Mathématiques

Feuille d'exercises 1

Exercice 1 Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^2 (t^4+3t^2-t)dt \qquad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} sint dt \qquad \int_{-1}^{1} (t+1)(t+2)(t+3)dt$$
$$\int_{-1}^{5} |t-3|dt \qquad \int_1^3 (t^{\frac{3}{2}}+t^{-\frac{3}{2}})dt \qquad \int_1^2 \frac{e^t}{e^t-1}dt$$
$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} (sint+cost)^2 dt \qquad \int_0^1 \frac{3t}{\sqrt{1+t^2}}dt \qquad \int_0^{\frac{\pi}{4}} sin(2t)cos^2(2t)dt$$
$$\int_1^2 tln(t)dt$$

Exercice 2 Linéariser $cos^4 x$ et calculer $\int_1^{\frac{\pi}{4}} cos^4(t)dt$

Exercice 3 Calculer les primitives des fonctions suivantes en précisant leurs domaines de définition.

$$x \to x^2e^x \qquad x \to lnx \qquad x \to xln(x+1)$$
$$x \to \sqrt{x}ln(x) \qquad x \to arctan(x) \qquad x \to xarctan(x)$$
$$x \to ln^2(x) \qquad x \to e^x cos(x)$$

Exercice 4 Dans cet exercise, a désigne un réel strictement positif. Calculer les primitives des fonctions suivantes en précisant leurs domaines de définition.

$$x \to \frac{x-3}{2x^2+2x+1} \qquad x \to \frac{1}{x^2-2x-3} \qquad x \to \frac{x^2+1}{(x-1)(2x^2+2x+1)}$$
$$x \to \frac{1}{x^2+5} \qquad x \to \frac{1}{\sqrt{6-x^2}} \qquad x \to \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$$
$$x \to \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

Exercice 5 Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'un ou plusieurs changements de variables d'intégration :

1. $\int_e^e \frac{1}{tln^2(t)}dt$
2. $\int_{-1}^{\frac{1}{2}} \frac{t^2}{1-t^3}dt$
3. $\int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{lnt}{1+t^2}dt$ (poser $x=\frac{1}{t}$)
4. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{sint+tant}dt$ (poser $x=tan(\frac{t}{2})$)

5. $\displaystyle\int_{-1}^{1} t^2\sqrt{1-t^2}dt$
6. $\displaystyle\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2-t^2}dt$ avec R réel positif. Interpréter géométriquement le résultat.

Exercice 6 Calculer $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dy\right)dx$ et $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dx\right)dy$.
Conclusion ?

Exercice 7
Calculer $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^y \frac{2(x+y)}{(1+(x+y)^2)^2}dx\right)dy$, puis $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_1^x \frac{2(x+y)}{(1+(x+y)^2)^2}dy\right)dx$.
L'égalité était-elle prévisible ?

Exercice 8
Calculer $\displaystyle\int_D \frac{xy^2}{1+x^2}dxdy$ où $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\ 0\leq x\leq 2\ ,\quad 0\leq y\leq 1\}$.

Exercice 9
Calculer $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^{1-y} a^x b^y dx\right)dy$, où a et b sont des réels strictement positifs, distincts et différents de 1.

Exercice 10
Pour $0<\varepsilon<1$, calculer $I_\varepsilon = \displaystyle\int_{D_\varepsilon} exp(\frac{y}{x})dxdy$, où $D_\varepsilon=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\ 0\leq y\leq x\ ,\quad \varepsilon\leq x\leq 1\}$.
Quelle est la limite de I_ε lorsque ε tend vers 0 ?

Exercice 11
Calculer
$ddpint_D(1-x-y)dxdy$ où $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\ x+y\leq 1\ ,\quad x\geq 0\ ,\quad y\geq 0\}$.

Exercice 12
Calculer (en utilisant les coordonnées polaires) $\displaystyle\int_D \frac{y^3}{x^2+y^2}dxdy$
où $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\ 1\leq x^2+y^2\leq 4\ ,\quad x\geq 0\ ,\quad y\leq x\}$.

Exercice 13
Calculer, directement, puis à l'aide de coordonnées polaires $\displaystyle\int_D \frac{x}{x^2+y^2}dxdy$
où $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\ 1\leq x\leq\sqrt{3}\ ,\quad \frac{x}{\sqrt{3}}\leq y\leq x\}$.

Exercice 14
Calculer $\displaystyle\int_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}dxdy$ où $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\ x^2+y^2\leq R\}$.

Exercice 15
En utilisant un changement de variables, calculer l'intégrale de f sur D avec :
1. $D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/\ x^2+y^2+z^2\leq 1\ ,\quad x\geq 0\ ,\quad y\geq 0\ ,\quad z\geq 0\}$ et $f(x,y,z)=xyz$
2. $D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/\ 1\leq x^2+y^2+z^2\leq 4\}$ et $f(x,y,z)=(x^2+y^2+z^2)^\alpha$

Exercice 16
Soit D le domaine $D=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2|x,y\geq 0,\ x+y\leq 1\}$.
1. Dessiner le domaine D.

2. Calculer à l'aide du théorème de Fubini l'intégrale :

$$I = \int_D (x+y)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{-y}dxdy.$$

3. Calculer I au moyen du changement de variables $t = x+y$, $s = x-y$.

Exercice 17
Soit $a > R > 0$.
Calculer l'intégrale suivante qui détermine le potentiel électrique créé au point (0,0,a) par la sphère de centre (0,0,0) et de rayon R chargée uniformément par une densité de charge constante ρ.

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\int\int_{B(0,R)} \frac{\rho}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}}dxdydz.$$

Exercice 18
Calculer l'aire du domaine $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ x \leq y \leq 2-x^2\}$.

Exercice 19
Calculer le volume d'une pyramide de hauteur h et de base rectangle de largeur l et de longeur L.

Exercice 20
Soit D le domaine $D = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 | -1 \leq z \leq 1, \ x^2+y^2 \leq z^2+1\}$.
Calculer le volume de D.

Exercice 21
Soit D le domaine $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 | x^2+y^2 < x, \ x^2+y^2 > y\}$.

1. Dessiner le domaine D.
2. Calculer l'intégrale :

$$\int_D (x^2+y^2)dxdy.$$

Exercice 22
Soit D le domaine $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq 1, \ 0 \leq y \leq 1, \ x^2+y^2 \geq 1\}$.

1. Dessiner le domaine D.
2. Calculer l'intégrale :

$$\int_D \frac{xy}{1+x^2+y^2}dxdy.$$

Exercice 23
Calculer les coordonnées du centre d'inertie (de gravité) du domaine D :

1. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \ , \quad x \geq 0 \ , \quad y \geq 0\}$.
2. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ x^2+y^2 \leq 1 \ , \quad x \geq 0 \ , \quad |y| \geq ax\}$.
3. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ x^2+y^2 \leq 9 \ , \quad (x-1)^2+y^2 \geq 1\}$.