définie par*

$$\xi_a(x) = \begin{cases} \exp(-\frac{a^2}{a^2-x^2}) & si\ |x| < a \\ 0 & si\ |x| \geq a \end{cases}$$

est pour $a > 0$ une fonction d'essai.

Exercice 2 *Si α est une fonction indéfiniment dérivable et si ϕ est une fonction de $\mathcal{D}$, alors leur produit $\alpha\phi$ est une fonction de $\mathcal{D}$.*

Exercice 3 *Soient f une fonction intégrable sur $\mathbf{R}$, nulle en dehors d'un intervalle borné et ϕ une fonction de $\mathcal{D}$. Alors leur produit de convolution*

$$(f \star \phi)(x) = \int_{\mathbf{R}} f(t)\phi(x-t)\,dt$$

est une fonction de $\mathcal{D}$.

Exercice 4 *Soit ϕ une fonction de $\mathcal{D}$. Alors les fonctions translatée $\tau_a\phi$ et dilatée $d_\lambda\phi$ sont aussi dans $\mathcal{D}$. On rappelle que*

$$(\tau_a\phi)(x) = \phi(x-a)$$

où a est réel et que

$$(d_\lambda\phi)(x) = \phi(\frac{x}{\lambda})$$

où λ est un nombre réel différent de 0.

Exercice 5 *Vérifier que la distribution de Dirac δ n'est pas régulière.*

Exercice 6 *Montrer que si T_λ est la distribution associée à la fonction $x \mapsto \sin\lambda x$, on a*

$$\lim_{\lambda\to\infty}\ (\mathcal{D}')\ T_\lambda = 0.$$

Exercice 7 *En admettant que l'on a pour $\lambda > 0$ (avec des notations incorrectes!)*

$$\lim_{\lambda\to\infty}\ (\mathcal{D}')\ \frac{\sin\lambda x}{x} = \pi\delta,$$

donner une interprétation correcte de la formule des physiciens

$$\delta(x) = \int_{\mathbf{R}} e^{-2i\pi kx}\,dk.$$

Exercice 8

1. *Pour quelle raison l'expression $e^{i\lambda x}vp(\frac{1}{x})$ définit elle une distribution ?*
2. *Soit ψ une fonction d'essai. On rappelle la formule $\langle vp(\dfrac{1}{x}), \psi\rangle = \displaystyle\int_{-A}^{A} \frac{\psi(x)-\psi(0)}{x}\,dx$, où $[-A, A]$ est un intervalle en dehors duquel ψ est nul.*
   Soit ϕ une fonction d'essai. Posant $\phi(x) = \phi(0) + x\eta(x)$, exprimer $\langle e^{i\lambda x}vp(\frac{1}{x}), \phi\rangle$ comme la somme d'une expression ne dépendant que de $\phi(0)$ et d'une transformée de Fourier.
3. *En utilisant le théorème de Riemann-Lebesgue, calculer $\displaystyle\lim_{\lambda\to+\infty} e^{i\lambda x}vp(\frac{1}{x})$.*

Université Paris-Sud — 2008-2009
S5 IFIPS — Mathématiques : Distributions

Feuille d'exercices n^{0}6

Exercice 9 *Soit α une fonction indéfiniment dérivable sur $\mathbf{R}$. Que vaut αIII ? En particulier, que vaut $(e^{2i\pi x}-1)III$?*

Exercice 10 *Montrer que* $\lim_{\epsilon\to 0}\ (\mathcal{D}')\ \frac{1}{x+i\epsilon} = vp(\frac{1}{x}) - i\pi\delta$.

Exercice 11 *Soit $x_0 \in \mathbf{R}$. Déterminer toutes les distributions T telles que $(x-x_0)T=0$.*

Exercice 12

1. *Vérifier que la distribution III est paire et invariante par la translation τ_1.*
2. *Trouver une distribution paire P et une distribution impaire R telles que $H = P + R$.*

Exercice 13 *Calculer les dérivées des distributions suivantes : la fonction porte Π, $|x|$, $|x|^n$, αH où α est une fonction indéfiniment dérivable quelconque, $|\cos x|$.*

Exercice 14

1. *Vérifier que H et ses dérivées H' et H'' sont linéairement indépendantes, i.e. que si a, b, $c \in \mathbf{C}$ satisfont $aH + bH' + cH'' = 0$, alors $a = b = c = 0$.*
2. *Plus généralement, soit f une fonction indéfiniment dérivable, a, $b \in \mathbf{C}$. Montrer que si $fH = a\delta + b\delta'$, alors f s'annulle sur $[0,+\infty[$, $a = b = 0$.*

Exercice 15 *On appelle* partie finie de $1/x^2$ *la distribution définie comme suit : $Pf(\frac{1}{x^2}) = -(vp(\frac{1}{x}))'$. Montrer que $x\,Pf(\frac{1}{x^2}) = vp(\frac{1}{x})$.*

Exercice 16 *Montrer que la suite de fonctions définie par $f_\lambda(x) = \lambda e^{i\lambda x}$ converge vers 0 au sens des distributions lorsque λ tend vers $+\infty$.*

Exercice 17 *Soit $a > 0$.*

1. *Tracer la courbe représentative de la fonction f_a définie sur $\mathbf{R}$ par $f_a(x) = \arctan(x/a)$.*
2. *Pourquoi f_a définit elle une distribution régulière T_a ? Calculer* $\lim_{a\to 0}\ (\mathcal{D}')\ T_a$.
3. *Calculer* $\lim_{a\to 0}\ (\mathcal{D}')\ T_a'$.

Exercice 18 *Calculer les coefficients de Fourier de III_T et III_T' vues comme fonctions périodiques de période T.*

Exercice 19 *Soit f la fonction périodique de période T qui vaut $x - \frac{T}{2}$ sur $[0,T[$. En se ramenant à l'exercice* **??** *et sans nouveaux calculs, déterminer les coefficients de Fourier de f.*

Exercice 20 *Soit a un paramètre réel positif. On considère l'équation différentielle $(\mathcal{E})$: $E'' + a^2E = \delta$, où l'inconnue E est une distribution. Chercher une solution particulière sous la forme $E = fH$ où f est indéfiniment dérivable.*

Exercice 21 *On considère l'équation différentielle $(\mathcal{E})$: $\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \frac{dx(t)}{dt} - 2x(t) = F(t)$ modélisant l'amplitude d'un oscillateur forcé par une force $F(t)$.*

1. Dans le cas où $F(t) = e^{-2t}$, montrer que $(\mathcal{E})$ admet une solution particulière de la forme $t \mapsto x_0(t) = ae^t + (bt+c)e^{-2t}$, où a, b, c sont des constantes que l'on déterminera, sachant qu'on impose les conditions initiales $x_0(0) = 0$ et $x_0'(0) = 1$. x_0 est elle dérivable ?

2. On veut déterminer la force f qu'il faut ajouter à F pour obtenir une solution $t \mapsto x_1(t)$ de $(\mathcal{E})$ qui soit identiquement nulle pour $t < 0$, et égale à $x_0(t)$ pour $t \geq 0$.

2.a. Exprimer x_1 au moyen de la fonction de Heaviside H.

2.b. Déterminer f. Est-ce une distribution régulière ?