

# Algèbre linéaire

## 1 Systèmes linéaires

Dans ce chapitre, on se place soit dans  $\mathbf{R}$  soit dans  $\mathbf{C}$  et on note  $\mathbf{K} = \mathbf{R}$  ou  $\mathbf{C}$ . Un nombre  $a \in \mathbf{K}$  sera appelé un **scalaire**.

Un système linéaire de  $p$  équations à  $n$  inconnues est de la forme :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 & (\text{L1}) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 & (\text{L2}) \\ \vdots & \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pn}x_n = b_p & (\text{Lp}) \end{cases}$$

Les nombres  $x_i$ ,  $a_{ij}$  et  $b_j$  appartiennent tous à  $\mathbf{K}$ .

Les inconnues sont  $x_1, \dots, x_n$ . Les nombres  $b_1, \dots, b_p$  sont appelés les seconds membres. On cherche la ou les solutions du système.

**Exemple.**

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 + 3i \\ 2x - \sqrt{3}z = 0 \end{cases}$$

**Contre-exemple.**

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ xy = 2 \end{cases}$$

### 1.1 Opérations sur les lignes

Dans un système linéaire, on peut effectuer les opérations suivantes sans changer les solutions :

- échanger deux lignes,
- remplacer  $Li$  par  $\lambda Li$  avec  $\lambda \neq 0$ ,
- remplacer  $Li$  par  $Li + \lambda Lj$  avec  $j \neq i$  ( $\lambda \in \mathbf{K}$  quelconque).

Toute opération doit être effectuée sur les deux membres de l'équation.

On dit que le nouveau système est équivalent au système de départ.

**Attention :** les opérations doivent être faites successivement.

**Contre-exemple.**

$$\begin{cases} x + y = 2 & (\text{L1}) \\ x - y = 0 & (\text{L2}) \end{cases}$$

$$S = \{(1, 1)\}.$$

Une seule solution.

$$\begin{cases} 2x = 2 & (\text{L1} + \text{L2}) \\ 2x = 2 & (\text{L2} + \text{L1}) \end{cases}$$

$$S = \{(1, y) \mid y \in \mathbf{R}\}.$$

Infinité de solutions.

### 1.2 Méthode du pivot de Gauss

C'est une méthode pour résoudre un système linéaire. Voici les différentes étapes :

- Permuter éventuellement 2 lignes pour que dans la 1ère ligne le coefficient de  $x_1$  soit non nul.

- Pour chaque ligne  $L_2, \dots, L_p$ , remplacer la ligne  $L_i$  par  $L_i + \lambda_i L_1$  où  $\lambda_i$  est choisi pour annuler le coefficient de  $x_1$ . On ne touche pas à la ligne  $L_1$ .
- Répéter les opérations précédentes sur les lignes  $L_2, \dots, L_p$  (en éliminant l'inconnue  $x_2$ ), et ainsi de suite.

On verra plus loin qu'on peut avoir

- des inconnues qui s'éliminent simultanément,
- des équations qui disparaissent ( $0 = 0$ ),
- des équations impossibles (par ex.  $0 = 1$ ).

### Exemple 1.

$$\begin{cases} x + y + z + t = 1 & (L1) \\ 2x + 2y + 4z + t = 2 & (L2) \\ -x - 3y + 2t = 2 & (L3) \\ 3x + 4y + 4z = 0 & (L4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z + t = 1 & (L1) \\ 2z - t = 0 & (L2 \leftarrow L2 - 2L1) \\ -2y + z + 3t = 3 & (L3 \leftarrow L3 + L1) \\ y + z - 3t = -3 & (L4 \leftarrow L4 - 3L1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ y + z - 3t = -3 & (L2 \leftrightarrow L4) \\ -2y + z + 3t = 3 \\ 2z - t = 0 & (L4 \leftrightarrow L2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ y + z - 3t = -3 & (L2) \\ 3z - 3t = -3 & (L3 \leftarrow L3 + 2L2) \\ 2z - t = 0 & (L4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ y + z - 3t = -3 \\ z - t = -1 & (L3 \leftarrow \frac{1}{3}L3) \\ 2z - t = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ y + z - 3t = -3 \\ z - t = -1 & (L3) \\ t = 2 & (L4 \leftarrow L4 - 2L3) \end{cases} \quad \begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ y + z - 3t = -3 \\ z - t = -1 \\ t = 2 \end{cases}$$

On obtient un **système triangulaire** (voir schéma de droite).

On résout en commençant par la dernière ligne et en remontant :

- $t = 2$ ,
- $z = -1 + t = 1$ ,
- $y = -3 - z + 3t = 2$ ,
- $x = 1 - y - z - t = -4$ .

Il y a une solution unique  $(-4, 2, 1, 2)$ .

### Exemple 2.

$$\begin{cases} x + y + z + t = 1 & \text{(L1)} \\ 2x + 2y + 3z + t = 2 & \text{(L2)} \\ 2x + 2y + z + t = 0 & \text{(L3)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z + t = 1 & \text{(L1)} \\ z - t = 0 & \text{(L2} \leftarrow \text{L2} - 2\text{L1)} \\ -z - t = -2 & \text{(L3} \leftarrow \text{L3} - 2\text{L1)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z + t = 1 & \text{(L1)} \\ z - t = 0 & \text{(L2)} \\ -2t = -2 & \text{(L3} \leftarrow \text{L3} + \text{L2)} \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ z - t = 0 \\ -2t = -2 \end{cases}$$

On obtient un **système échelonné** (voir schéma de droite).

$x, z, t$  sont les **inconnues principales** (correspondant aux échelons). On fait passer  $y$  à droite et on résout en exprimant les inconnues principales  $x, z, t$  en fonction de  $y$ .

- $t = 1$ ,
- $z = t = 1$ ,
- $x = 1 - y - z - t = -1 - y$ .

L'inconnue  $y$  peut prendre n'importe quelle valeur  $\lambda \in \mathbf{R}$ , il y a une infinité de solutions :  $S = \{(-1 - \lambda, \lambda, 1, 1) \mid \lambda \in \mathbf{R}\}$ . L'ensemble des solutions dépend d'un paramètre.

### Exemple 3.

$$\begin{cases} x + y = 1 & \text{(L1)} \\ x + 2y = 2 & \text{(L2)} \\ x + 3y = a & \text{(L3)} \end{cases} \quad \text{avec } a \in \mathbf{R}$$

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ y = 1 & \text{(L2} \leftarrow \text{L2} - \text{L1)} \\ 2y = a - 1 & \text{(L3} \leftarrow \text{L3} - \text{L1)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ y = 1 \\ 0 = a - 3 & \text{(L3} \leftarrow \text{L3} - 2\text{L2)} \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = 1 \\ y = 1 \\ 0 = a - 3 \end{cases}$$

**Deux cas :**

- Si  $a = 3$  alors L3 devient  $0 = 0$  et l'équation disparaît. Le système devient

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Il y a une unique solution, qui est  $(1, 0)$ .

- Si  $a \neq 3$  alors L3 est **impossible**. Le système n'a aucune solution.

## 1.3 Rang d'un système linéaire

Soit (S) un système linéaire et (S') un système échelonné qui est équivalent à (S).

Le **rang** de (S) est le nombre d'équations de (S') dont la partie gauche est non nulle; c'est aussi le nombre d'inconnues principales (revoir les exemples précédents).

**Exemple.** Voir les exemples précédents (les rangs sont indiqués).

**Remarque.** Le rang de (S) ne dépend pas de la façon dont on se ramène à un système échelonné. Les équations de (S') qui s'écrivent "0 = ..." donnent des **conditions de compatibilité**.

**Remarque.** Soit  $r$  le rang d'un système linéaire échelonné avec  $n$  inconnues. Il y a 3 cas :

- il y a une équation impossible : pas de solution.
- pas d'équation impossible et  $r = n$  : solution unique (système triangulaire).
- pas d'équation impossible et  $r < n$  : l'ensemble des solutions dépend de  $n - r$  paramètres (les  $r$  inconnues principales sont exprimées en fonction des  $n - r$  autres inconnues).

## 2 Matrices

### 2.1 Définitions

Une **matrice**  $n \times p$  à coefficients dans  $\mathbf{K}$  est un tableau d'éléments de  $\mathbf{K}$  à  $n$  lignes et  $p$  colonnes, qu'on note

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$$

Le premier indice ( $i$ ) désigne la ligne, le deuxième ( $j$ ) la colonne.

On note  $M_{n,p}(\mathbf{K})$  l'ensemble des matrices  $n \times p$  à coefficients dans  $\mathbf{K}$ .

**Exemple.**  $A = \begin{pmatrix} 1 & 17 & 0 \\ \frac{1}{2} & \sqrt{5} & 5 \end{pmatrix} \in M_{2,3}(\mathbf{R})$ .

Soit  $A = (a_{ij})$  et  $B = (b_{ij})$  deux matrices  $n \times p$ . Les matrices sont égales si  $a_{ij} = b_{ij}$  pour tous  $i, j, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p$ .

Soit  $A$  une matrice  $n \times p$ .

– Si  $p = 1$ ,  $A$  est une **matrice colonne** :  $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ .

– Si  $n = 1$ ,  $A$  est une **matrice ligne** :  $A = (a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_p)$

– Si  $n = p$ ,  $A$  est une **matrice carrée**. On note  $M_n(\mathbf{K})$  l'ensemble des matrices carrées de taille  $n \times n$ .

#### Matrices particulières.

La matrice  $n \times p$  dont tous les coefficients sont nuls s'appelle la **matrice nulle**. Elle est notée  $(0)$  ou  $0$ .

Soit  $A = (a_{ij})$  une matrice carrée de taille  $n$ . Les coefficients  $a_{ii}$  sont dits **diagonaux**.

- Si  $a_{ij} = 0$  dès que  $i \neq j$ ,  $A$  est appelée une matrice **diagonale**.
- Si  $a_{ij} = 0$  dès que  $i > j$ ,  $A$  est appelée une matrice **triangulaire supérieure**.
- Si  $a_{ij} = 0$  dès que  $i < j$ ,  $A$  est appelée une matrice **triangulaire inférieure**.

**Exemple.**

Matrice triangulaire supérieure :  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ . Matrice diagonale :  $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 17 \end{pmatrix}$ .

## 2.2 Opérations sur les matrices

**Somme de deux matrices de même taille.**

Si  $A = (a_{ij})$  et  $B = (b_{ij})$  sont deux matrices  $n \times p$ , on définit  $A + B$  comme étant la matrice  $C = (c_{ij})$  de taille  $n \times p$  telle que  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$  pour tous  $i, j$ .

**Exemple.**  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 9 \end{pmatrix}$

**Multiplication d'une matrice par un scalaire.**

Si  $A = (a_{ij}) \in M_{n,p}(\mathbf{K})$  et  $\lambda \in \mathbf{K}$ , on définit  $\lambda A$  comme étant la matrice  $C = (c_{ij}) \in M_{n,p}(\mathbf{K})$  telle que  $c_{ij} = \lambda a_{ij}$  pour tous  $i, j$ .

**Exemple.** Si  $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$ ,  $2A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$ .

**Produit de deux matrices.**

Soit  $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$  et  $B = (b_{jk})_{\substack{1 \leq j \leq p \\ 1 \leq k \leq q}}$ . On définit le produit  $A \times B$  (aussi noté  $AB$ ) comme étant la matrice  $C = (c_{ik})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq k \leq q}}$  définie par

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^p a_{ij} b_{jk} \text{ pour } 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq q.$$

Le produit n'est défini que si le nombre de colonnes de  $A$  est égal au nombre de lignes de  $B$ .

**Présentation du calcul.**

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

**Produit de matrices et systèmes linéaires**

**Exemple 1.**

$$(S) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = b_1 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = b_2 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = b_3 \end{cases}$$

La matrice des coefficients du système est  $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ .

Notons  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ . Alors  $MX = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 - x_3 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 \end{pmatrix}$

Et le système (S) peut s'écrire  $MX = B$ .

**Exemple 2.** Notons  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  et  $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$

Sous forme matricielle, les systèmes  $\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$  et  $\begin{cases} x'' = a'x' + b'y' \\ y'' = c'x' + d'y' \end{cases}$  s'écrivent  $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = A' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ .

Exprimons  $x''$  et  $y''$  en fonction de  $x$  et  $y$  :  $\begin{cases} x'' = (a'a + b'c)x + (a'b + b'd)y \\ y'' = (c'a + d'c)x + (c'b + d'd)y \end{cases}$

Or  $A'A = \begin{pmatrix} a'a + b'c & a'b + b'd \\ c'a + d'c & c'b + d'd \end{pmatrix}$  donc  $\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = A'A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ .

Le produit de matrices a été défini de façon à correspondre naturellement aux systèmes linéaires.

### Règles de calcul

Les règles de calcul découlent des propriétés des opérations dans  $\mathbf{R}$  ou  $\mathbf{C}$ . Les opérations se comportent comme on peut s'y attendre, sauf que le produit de deux matrices n'est pas commutatif.

**Addition.** Soit  $A, B, C$  des matrices de même dimension :

- $(A + B) + C = A + (B + C)$  (associativité),
- $A + B = B + A$  (commutativité),
- $A + (0) = A$  (élément neutre).

**Multiplication par un scalaire.** Soit  $A, B$  de même dimension et  $\lambda, \mu \in \mathbf{K}$  :

- $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$ ,
- $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$ ,
- $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$ .

La matrice  $(-1)A$  est notée  $-A$ . On note  $A - B$  pour  $A + (-B)$ . On a  $A - A = (0)$ .

**Produit de matrices.** Soit  $A, B \in M_{n,p}(\mathbf{K})$ ,  $C, D \in M_{p,q}(\mathbf{K})$  et  $\lambda \in \mathbf{K}$ .

- $\lambda(AC) = (\lambda A)C = A(\lambda C)$ ,
- $(A + B)C = AC + BC$  et  $A(C + D) = AC + AD$  (distributivité),
- $A(BC) = (AB)C$  (associativité).

Mais le produit n'est pas commutatif : on n'a pas  $AB = BA$  (voir l'exercice 2).

De plus, si  $AB = (0)$  il est faux de dire que  $A = (0)$  ou  $B = (0)$ .

**Exemple.**  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

## 2.3 Inverse des matrices carrées

Si on se place dans l'ensemble des matrices carrées de taille  $n$ , on peut additionner et multiplier n'importe quelles matrices  $A$  et  $B$ . De plus, toute matrice  $A$  a un opposé  $-A$ . Qu'en est-il pour l'inverse ?

$$\text{Soit } I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbf{K}).$$

$I_n$  est la matrice carrée de taille  $n$  dont tous les coefficients sont nuls sauf ceux de la diagonale qui valent 1.  $I_n$  est appelée la **matrice identité**.

$I_n$  est l'élément neutre pour la multiplication :  $\forall A \in M_n(\mathbf{K}), I_n A = A I_n = A$ .

**Définition.** Soit  $A \in M_n(\mathbf{K})$ . S'il existe  $B \in M_n(\mathbf{K})$  telle que  $AB = BA = I_n$ , on dit que la matrice  $A$  est **inversible**. On note  $A^{-1} = B$  l'inverse de  $A$ .

**Exemple.**

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad AB = I_3 \text{ et } BA = I_3, \text{ donc } B = A^{-1}.$$

**Lemme.** Si  $A$  est inversible, son inverse est unique.

**Preuve.** Soit  $B_1, B_2 \in M_n(\mathbf{K})$  telles que  $AB_1 = B_1A = I_n$  et  $AB_2 = B_2A = I_n$ . Alors  $(B_2A)B_1 = I_n B_1 = B_1$  et  $B_2(AB_1) = B_2 I_n = B_2$ . Par associativité on trouve  $B_1 = B_2$ .

**Remarque.** Si  $A$  est inversible, alors  $A^{-1}$  est inversible et  $(A^{-1})^{-1} = A$ .

**Propriété.** Si  $A$  et  $B$  sont inversibles, alors  $AB$  est inversible et  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$  (ordre inversé).

**Preuve.**  $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = A I_n A^{-1} = A A^{-1} = I_n$ . De même  $(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1} I_n B = B^{-1} B = I_n$ . Donc  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .

Comme le produit n'est pas commutatif, on demande  $AB = I_n$  et  $BA = I_n$ , et a priori une seule égalité n'est pas suffisante. Pourtant on a le résultat suivant (admis pour l'instant) :

**Théorème.** Soit  $A, B \in M_n(\mathbf{K})$ . Si  $AB = I_n$  alors  $A$  est inversible et  $B = A^{-1}$ .

### Systemes linéaires et matrices inverses

Soit  $A = (a_{ij})$  une matrice carrée  $n \times n$  et  $X = (x_i), Y = (y_i)$  des vecteurs colonnes de taille  $n$ . On a vu que  $AX = Y$  est l'écriture matricielle du système linéaire de  $n$  équations à  $n$  inconnues :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = y_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = y_n \end{cases}$$

Si  $A$  est inversible, alors  $A^{-1}(AX) = A^{-1}Y$ , donc  $X = A^{-1}Y$ . Par conséquent, si on connaît  $A^{-1}$  alors on a la solution du système.

Réciproquement, nous allons voir que résoudre un système linéaire permet de calculer l'inverse d'une matrice carrée.

### Méthode pour calculer une matrice inverse

On se donne  $A \in M_n(\mathbf{K})$ . On cherche à savoir si  $A$  est inversible et si oui on veut calculer  $A^{-1}$ .

On prend  $Y \in M_{n,1}(\mathbf{K})$  quelconque et on résout le système linéaire  $AX = Y$  (où  $X \in M_{n,1}(\mathbf{K})$ ) en utilisant le pivot de Gauss. Il y a deux cas :

- Le rang du système est  $r < n$  (lignes "0 = ..."). Pour certains  $Y$ ,  $AX = Y$  n'a pas de solution ou a une infinité de solutions et la matrice  $A$  n'est pas inversible.

- Le rang du système est  $n$  (système triangulaire). Pour tout  $Y$  il existe une unique solution  $X$ , et la résolution du système donne une matrice  $B$  telle que  $AX = Y \iff X = BY$ . Alors  $A$  est inversible et  $B = A^{-1}$ .

On va maintenant montrer que si  $AX = Y \iff X = BY$  alors  $A$  est inversible et  $B = A^{-1}$ .

**Lemme.** Soit  $A, B \in M_n(\mathbf{K})$ . Si pour tout  $X \in M_{n,1}(\mathbf{K})$  on a  $AX = BX$  alors  $A = B$ .

**Preuve.** On note  $A = (a_{ij})$ ,  $B = (b_{ij})$  et  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ . Soit  $1 \leq k \leq n$ .

Si on choisit  $X$  tel que  $x_k = 1$  et  $x_i = 0$  pour  $i \neq k$  alors  $AX = \begin{pmatrix} a_{k1} \\ \vdots \\ a_{kn} \end{pmatrix}$  et  $BX = \begin{pmatrix} b_{k1} \\ \vdots \\ b_{kn} \end{pmatrix}$ .

On a  $AX = BX$ , donc la  $k$ -ième colonne de  $A$  est égale à la  $k$ -ième colonne de  $B$ . Comme c'est vrai pour  $k = 1, 2, \dots, n$ , on a  $A = B$ .

**Lemme.** Soit  $A, B \in M_n(\mathbf{K})$ . On suppose que  $\forall X, Y \in M_{n,1}(\mathbf{K})$ ,  $AX = Y \iff X = BY$ . Alors  $A$  est inversible et  $B = A^{-1}$ .

**Preuve.** Soit  $Y \in M_{n,1}(\mathbf{K})$ . Par hypothèse, si on pose  $X = BY$  alors  $AX = Y$ , donc  $A(BY) = Y$ . Autrement dit  $\forall Y \in M_{n,1}(\mathbf{K})$ ,  $(AB)Y = Y = I_n Y$ . Par le lemme précédent on a donc  $AB = I_n$ .

De même, soit  $X \in M_{n,1}(\mathbf{K})$ . Si on pose  $Y = AX$  alors par hypothèse  $BAX = BY = X$ , donc par le lemme précédent  $BA = I_n$ .

**Exemple.** Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Calculons  $A^{-1}$ .

Soit  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$  et  $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ . L'équation  $AX = Y$  équivaut au système :

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = y_1 \\ x_2 = y_2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = x_2 + y_1 = y_2 + y_1 \\ x_2 = y_2 \end{cases}$$

On remet les variables dans l'ordre :  $\begin{cases} x_1 = 1y_1 + 1y_2 \\ x_2 = 0y_1 + 1y_2 \end{cases}$

Autrement dit  $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Y$ . Donc  $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

## 2.4 Transposée d'une matrice

Soit  $A = (a_{ij})$  une matrice  $n \times p$ . La **transposée** de  $A$ , notée  ${}^tA$ , est la matrice  $(b_{ij})$  de taille  $p \times n$  telle que  $b_{ij} = a_{ji}$  pour tous  $i, j$ ,  $1 \leq i \leq p$ ,  $1 \leq j \leq n$ . Autrement dit,  ${}^tA$  s'obtient en échangeant les lignes et les colonnes de  $A$ .



**Exemple.**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -7 & 0 \end{pmatrix}, \quad {}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -7 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Propriétés.**

Soit  $A, B \in M_{n,p}(\mathbf{K})$ ,  $C \in M_{p,q}(\mathbf{K})$  et  $\lambda \in \mathbf{K}$ .

- ${}^t({}^tA) = A$ ,
- ${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB$ ,
- ${}^t(\lambda A) = \lambda {}^tA$ ,
- ${}^t(AB) = {}^tB {}^tA$  (ordre inversé),
- Si  $A \in M_n(\mathbf{K})$  est inversible, alors  ${}^tA$  est inversible et  ${}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1}$ .

### 3 Espaces vectoriels

Nous avons vu précédemment  $\mathbf{R}^n$  en tant qu'espace vectoriel. Nous allons maintenant définir les espaces vectoriels de façon générale. Le point commun de tous les espaces vectoriels est qu'on y définit les mêmes opérations et les mêmes notions (combinaisons linéaires, familles libres, etc). La différence est la nature des "vecteurs" (polynômes, fonctions, etc), qui perdent leur signification géométrique. Malgré cela, les propriétés se montrent généralement de la même façon que dans  $\mathbf{R}^n$ ,

#### 3.1 Définition d'un espace vectoriel

Dans toute la suite,  $\mathbf{K}$  désigne soit  $\mathbf{R}$  soit  $\mathbf{C}$ . Un élément de  $\mathbf{K}$  est appelé un *scalaire*.

**Définition.**

Un *espace vectoriel sur  $\mathbf{K}$*  (ou un  *$\mathbf{K}$ -espace vectoriel*) est un ensemble non vide  $E$  muni de deux opérations, la somme et la multiplication par un scalaire. Les éléments de  $E$  sont appelés des *vecteurs*. La somme de deux vecteurs  $u, v \in E$  est notée  $u + v$ , la multiplication d'un vecteur  $u \in E$  par un scalaire  $\lambda \in \mathbf{K}$  est notée  $\lambda u$ . Ces opérations doivent vérifier les propriétés suivantes :

- 1)  $\forall u, v \in E, u + v = v + u$ ,
- 2)  $\forall u, v, w \in E, (u + v) + w = u + (v + w)$ ,
- 3) il existe un vecteur  $\vec{0} \in E$  tel que  $\forall u \in E, u + \vec{0} = u$ ; le vecteur  $\vec{0}$  est appelé le *vecteur nul*,
- 4)  $\forall u \in E, 1u = u$  et  $0u = \vec{0}$ ,
- 5)  $\forall u \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbf{K}, (\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$  et  $\lambda(\mu u) = (\lambda\mu)u$ ,
- 6)  $\forall u, v \in E, \forall \lambda \in \mathbf{K}, \lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$ .

**Notations.** Pour tout  $u \in E$ , le vecteur  $(-1)u$  est noté  $-u$ . C'est l'*opposé* du vecteur  $u$ . On a  $u + (-u) = \vec{0}$ . Si  $u, v \in E$ , on note  $u - v$  pour  $u + (-v)$ .

**Propriété.** Soit  $\lambda$  un scalaire et  $u$  un vecteur. Si  $\lambda u = \vec{0}$  alors soit  $\lambda = 0$  soit  $u = \vec{0}$ .

**Remarque.** Les propriétés 1-6 sont généralement des conséquences immédiates de la définition des opérations.

**Exemple 1.** L'ensemble  $\mathbf{C}$  lui-même est un  $\mathbf{C}$ -espace vectoriel. L'addition et la multiplication par un scalaire sont l'addition dans  $\mathbf{C}$  et la multiplication dans  $\mathbf{C}$ .

**Exemple 2.** Dans  $M_{n,p}(\mathbf{K})$  (ensemble des matrices de taille  $n \times p$  à coefficients dans  $\mathbf{K}$ ), on peut additionner deux matrices quelconques et multiplier une matrice par un scalaire. Les propriétés 1-6 sont vérifiées donc  $M_{n,p}(\mathbf{K})$  est un espace vectoriel sur  $\mathbf{K}$ . Le vecteur nul est la matrice nulle.

**Exemple 3.** Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbf{R}$ . On considère l'ensemble des fonctions  $I$  dans  $\mathbf{R}$ , qu'on notera dans la suite de ce cours  $\mathcal{F}(I, \mathbf{R})$  (*attention, cette notation n'est pas standard*). Si  $f$  sont deux fonctions de  $I$  dans  $\mathbf{R}$  et  $\lambda \in \mathbf{R}$ , on définit les fonctions  $f + g$  et  $\lambda f$  par

$$\forall x \in I, (f + g)(x) = f(x) + g(x) \text{ et } (\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

Muni de ces opérations,  $\mathcal{F}(I, \mathbf{R})$  est un espace vectoriel sur  $\mathbf{R}$ . Le vecteur nul est la fonction nulle  $\theta: I \rightarrow \mathbf{R}$  définie par  $\forall x \in I, \theta(x) = 0$ .

**Exemple 4.** Un polynôme à coefficients dans  $\mathbf{K}$  est de la forme  $P = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$ , avec  $a_0, a_1, \dots, a_n$  des éléments de  $\mathbf{K}$  et  $n$  un entier naturel. Si  $n = 0$ ,  $P = a_0$  est un polynôme constant. Le polynôme constant égal à 0 est appelé le polynôme nul. On note  $\mathbf{K}[X]$  l'ensemble des polynômes à coefficients dans  $\mathbf{K}$  ( $X$  désigne la variable des polynômes). La somme de deux polynômes est un polynôme, et on peut multiplier un polynôme par un scalaire ( $\lambda(a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n) = \lambda a_0 + \lambda a_1X + \dots + \lambda a_nX^n$ ). Muni de ces opérations,  $\mathbf{K}[X]$  est un espace vectoriel sur  $\mathbf{K}$ . Le vecteur nul est le polynôme nul.

**Définition/proposition.** Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels sur  $\mathbf{K}$ . Le produit cartésien  $E \times F$  est l'ensemble des couples  $(u, v)$  avec  $u \in E$  et  $v \in F$ . Si  $(u, v), (u', v')$  sont des éléments de  $E \times F$  et  $\lambda \in \mathbf{K}$ , on définit la somme  $(u, v) + (u', v') = (u + u', v + v')$  et la multiplication par un scalaire  $\lambda(u, v) = (\lambda u, \lambda v)$ .

Muni de ces opérations,  $E \times F$  est un espace vectoriel sur  $\mathbf{K}$ , appelé *l'espace vectoriel produit de  $E$  par  $F$* . Le vecteur nul de  $E \times F$  est  $(\vec{0}_E, \vec{0}_F)$ , où  $\vec{0}_E$  est le vecteur nul de  $E$  et  $\vec{0}_F$  est le vecteur nul de  $F$ .

**Exemple 5.**  $\mathbf{C}^2 = \mathbf{C} \times \mathbf{C} = \{(z_1, z_2) \mid z_1, z_2 \in \mathbf{C}\}$  est un  $\mathbf{C}$ -espace vectoriel.

Exemple de somme :  $(1 + 2i, 2 - i) + (1 + i, 1) = (2 + 3i, 3 - i)$ .

Exemple de multiplication par un scalaire :  $i(1 + 2i, 2 - i) = (-2 + i, 1 + 2i)$ .

Plus généralement,  $\mathbf{C}^n$  est un espace vectoriel sur  $\mathbf{C}$ .  $\mathbf{C}^n$  est l'ensemble des  $(z_1, z_2, \dots, z_n)$  avec  $z_1, z_2, \dots, z_n$  des nombres complexes. Les opérations se font composante par composante :  $(z_1, z_2, \dots, z_n) + (z'_1, z'_2, \dots, z'_n) = (z_1 + z'_1, z_2 + z'_2, \dots, z_n + z'_n)$  et  $\lambda((z_1, z_2, \dots, z_n)) = (\lambda z_1, \lambda z_2, \dots, \lambda z_n)$ .

**Définition.** Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbf{K}$  et  $u_1, \dots, u_k$  des vecteurs de  $E$ . On dit que le vecteur  $v \in E$  est *combinaison linéaire* de  $u_1, \dots, u_k$  s'il existe des scalaires  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbf{K}$  tels que  $v = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_k u_k$ .

Si  $k = 1$ , la combinaison linéaire se réduit à  $v = \lambda_1 u_1$ . On dit que  $v$  est *colinéaire* à  $u$ .

**Remarque.** Le vecteur nul est toujours combinaison linéaire de  $u_1, \dots, u_k$  :  $\vec{0} = 0u_1 + \dots + 0u_k$ .

**Exemple 6.** Soit  $E = \mathbf{R}[X]$ ,  $P = 1 + X^2$ ,  $Q = X$  et  $R = (1 + X)^2$ . On a  $R = 1 + 2X + X^2 = P + 2Q$ , donc  $R$  est combinaison linéaire de  $P$  et  $Q$ .

## 3.2 Sous-espaces vectoriels

**Définition.** Soit  $E$  un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel et  $F$  une partie de  $E$ . On dit que  $F$  est un *sous-espace vectoriel* de  $E$  si  $\vec{0} \in F$  et si pour tous  $u, v \in F$  et tout  $\lambda \in \mathbf{K}$ , on a  $u + v \in F$  et  $\lambda u \in F$ .

De façon équivalente,  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  si  $0 \in F$  et si pour tous  $u, v \in F$  et tout  $\lambda \in \mathbf{K}$ , on a  $\lambda u + v \in F$ .

**Remarque.** Si  $F$  est un sous-espace vectoriel, toute combinaison linéaire de vecteurs de  $F$  appartient à  $F$ .

**Théorème.** Soit  $E$  un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . Alors  $F$  est un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel.

**Exemple 7.** Soit  $E = \mathcal{F}(I, \mathbf{R})$  l'espace vectoriel de l'exemple 3. Soit  $F = \mathcal{C}(I, \mathbf{R})$  l'ensemble des fonctions continues de  $I$  dans  $\mathbf{R}$ . Si  $f, g$  sont des fonctions continues et  $\lambda \in \mathbf{R}$ , alors  $f + g$  et  $\lambda f$  sont des fonction continues. De plus, la fonction nulle appartient à  $F$ . Par conséquent,  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

De même, l'ensemble des fonctions dérivables de  $I$  dans  $\mathbf{R}$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

**Exemple 8.** L'ensemble des polynômes à coefficients dans  $\mathbf{K}$  de degré inférieur ou égal à  $n$  est noté  $\mathbf{K}_n[X]$ . Autrement dit,  $\mathbf{K}_n[X] = \{a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n \mid a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbf{K}\}$ .  $\mathbf{K}_n[X]$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbf{K}[X]$ .

**Définition.** Soit  $E$  un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel et  $F, G$  des sous-espaces vectoriels de  $E$ . On définit la *somme* de  $F$  et  $G$  comme étant  $F + G = \{u + v \mid u \in F, v \in G\}$ .

**Théorème.** Soit  $E$  un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel et  $F, G$  des sous-espaces vectoriels de  $E$ . Alors  $F \cap G$  et  $F + G$  sont des sous-espaces vectoriels de  $E$ .

**Définition/proposition.** Soit  $E$  un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel et  $u_1, \dots, u_k$  des vecteurs de  $E$ . On note  $\text{Vect}(u_1, \dots, u_k)$  l'ensemble des combinaisons linéaires de  $u_1, \dots, u_k$  c'est-à-dire :

$$\text{Vect}(u_1, \dots, u_k) = \{\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_k u_k \mid \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbf{K}\}.$$

Alors  $\text{Vect}(u_1, \dots, u_k)$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ , appelé *sous-espace engendré* par  $u_1, \dots, u_k$ .

**Exemple 9.** On se place dans  $\mathbf{K}[X]$ . Un polynôme de degré inférieur ou égal à 2 peut s'écrire  $P = a_0 + a_1X + a_2X^2$ , donc  $P$  est une combinaison linéaire des polynômes  $1, X, X^2$ . On a donc  $\mathbf{K}_2[X] = \text{Vect}(1, X, X^2)$ . Plus généralement,  $\mathbf{K}_n[X] = \text{Vect}(1, X, \dots, X^n)$ .

**Exemple 10.** Soit  $E = \mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$  l'ensemble des fonctions de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{R}$ . Soit  $F$  l'ensemble des solutions de l'équation différentielle  $y'' - 5y' + 6y = 0$ . Les racines de  $r^2 + 5r - 6$  sont  $\alpha = 2$  et  $\beta = 3$ , donc l'ensemble des solutions s'écrit  $\lambda e^{2x} + \mu e^{3x}$  avec  $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ . On en déduit que  $F = \text{Vect}(e^{2x}, e^{3x})$ .

### 3.3 Parties génératrices

Soit  $A$  une partie non vide de  $E$ . On note  $\text{Vect}(A)$  l'ensemble des des vecteurs  $u \in E$  pouvant s'écrire

$$u = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n$$

avec  $n \in \mathbf{N}^*$ ,  $a_1, \dots, a_n \in A$  et  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{K}$ .

**Proposition.**  $\text{Vect}(A)$  est un sous-espace vectoriel.

**Preuve.**

Soit  $a \in A$ . On a  $0.a = \vec{0}$  donc  $\vec{0} \in \text{Vect}(A)$ . Soit  $u, v \in \text{Vect}(A)$  et  $\lambda \in \mathbf{K}$ . Par définition il existe un

entier  $n$ , des vecteurs  $a_1, \dots, a_n \in A$  et des scalaires  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbf{K}$  tels que  $u = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n$ . De même, il existe  $m \in \mathbf{N}^*$ ,  $b_1, \dots, b_m \in A$  et  $\beta_1, \dots, \beta_m \in \mathbf{K}$  tels que  $v = \beta_1 b_1 + \dots + \beta_m b_m$ . Alors

$$u + \lambda v = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n + (\lambda \beta_1) b_1 + \dots + (\lambda \beta_m) b_m$$

donc  $u + \lambda v \in \text{Vect}(A)$ .

### Définition.

$\text{Vect}(A)$  est appelé le **sous-espace engendré** par  $A$ .

Soit  $F$  un sous-espace vectoriel. Si  $\text{Vect}(A) = F$  on dit que  $A$  est une **partie génératrice** (ou une **famille génératrice**) de  $F$  ou que  $A$  **engendre**  $F$ .

### Notation.

Si  $A = \{a\}$  contient un seul élément on note  $\mathbf{K}a = \text{Vect}(a) = \{\lambda a \mid \lambda \in \mathbf{K}\}$ .

### Remarques.

- $\text{Vect}(A)$  est le plus petit sous-espace vectoriel contenant  $A$ .
- Si  $A \subset B$  alors  $\text{Vect}(A) \subset \text{Vect}(B)$ . En particulier, si  $A$  est une partie génératrice de  $E$  et si  $B$  contient  $A$  alors  $B$  est aussi une partie génératrice de  $E$ .
- On considère souvent un ensemble fini : si  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ . Alors

$$\text{Vect}(A) = \{\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n \mid \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{K}\}.$$

**Exemple 1.** Les vecteurs  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$  engendrent  $\mathbf{R}^2$ . En effet, si  $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ , on peut écrire

$$(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1).$$

$\{(1, 0), (0, 1), (1, 1)\}$  engendre également  $\mathbf{R}^2$  car

$$(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1) + 0(1, 1).$$

Il y a plusieurs façons d'écrire  $(x, y)$  comme combinaison linéaire de ces 3 vecteurs, en voici une deuxième :

$$(x, y) = \frac{x-y}{2}(1, 0) + \frac{y-x}{2}(0, 1) + \frac{x+y}{2}(1, 1).$$

### Exemple 2.

**Proposition.** L'ensemble  $\mathcal{F}$  des fonctions de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{R}$  est un espace vectoriel. Le vecteur nul de  $\mathcal{F}$  est la fonction identiquement nulle :  $\forall x \in \mathbf{R}, f_0(x) = 0$ .

Les solutions de l'équation différentielle  $y'' + y = 0$  sont  $y(x) = \lambda \cos(x) + \mu \sin(x)$ ,  $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ . C'est le sous-espace vectoriel de  $\mathcal{F}$  engendré par les fonctions  $x \mapsto \cos(x)$  et  $x \mapsto \sin(x)$ .

**Exemple 3 :**  $E = \mathbf{K}[X]$  avec  $\mathbf{K} = \mathbf{R}$  ou  $\mathbf{C}$ .

$\mathbf{K}[X]$  est l'ensemble des polynômes à coefficients dans  $\mathbf{K}$  : un polynôme  $P \in \mathbf{K}[X]$  s'écrit

$$P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0 \quad (*)$$

avec  $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbf{K}$ .

Deux polynômes  $P$  et  $Q$  sont égaux si et seulement si tous leurs coefficients sont égaux.

Exemple : si  $aX^2 + bX + c = 2X + 3$  alors  $a = 0, b = 2, c = 3$  (identification des coefficients).

**Proposition.**  $\mathbf{K}[X]$  est un espace vectoriel sur  $\mathbf{K}$ .

Soit  $A = \{1, X, X^2, \dots, X^n, \dots\} = \{X^k \mid k \in \mathbf{N}\}$ . En regardant (\*) on voit qu'un polynôme  $P \in \mathbf{R}[X]$  s'écrit comme une combinaison linéaire d'éléments de  $A$ . Donc  $A$  est une famille génératrice de  $\mathbf{R}[X]$ .

### 3.4 Somme, somme directe, supplémentaire.

Soit  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ . On définit  $F + G$  comme l'ensemble des vecteurs  $w$  de  $E$  pouvant s'écrire  $w = u + v$  avec  $u \in F$  et  $v \in G$  :

$$F + G = \{u + v \in E \mid u \in F, v \in G\}.$$

**Proposition.**  $F + G$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ , qui s'appelle la **somme** de  $F$  et  $G$ .

**Preuve.**  $\vec{0} \in F$  et  $\vec{0} \in G$  donc  $\vec{0} = \vec{0} + \vec{0} \in F + G$ .

Soit  $w_1, w_2$  deux vecteurs de  $F + G$  et  $\lambda \in \mathbf{K}$ . Il existe  $u_1, u_2 \in F$  et  $v_1, v_2 \in G$  tels que  $w_1 = u_1 + v_1$  et  $w_2 = u_2 + v_2$ . Donc

$$w_1 + w_2 = \underbrace{(u_1 + u_2)}_{\in F} + \underbrace{(v_1 + v_2)}_{\in G} \in F + G.$$

De plus

$$\lambda w_1 = \underbrace{(\lambda u_1)}_{\in F} + \underbrace{(\lambda v_1)}_{\in G} \in F + G.$$

Donc  $F + G$  est un sous-espace vectoriel.

**Remarque.**  $F \subset F + G$  car si  $u \in F$  alors  $u = u + \vec{0}$  et  $\vec{0} \in G$ . De même  $G \subset F + G$ . Donc  $F \cup G \subset F + G$ . Mais en général,  $F \cup G$  n'est pas un sous-espace vectoriel.

**Théorème.** Soit  $A, B$  deux parties de  $E$ . Soit  $F$  le sous-espace vectoriel engendré par  $A$  et  $G$  le sous-espace vectoriel engendré par  $B$ . Alors  $F + G$  est engendré par  $A \cup B$ .

**Preuve.**  $A$  est une partie de  $F$  et on a vu que  $F \subset F + G$ , donc  $A \subset F + G$ . De même  $B \subset F + G$ . Puisque  $F + G$  est un sous-espace vectoriel, toute combinaison linéaire d'éléments de  $A \cup B$  appartient à  $F + G$ , donc  $\text{Vect}(A \cup B) \subset F + G$ .

Réciproquement, si  $w \in F + G$  alors il existe  $u \in F$  et  $v \in G$  tels que  $w = u + v$ . Par définition  $u$  s'écrit comme une combinaison linéaire de vecteurs de  $A$  et  $v$  s'écrit comme une combinaison linéaire d'éléments de  $B$ , donc  $w = u + v$  s'écrit comme une combinaison linéaire d'éléments de  $A \cup B$ . Donc  $F + G \subset \text{Vect}(A \cup B)$ .

Conclusion :  $F + G = \text{Vect}(A \cup B)$ .

**Définition.** Soit  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ .

On dit que  $F$  et  $G$  sont en **somme directe** si tout vecteur  $w$  de  $F + G$  s'écrit de façon unique sous la forme  $w = u + v$  avec  $u \in F$  et  $v \in G$ . On écrit alors  $F \oplus G$ .

On dit que  $F$  et  $G$  sont **supplémentaires** ou que  $G$  est un **supplémentaire** de  $F$  si  $F \oplus G = E$  (c'est-à-dire  $F$  et  $G$  sont en somme directe et  $F + G = E$ ).

**Théorème.** Les sous-espaces vectoriels  $F$  et  $G$  sont en somme directe si et seulement si  $F \cap G = \{\vec{0}\}$ .

Par conséquent  $F$  et  $G$  sont supplémentaires si et seulement si  $F + G = E$  et  $F \cap G = \{\vec{0}\}$ .

**Preuve.** Supposons que  $F$  et  $G$  sont en somme directe. On a  $\vec{0} \in F$  et  $\vec{0} \in G$ , donc  $\vec{0} \in F \cap G$ . Soit  $u \in F \cap G$ . On peut écrire

$$u = \underbrace{u}_{\in F} + \underbrace{\vec{0}}_{\in G} = \underbrace{\vec{0}}_{\in F} + \underbrace{u}_{\in G}.$$

Par unicité de la décomposition, on a  $u = \vec{0}$ . Donc  $F \cap G = \{\vec{0}\}$ .

Réciproquement supposons que  $F \cap G = \{\vec{0}\}$ . Soit  $u, u' \in F$  et  $v, v' \in G$  tels que  $u + v = u' + v'$ . Alors  $u - u' = v' - v$ . De plus  $u - u' \in F$  et  $v' - v \in G$ , donc si on pose  $w = u - u' = v' - v$  on a  $w \in F \cap G = \{\vec{0}\}$ . On en déduit que  $w = \vec{0}$ , donc  $u = u'$  et  $v = v'$ . Par conséquent, tout vecteur de  $F + G$  s'écrit de façon unique comme somme d'un vecteur de  $F$  et d'un vecteur de  $G$ , autrement dit  $F$  et  $G$  sont en somme directe.

Le deuxième point du théorème découle directement du premier point et de la définition de supplémentaire.

**Exemple.** Soit  $F = \{(a, 0) \mid a \in \mathbf{R}\}$  et  $G = \{(0, b) \mid b \in \mathbf{R}\}$ . Ce sont deux sous-espaces vectoriels de  $\mathbf{R}^2$ . On a  $F + G = \mathbf{R}^2$  car si  $(x, y) \in \mathbf{R}^2$  on peut écrire  $(x, y) = (x, 0) + (0, y)$  avec  $(x, 0) \in F$  et  $(0, y) \in G$ .

Cette écriture est unique : si  $(x, y) = (a, 0) + (0, b)$  alors  $(a, 0) + (0, b) = (a, b)$  donc  $a = x$  et  $b = y$ . Donc  $F$  et  $G$  sont en somme directe.

On peut aussi utiliser le théorème précédent. Soit  $u \in F \cap G$ . Comme  $u \in F$  il existe  $a \in \mathbf{R}$  tel que  $u = (a, 0)$ . De même il existe  $b \in \mathbf{R}$  tel que  $u = (0, b)$ . On a  $(a, 0) = (0, b)$  donc  $a = b = 0$ . On en déduit que  $F \cap G = \{\vec{0}\}$ , donc  $F \oplus G = \mathbf{R}^2$ .

Soit  $\vec{i} = (1, 0)$ . On peut écrire  $(a, 0) = a(1, 0) = a\vec{i}$  donc  $F = \text{Vect}(\vec{i}) = \mathbf{R}\vec{i}$ . De même  $G$  est engendré par  $\vec{j} = (0, 1)$ . Par l'avant dernier théorème,  $(\vec{i}, \vec{j})$  engendre  $\mathbf{R}^2$ .

Par contre  $F \cup G$  n'est pas un sous-espace vectoriel car  $(1, 0) \in F$ ,  $(0, 1) \in G$  mais  $(1, 1) = (1, 0) + (0, 1)$  n'appartient pas à  $F \cup G$ .

### 3.5 Parties libres

#### Définition.

Soit  $A$  une partie non vide de  $E$ . On dit que  $A$  est une **partie libre** si quels que soient les vecteurs  $a_1, \dots, a_n \in A$  et les scalaires  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , la relation

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n = 0$$

entraîne  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \dots, \lambda_n = 0$ .

On dit aussi que les éléments de  $A$  sont **linéairement indépendants**.

Une partie qui n'est pas libre est dite **liée**.

**Exemple 1.** Soit  $u = (1, 0, 2)$  et  $v = (1, 3, 1)$  des vecteurs de  $\mathbf{R}^3$  et  $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ .

On a  $\lambda u + \mu v = (\lambda + \mu, 3\mu, 2\lambda + \mu)$ , donc si  $\lambda u + \mu v = 0$  alors

$$\begin{cases} \lambda + \mu & = 0 \\ 3\mu & = 0 \\ 2\lambda + \mu & = 0 \end{cases}$$

Ce système a une unique solution  $\lambda = 0, \mu = 0$ , donc  $u, v$  sont linéairement indépendants.

Soit  $w = (2, 6, 2)$ . Les vecteurs  $v$  et  $w$  sont liés car  $2v - w = 0$ .

### Exemple 2.

On a vu que l'ensemble des solutions de  $y'' + y = 0$  est le sous-espace vectoriel engendré par  $x \mapsto \cos x$  et  $x \mapsto \sin x$ . Montrons que ces deux fonctions (vues en tant que vecteurs) sont linéairement indépendantes.

Soit  $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$  tels que  $\forall x \in \mathbf{R}, \lambda \cos x + \mu \sin x = 0$ . En particulier pour  $x = 0$  on doit avoir  $\lambda = 0$ . Et pour  $x = \frac{\pi}{2}$  on obtient  $\mu = 0$ . Donc  $\{\cos, \sin\}$  est une famille libre.

### Exemple 3.

Soit  $f_1, f_2$  et  $f_3$  les fonctions de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{R}$  définies par  $f_1(x) = \cos^2(x)$ ,  $f_2(x) = \sin^2(x)$ ,  $f_3(x) = \cos(2x)$ . La famille  $\{f_1, f_2, f_3\}$  est liée car  $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$ , autrement dit  $f_1 - f_2 - f_3 = 0$ .

### Théorème.

Soit  $u_1, \dots, u_n$  des vecteurs linéairement indépendants et  $v$  un vecteur de  $E$ . Alors  $v$  est une combinaison linéaire de  $u_1, \dots, u_n$  si et seulement si  $(u_1, u_2, \dots, u_n, v)$  est une partie liée.

### Preuve.

S'il existe des scalaires  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  tels que  $v = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n$  alors  $\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n - v = 0$ , donc les vecteurs  $u_1, u_2, \dots, u_n, v$  sont liés.

Réciproquement, supposons que  $(u_1, u_2, \dots, u_n, v)$  est une partie liée. Il existe  $\mu_1, \dots, \mu_n, \mu_{n+1} \in \mathbf{K}$  non tous nuls tels que  $\mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + \dots + \mu_n u_n + \mu_{n+1} v = 0$ . Si  $\mu_{n+1} = 0$  alors  $\mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + \dots + \mu_n u_n = 0$  donc  $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_n = 0$  car  $u_1, \dots, u_n$  sont linéairement indépendants, ce qui est une contradiction. Donc  $\mu_{n+1} \neq 0$  et

$$v = -\frac{\mu_1}{\mu_{n+1}} u_1 - \frac{\mu_2}{\mu_{n+1}} u_2 - \dots - \frac{\mu_n}{\mu_{n+1}} u_n.$$

Ainsi,  $v$  est une combinaison linéaire de  $u_1, \dots, u_n$ .

## 3.6 Bases

### Définition.

Soit  $A$  une partie de  $E$ . On dit que  $A$  est une **base** de  $E$  si  $A$  est à la fois une famille libre et une partie génératrice de  $E$ .

### Exemple.

$\vec{i} = (1, 0), \vec{j} = (0, 1)$  est une famille libre et génératrice de  $\mathbf{R}^2$  donc c'est une base de  $\mathbf{R}^2$ .

### Théorème.

$(e_1, \dots, e_n)$  est une base de  $E$  si et seulement si tout vecteur  $u$  de  $E$  s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire de  $e_1, \dots, e_n$ .

### Preuve.

On suppose que  $(e_1, \dots, e_n)$  est une base de  $E$ . Comme c'est une partie génératrice, pour tout  $u \in E$

il existe  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  tels que  $u = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$ . Supposons qu'on a aussi  $u = \mu_1 e_1 + \dots + \mu_n e_n$ . Alors

$$u - u = (\lambda_1 - \mu_1)e_1 + \dots + (\lambda_n - \mu_n)e_n = \vec{0}.$$

Comme  $(e_1, \dots, e_n)$  est une famille libre, tous les coefficients sont nuls, donc  $\lambda_1 = \mu_1, \lambda_2 = \mu_2, \dots, \lambda_n = \mu_n$ .

Réciproquement, on suppose que tout vecteur  $u$  s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire de  $e_1, \dots, e_n$ . Ceci implique tout d'abord que  $(e_1, \dots, e_n)$  est une famille génératrice. De plus  $\vec{0} = 0e_1 + \dots + 0e_n$ . Par unicité, si  $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = \vec{0}$  alors  $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ , donc  $(e_1, \dots, e_n)$  est une famille libre. Par conséquent, c'est une base.

### Définition.

On suppose que  $(e_1, \dots, e_n)$  est une base de  $E$ . Si  $u \in E$  on peut écrire

$$u = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n.$$

Les scalaires  $x_1, \dots, x_n$  sont appelés les **coordonnées** de  $u$  dans la base  $(e_1, \dots, e_n)$ .

### Exemple fondamental : $\mathbf{R}^n$ .

Soit  $e_k$  le vecteur de  $\mathbf{R}^n$  dont toutes les coordonnées sont nulles sauf la  $k$ -ième qui vaut 1 :

$$e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \quad \dots, \quad e_n = (0, 0, \dots, 0, 1).$$

Soit  $u = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ . Le vecteur  $u$  s'écrit de façon unique  $u = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$ . Donc  $(e_1, \dots, e_n)$  est une base de  $\mathbf{R}^n$  et  $x_1, \dots, x_n$  sont les coordonnées de  $u$ .

### Remarque.

On suppose que  $(e_1, \dots, e_n)$  est une base de  $E$ . Soit  $u, v$  deux vecteurs de  $E$ . On note  $x_1, \dots, x_n$  les coordonnées de  $u$  et  $y_1, \dots, y_n$  les coordonnées de  $v$  dans cette base. Alors les coordonnées de  $u + v$  sont  $x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n$  et les coordonnées de  $\lambda u$  sont  $\lambda x_1, \dots, \lambda x_n$ .

Autrement dit, les opérations sur les coordonnées se font comme dans  $\mathbf{R}^n$ .

### Théorème.

Soit  $F$  et  $G$  des sous-espaces vectoriels tels que  $F \oplus G = E$ . Si  $(e_1, \dots, e_p)$  est une base de  $F$  et  $(f_1, \dots, f_q)$  est une base de  $G$  alors  $(e_1, \dots, e_p, f_1, \dots, f_q)$  est une base de  $E$ .

### Preuve.

Soit  $u \in E$ . Il existe  $v \in F$  et  $w \in G$  tels que  $u = v + w$ . Le vecteur  $v$  est combinaison linéaire de  $e_1, \dots, e_p$  et le vecteur  $w$  est combinaison linéaire de  $f_1, \dots, f_q$ , donc  $u$  peut s'écrire comme combinaison linéaire de  $e_1, \dots, e_p, f_1, \dots, f_q$ , autrement dit  $(e_1, \dots, e_p, f_1, \dots, f_q)$  est une famille génératrice de  $E$ .

Soit  $\lambda_1, \dots, \lambda_p, \mu_1, \dots, \mu_q$  tels que

$$\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_p e_p + \mu_1 f_1 + \dots + \mu_q f_q = \vec{0}.$$

$v = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_p e_p$  appartient à  $F$  et  $w = \mu_1 f_1 + \dots + \mu_q f_q$ . Comme  $\vec{0} = \vec{0} + \vec{0}$  est l'unique décomposition de  $\vec{0}$  selon la somme directe  $F \oplus G$ , on a  $v = w = \vec{0}$ . Comme  $(e_1, \dots, e_p)$  est une base de  $F$ ,  $v = \vec{0}$  implique que  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_p = 0$ . De même, comme  $(f_1, \dots, f_q)$  est une base de  $G$ ,  $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_q = 0$ . On en déduit que  $(e_1, \dots, e_p, f_1, \dots, f_q)$  est une famille libre.

Conclusion :  $(e_1, \dots, e_p, f_1, \dots, f_q)$  est une base de  $E$ .



### **Théorème de la base incomplète.**

Soit  $u_1, u_2, \dots, u_p$  des vecteurs de  $E$  linéairement indépendants. Soit  $v_1, v_2, \dots, v_q$  des vecteurs qui engendrent  $E$ . Alors il existe un entier  $n \geq p$  et une base  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  de  $E$  telle que

- $e_i = u_i$  si  $1 \leq i \leq p$ ,
- $e_i$  est l'un des vecteurs  $v_1, \dots, v_q$  si  $i > p$ .

#### **Preuve.**

1er cas : pour tout  $i$  le vecteur  $v_i$  appartient au sous-espace engendré par  $u_1, \dots, u_p$ . On a donc  $\text{Vect}(v_1, \dots, v_q) \subset \text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$ . Comme  $\text{Vect}(v_1, \dots, v_q) = E$ , on en déduit que  $\text{Vect}(u_1, \dots, u_p) = E$ . On sait déjà que  $(u_1, \dots, u_p)$  est une famille libre donc c'est une base. C'est le théorème avec  $n = p$ .

2ème cas : il existe  $i_1, 1 \leq i_1 \leq q$ , tel que  $v_{i_1} \notin \text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$ . Par le théorème du paragraphe 5 (page 4), les vecteurs  $u_1, \dots, u_p, v_{i_1}$  sont linéairement indépendants.

On pose  $u_{p+1} = v_{i_1}$  et on recommence la preuve avec  $(u_1, \dots, u_{p+1})$  et  $(v_1, \dots, v_q)$ .

Si on est de nouveau dans le 2ème cas, alors il existe  $i_2$  tel que  $v_{i_2} \notin \text{Vect}(u_1, \dots, u_p, u_{p+1})$  et nécessairement  $i_2 \neq i_1$  car  $u_{p+1} = v_{i_1}$ . On pose  $u_{p+2} = v_{i_2}$  et on recommence.

Le processus s'arrête en un nombre fini d'étapes (au plus  $q$ ) puisqu'à chaque fois on prend un vecteur différent parmi  $v_1, \dots, v_q$ . Appelons  $k$  le nombre d'étapes. À ce moment-là, on est nécessairement dans le premier cas, donc  $(u_1, \dots, u_p, u_{p+1}, \dots, u_{p+k})$  est une base. C'est le théorème avec  $n = p + k$ .

## **3.7 Dimension**

### **b) Sous-espaces vectoriels et dimension**

#### **Théorème.**

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie. Si  $F$  est un sous-espace vectoriel, alors  $F$  est de dimension finie et  $\dim F \leq \dim E$ .

De plus, si  $\dim F = \dim E$  alors  $F = E$ .

#### **Preuve.**

On note  $n = \dim E$ . Si  $F = \{\vec{0}\}$  alors  $\dim F = 0$ .

Supposons  $F \neq \{\vec{0}\}$ . Toute famille libre de vecteurs de  $F$  est aussi une famille libre dans  $E$ , donc elle contient au plus  $n$  vecteurs.

Soit  $d$  le nombre maximal de vecteurs formant une famille libre de  $F$ ; par ce qui précède, on a  $d \leq n$ . Soit  $(u_1, \dots, u_d)$  une famille libre de  $F$ . Pour tout vecteur  $v \in F$ , la famille  $(u_1, \dots, u_d, v)$  est liée sinon le nombre  $d$  ne serait pas maximal. Donc  $v$  est une combinaison linéaire de  $u_1, \dots, u_d$ . Par conséquent  $(u_1, \dots, u_d)$  est une famille génératrice de  $F$ . C'est donc une base de  $F$ , donc  $\dim F = d \leq n = \dim E$ .

De plus, si  $d = n$  alors  $(u_1, \dots, u_d)$  est une famille libre de  $E$  avec  $d = \dim E$ . Par un des résultats du paragraphe 7 a), c'est une base de  $E$ , donc  $F = E$ .

#### **Proposition.**

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie et  $F$  un sous-espace vectoriel.

- Si  $p = \dim F$ , il existe une base de  $E$  dont les  $p$  premiers vecteurs forment une base de  $F$ .
- $F$  admet un supplémentaire dans  $E$ .

**Preuve.**

Soit  $n = \dim E$  et  $(e_1, \dots, e_p)$  une base de  $F$ . C'est une famille libre de  $E$  donc par le théorème de la base incomplète, il existe des vecteurs  $e_{p+1}, \dots, e_n$  tels que  $(e_1, \dots, e_p, \dots, e_n)$  est une base de  $E$ .

Si  $n = p$  alors  $F \oplus \{\vec{0}\} = E$ .

Si  $p < n$ , on pose  $G = \text{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$ . Alors  $(e_{p+1}, \dots, e_n)$  est une base de  $G$  et  $F \oplus G = E$ . Ceci termine la preuve.

**Remarque.**

Si  $F \neq E$  et  $F \neq \{\vec{0}\}$  alors  $F$  admet une infinité de supplémentaires différents.

**Théorème.**

Soit  $E$  et  $F$  des espaces vectoriels de dimension finie. Alors

$$\dim(E \times F) = \dim E + \dim F.$$

**Preuve.** Voir le paragraphe 6 (construction d'une base de  $E \times F$ ).

**Théorème.**

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie. Si  $F$  et  $G$  sont des sous-espaces vectoriels en somme directe alors

$$\dim(F \oplus G) = \dim F + \dim G.$$

**Preuve.** Voir le paragraphe 6 (construction d'une base de  $E \oplus F$ ).

**Remarque.**

Pour montrer que les sous-espaces vectoriels  $F$  et  $G$  sont supplémentaires, il suffit de montrer que  $F \cap G = \{\vec{0}\}$  et  $\dim F + \dim G = \dim E$ .

**Théorème.**

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie. Si  $F$  et  $G$  sont des sous-espaces vectoriels alors

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).$$

**Preuve.**

Soit  $p = \dim F$ ,  $q = \dim G$  et  $k = \dim(F \cap G)$ . Soit  $(e_1, \dots, e_k)$  une base de  $F \cap G$ . On a  $F \cap G \subset F$  donc on peut appliquer la proposition de la page précédente à l'espace vectoriel  $F$  et à son sous-espace vectoriel  $F \cap G$  : on peut compléter la base de  $F \cap G$  en une base de  $F$ , qu'on note  $(e_1, \dots, e_p)$ . Soit  $F' = \text{Vect}(e_{k+1}, \dots, e_p)$ . Les sous-espaces vectoriels  $F'$  et  $F \cap G$  sont supplémentaires dans l'espace vectoriel  $F$  (par un théorème du paragraphe 6), c'est-à-dire  $F' \oplus (F \cap G) = F$ . Par le théorème précédent on a donc

$$\dim F = \dim F' + \dim(F \cap G). \quad (1)$$

De même, on a  $F \cap G \subset G$  donc on peut compléter la base de  $F \cap G$  en une base de  $G$ , qu'on note  $(e_1, \dots, e_k, f_{k+1}, \dots, f_q)$ . On a

$$\begin{aligned} F + G &= \text{Vect}(e_1, \dots, e_k, \dots, e_p) + \text{Vect}(e_1, \dots, e_k, f_{k+1}, \dots, f_q) \\ &= \text{Vect}(e_1, \dots, e_k, \dots, e_p, f_{k+1}, \dots, f_q) \end{aligned}$$

(on remarque que les vecteurs  $e_1, \dots, e_k$  apparaissent dans les 2 familles) et

$$F' + G = \text{Vect}(e_{k+1}, \dots, e_p) + \text{Vect}(e_1, \dots, e_k, f_{k+1}, \dots, f_q) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p, f_{k+1}, \dots, f_q)$$

donc

$$F + G = F' + G. \quad (2)$$

Montrons que  $F'$  et  $G$  sont en somme directe. Soit  $u \in F' \cap G$ . Alors  $u \in F \cap G$  (car  $F' \subset F$ ) et  $u \in F'$ . Or  $(F \cap G) \cap F' = \{\vec{0}\}$  car ces sous-espaces sont en somme directe donc  $u = \vec{0}$ . On en déduit que  $F' \cap G = \{\vec{0}\}$ , donc  $F'$  et  $G$  sont en somme directe. Par le théorème précédent, on a donc

$$\dim(F' \oplus G) = \dim F' + \dim G \quad (3)$$

Par (2) et (3) on a  $F' \oplus G = F + G$  et  $\dim(F + G) = \dim(F' \oplus G) = \dim F' + \dim G$ . De plus, par (1) on a  $\dim F' = \dim F - \dim(F \cap G)$ , on en conclut que

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).$$

### 3.8 Différentes façons de définir un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}^n$

#### a) Définitions

Un sous-espace vectoriel  $F$  de  $\mathbf{K}^n$  peut être défini de plusieurs façons.

##### • Système d'équations cartésiennes :

$F$  est défini comme étant l'ensemble des vecteurs qui vérifient certaines équations.

**Exemple.** Soit  $F$  l'ensemble des vecteurs  $(x, y, z)$  de  $\mathbf{R}^3$  tels que  $\begin{cases} x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

##### • Système d'équations paramétriques :

Si  $(v_1, \dots, v_k)$  est une base de  $F$  alors  $F = \{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k \mid \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbf{K}\}$  et le nombre de paramètres est égal à la dimension de  $F$ .

**Exemple.** Soit  $F = \text{Vect}\{(1, 0, 0), (0, 1, 2)\}$ . On peut écrire  $F = \{(\lambda, \mu, 2\mu) \in \mathbf{R}^3 \mid \lambda, \mu \in \mathbf{R}\}$  car  $\lambda(1, 0, 0) + \mu(0, 1, 2) = (\lambda, \mu, 2\mu)$ .

La description du sous-espace vectoriel  $F$  par un système d'équations cartésiennes permet de tester facilement si un vecteur donné appartient à  $F$ .

La description du sous-espace vectoriel  $F$  par un système d'équations paramétriques permet de trouver rapidement des vecteurs appartenant à  $F$ .

Il est important de savoir passer d'une description à une autre.

Les méthodes que nous allons exposer pour  $\mathbf{K}^n$  peuvent être appliquées à un espace vectoriel  $E$  de dimension finie  $n$  en choisissant une base  $(e_1, \dots, e_n)$  et en écrivant les coordonnées des vecteurs dans cette base.

**Exemple.**  $(1, X, X^2)$  est une base de  $\mathbf{R}_2[X]$ . Les polynômes  $X - 3$  et  $1 + X^2$  ont pour coordonnées dans cette base  $(-3, 1, 0)$  et  $(1, 0, 1)$ .

#### b) Méthode pour obtenir une base à partir d'un système d'équations cartésiennes

**Exemple.** Soit  $F$  le sous-espace vectoriel de  $\mathbf{R}^4$  d'équations cartésiennes  $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + 2y + 2z - t = 0 \end{cases}$

Systèmes équivalents :  $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ y + 3z - t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = z \\ y = -3z + t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4z - t \\ y = -3z + t \end{cases}$

(les inconnues principales sont  $x$  et  $y$ ).

Donc  $(x, y, z, t) = (4z - t, -3z + t, z, t) = (4z, -3z, z, 0) + (-t, t, 0, t) = z(4, -3, 1, 0) + t(-1, 1, 0, 1)$ .  
 Soit  $v_1 = (4, -3, 1, 0)$  et  $v_2 = (-1, 1, 0, 1)$ . Ce qui précède montre que  $F = \text{Vect}(v_1, v_2)$ . De plus  $(v_1, v_2)$  est libre car si  $zv_1 + tv_2 = \vec{0}$  alors  $(4z - t, -3z + t, z, t) = (0, 0, 0, 0)$  donc en regardant les deux dernières coordonnées on a immédiatement  $z = t = 0$ .

**Conclusion :**  $(v_1, v_2)$  est une base de  $F$ .

### Méthode générale.

On utilise le pivot de Gauss pour obtenir un système échelonné puis on exprime les inconnues principales en fonction des inconnues secondaires. Ensuite on remplace dans  $(x_1, \dots, x_n)$ , qu'on écrit en séparant les inconnues secondaires les unes des autres et en les mettant en facteur. Les vecteurs obtenus donnent une base de l'espace vectoriel.

### Remarque.

- Les vecteurs obtenus sont toujours linéairement indépendants, il n'est pas nécessaire de le vérifier.
- Si on a  $p$  équations cartésiennes et qu'on est dans  $\mathbf{R}^n$ , la dimension est en général  $n - p$  (on perd une dimension par équation). S'il y a des équations redondantes, on le verra en résolvant le système.

### c) Méthode pour obtenir une base à partir d'une famille génératrice finie

Soit  $F = \text{Vect}(v_1, v_2, \dots, v_k)$ . On ne change pas le sous-espace engendré par  $v_1, v_2, \dots, v_k$

- en échangeant deux vecteurs,
- en multipliant un des vecteurs par  $\lambda \neq 0$ ,
- en remplaçant un des vecteurs  $v_i$  par  $v_i - \lambda v_j$  avec  $\lambda \in \mathbf{K}$  et  $j \neq i$ .

Si on écrit en colonnes les coordonnées des vecteurs  $v_1, \dots, v_k$  dans une matrice  $A$ , ces règles permettent d'appliquer la méthode du pivot de Gauss aux colonnes de  $A$  et d'en déduire une base de  $F$ .

### Exemple 1.

$$v_1 = (1, 2), v_2 = (-2, -2), v_3 = (1, 3), v_4 = (0, 3). A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Remplaçons la colonne  $C_2$  par  $C_2 + 2C_1$  et la colonne  $C_3$  par  $C_3 - C_1$  :  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

$$C_2 \leftarrow \frac{1}{2}C_2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} C_3 \leftarrow C_3 - C_2 \\ C_4 \leftarrow C_4 - 3C_2 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi  $\text{Vect}\{v_1, v_2, v_3, v_4\} = \text{Vect}\{(1, 2), (0, 1)\}$ . De plus  $(1, 2)$  et  $(0, 1)$  sont linéairement indépendants :

$$\lambda(1, 2) + \mu(0, 1) = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ 2\lambda + \mu = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda = \mu = 0$$

**Conclusion :**  $(1, 2), (0, 1)$  forment une base de  $\text{Vect}\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ .

**Exemple 2.**  $F = \text{Vect}(v_1, v_2, v_3)$  avec  $v_1 = (1, 0, 0)$ ,  $v_2 = (1, 1, 2)$ ,  $v_3 = (2, 0, 3)$ .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \left\{ \begin{array}{l} C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - 2C_1 \end{array} \right. \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

On en déduit que  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 2)$ ,  $(0, 0, 3)$  forment une base de  $F$ .

**Remarque.** Cette méthode donne toujours des vecteurs linéairement indépendants car le système est échelonné. Il est donc inutile de le vérifier.

On a donc  $\dim F = 3$ . Comme  $(v_1, v_2, v_3)$  est une famille génératrice de 3 éléments, on en déduit que c'est une base.

### Méthode générale.

Soit  $v_1, \dots, v_p$  des vecteurs de  $\mathbf{K}^n$ ,  $A$  la matrice de cette famille de vecteurs et  $F = \text{Vect}(v_1, \dots, v_p)$ . En appliquant la méthode du pivot de Gauss aux colonnes de  $A$ , on obtient une matrice de la forme

$$A' = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ * & * & 0 & & 0 & 0 \\ * & * & * & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ * & * & * & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit  $r$  le nombre de colonnes non nulles. Les vecteurs correspondant aux colonnes non nulles de  $A'$  forment une base de  $F$ . De plus, si on n'a pas permuté les colonnes, alors  $v_1, \dots, v_r$  sont linéairement indépendants donc ils forment également une base de  $F$ .

On a  $\dim F = r$ . De plus,  $r$  est le rang des colonnes de  $A$ , autrement dit  $r = \text{rang}({}^tA)$ .

**Définition.** Le rang de  $(v_1, \dots, v_p)$  est la dimension de  $\text{Vect}(v_1, \dots, v_p)$ .

**Théorème.** Soit  $A$  la matrice des vecteurs  $(v_1, \dots, v_p)$ . Le rang de  $(v_1, \dots, v_p)$  est égal au rang de  ${}^tA$ .

### d) Méthode pour obtenir un système d'équations cartésiennes à partir d'une base

**Exemple.** Soit  $v_1 = (1, 1, 2, 1)$ ,  $v_2 = (2, 1, 3, 4)$  et  $F = \text{Vect}(v_1, v_2)$ .

Le vecteur  $u = (x, y, z, t)$  appartient à  $F$  si et seulement si  $\text{Vect}(v_1, v_2, u) = \text{Vect}(v_1, v_2)$ . Appliquons la méthode précédente aux vecteurs  $v_1, v_2, u$ .

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & x \\ 1 & 1 & y \\ 2 & 3 & z \\ 1 & 4 & t \end{pmatrix} \quad \left\{ \begin{array}{l} C_2 - 2C_1 \\ C_3 - xC_1 \end{array} \right. \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & y-x \\ 2 & -1 & z-2x \\ 1 & 2 & t-x \end{pmatrix} \quad C_3 + (y-x)C_2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & z-y-x \\ 1 & 2 & t+2y-3x \end{pmatrix}$$

Le vecteur  $u$  appartient à  $\text{Vect}(v_1, v_2)$  si et seulement si la dernière colonne est nulle, autrement dit si  $z - y - x = 0$  et  $t + 2y - 3x = 0$ .

**Conclusion :**  $F$  a pour système d'équations cartésiennes  $\begin{cases} z - y - x = 0 \\ t + 2y - 3x = 0 \end{cases}$

### Méthode générale.

Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $\mathbf{K}^n$  et  $(v_1, \dots, v_p)$  une base de  $F$ . Soit  $u = (x_1, \dots, x_n)$ .

On écrit la matrice des vecteurs  $(v_1, \dots, v_p, u)$  et on applique l'algorithme du paragraphe c) (pivot de Gauss sur les colonnes). On obtient une matrice échelonnée.

Le vecteur  $u$  appartient à  $F$  si et seulement si tous les coefficients de la dernière colonne sont nuls. Ces différentes conditions (" $\dots = 0$ ") donnent le système d'équations cartésiennes de  $F$ .

**Remarque.** Si  $F = \text{Vect}(v_1, \dots, v_p)$  on peut

- soit commencer par chercher une base de  $F$  puis chercher les équations cartésiennes de  $F$ .
- soit directement appliquer l'algorithme aux vecteurs  $(v_1, \dots, v_p, u)$ .

**Exemple.**  $v_1 = (1, 1), v_2 = (2, 2), F = \text{Vect}(v_1, v_2)$ .  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & x \\ 1 & 2 & y \end{pmatrix}$  donne  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & y - x \end{pmatrix}$

On en déduit que  $(1, 1)$  est une base de  $F$  et que l'équation cartésienne de  $F$  est  $y - x = 0$ .

### e) Combinaisons linéaires et systèmes linéaires

Soit  $v_1, \dots, v_p$  des vecteurs de  $\mathbf{K}^n$ . Soit  $V_i$  la matrice colonne contenant les coordonnées de  $v_i$ . Soit  $A \in M_{n,p}(\mathbf{K})$  la matrice dont les colonnes sont  $V_1, \dots, V_p$ ; c'est la **matrice de la famille de vecteurs**.

**Exemple.**  $v_1 = (1, 0), v_2 = (2, 1), v_3 = (1, -1)$ .

Alors  $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, V_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  (écriture des vecteurs sous forme de colonne)

et  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$  (matrice de la famille de vecteurs).

Soit  $b$  un vecteur de  $\mathbf{K}^n$  et  $B$  la matrice colonne correspondante. Soit  $X = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix}$ .

L'équation matricielle  $AX = B$  peut s'écrire  $\lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \dots + \lambda_p V_p = B$ , ce qui correspond à la combinaison linéaire  $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_p v_p = b$ .

### f) Autre méthode pour rechercher une sous-famille libre d'une famille génératrice finie

**Propriété.**  $(v_1, \dots, v_p)$  est libre si et seulement si  $AX = 0$  n'a qu'une seule solution (solution nulle).

**Exemple.**

$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, V_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}, V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, V_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ .  $aV_1 + bV_2 + cV_3 + dV_4 = 0$  est équivalent à

$$\begin{cases} a & -2b & +c & & = & 0 \\ 2a & -2b & +3c & +3d & = & 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a & -2b & +c & & = & 0 \\ & 2b & +c & +3d & = & 0 \end{cases} \quad (L2 - 2L1)$$

Système échelonné d'inconnues principales  $a, b$ .

En prenant  $c = 0$  et  $d = 0$  (inconnues secondaires) on obtient le système triangulaire

$$\begin{cases} a & -2b & = & 0 \\ & 2b & = & 0 \end{cases}$$

dont la seule solution est  $a = b = 0$ . Comme ce système est équivalent à  $aV_1 + bV_2 = 0$ , les vecteurs  $V_1$  et  $V_2$  sont linéairement indépendants.

En prenant  $c = 1, d = 0$  on obtient  $a = -2, b = -\frac{1}{2}$  donc  $-2V_1 - \frac{1}{2}V_2 + V_3 = 0$ , soit  $V_3 = 2V_1 + \frac{1}{2}V_2$ .  
Donc  $V_3 \in \text{Vect}(V_1, V_2)$ .

En prenant  $c = 0, d = 1$  on obtient  $a = -\frac{3}{2}, b = -\frac{3}{2}$  donc  $V_4 = \frac{3}{2}V_1 + \frac{3}{2}V_2$ . Donc  $V_4 \in \text{Vect}(V_1, V_2)$ .

On en déduit que la famille  $(V_1, V_2)$  engendre  $\text{Vect}(V_1, V_2, V_3, V_4)$ .

**Conclusion :**  $(V_1, V_2)$  est une base de  $\text{Vect}(V_1, V_2, V_3, V_4)$ .

Les vecteurs correspondant aux inconnues principales forment toujours une base du sous-espace, il n'est pas nécessaire de le vérifier.

### Méthode générale.

On considère l'équation vectorielle  $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_p v_p = \vec{0}$ , qui est équivalente au système linéaire  $AX = 0$ . Le pivot de Gauss donne un système échelonné avec  $r$  inconnues principales (où  $r = \text{rang}(A)$ ) et  $p - r$  inconnues secondaires.

- Les inconnues principales donnent  $r$  vecteurs qui forment une base de  $\text{Vect}(v_1, \dots, v_p)$ .
- Si pour chaque inconnue secondaire  $\lambda_i$  on prend  $\lambda_i = 1$  et on donne la valeur 0 aux autres inconnues secondaires alors on trouve les relations de dépendance entre les vecteurs  $(v_1, \dots, v_p)$ .

**Théorème.** Soit  $A$  la matrice des vecteurs  $(v_1, \dots, v_p)$ . Le rang de  $(v_1, \dots, v_p)$  est égal au rang de  $A$ .

**Théorème.** Soit  $A \in M_{n,p}(\mathbf{K})$ . Le rang de  $A$  est égal au rang de  ${}^tA$ .

On a vu deux méthodes pour trouver une base.

- Avantage de la 1ère méthode : obtenir une base avec des vecteurs plus simples.
- Avantage de la 2ème méthode : trouver les relations de dépendance entre les vecteurs.

### g) Autre méthode pour passer d'une base à un système d'équations cartésiennes

#### Exemple.

Soit  $v_1 = (1, 1, 0)$ ,  $v_2 = (1, 2, 3)$  et  $F = \text{Vect}(v_1, v_2)$ . On peut vérifier que ces deux vecteurs sont linéairement indépendants, donc ils forment une base de  $F$ .

Le vecteur  $b = (x, y, z)$  appartient à  $F$  si et seulement s'il existe  $\lambda$  et  $\mu$  tels que  $\lambda v_1 + \mu v_2 = b$ , ce qui revient à résoudre le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} \lambda + \mu = x \\ \lambda + 2\mu = y \\ 3\mu = z \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda + \mu = x \\ \mu = y - x \\ 3\mu = z \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda + \mu = x \\ \mu = y - x \\ 0 = z - 3y + 3x \end{cases}$$

Si  $z - 3y + 3x \neq 0$ , il n'y a pas de solution.

Si  $z - 3y + 3x = 0$ , on obtient un système triangulaire, il y a donc une unique solution.

**Conclusion :**  $(x, y, z) \in F \iff z - 3y + 3x = 0$ . Donc  $F$  a pour équation cartésienne  $z - 3y + 3x = 0$ .

### Méthode générale.

Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $\mathbf{K}^n$  et  $(v_1, \dots, v_p)$  une base de  $F$ .

On considère un vecteur  $u = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{K}^n$  et on applique la méthode du pivot de Gauss au système linéaire  $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p = u$ . On obtient une ou plusieurs relations de compatibilité. Ces relations donnent le système d'équations cartésiennes de  $F$ .

### Remarque.

- Il n'est pas nécessaire de résoudre complètement le système, on se contente d'obtenir un système triangulaire suivi de relations "0 = ..."
- Si  $F = \text{Vect}(v_1, \dots, v_p)$  on commence par extraire une base de la famille génératrice  $(v_1, \dots, v_p)$ .

## 4 Applications linéaires

### 4.1 Définition et propriétés élémentaires

Soit  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels sur  $\mathbf{K}$ .

**Définition.** Une **application linéaire** de  $E$  dans  $F$  est une application  $f: E \rightarrow F$  telle que pour tous vecteurs  $u, v \in E$  et tout scalaire  $\lambda \in \mathbf{K}$ ,

- $f(u + v) = f(u) + f(v)$ ,
- $f(\lambda u) = \lambda f(u)$ .

Si  $F = \mathbf{K}$  on dit que  $f$  est une **forme linéaire**. Si  $F = E$ ,  $f$  est appelée un **endomorphisme**.

Pour montrer que  $f$  est une application linéaire, il suffit de vérifier que

$$f(u + \lambda v) = f(u) + \lambda f(v) \text{ pour tous } u, v \in E, \lambda \in \mathbf{K}.$$

**Propriétés.** Si  $f: E \rightarrow F$  est une application linéaire alors

- $f(\vec{0}) = \vec{0}$ ,
- $f(\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n) = \lambda_1 f(u_1) + \dots + \lambda_n f(u_n)$ .

**Preuve.**

- Soit  $\lambda = 0$  et  $u \in E$ . On a  $f(\lambda u) = \lambda f(u)$ . Or  $\lambda u = \vec{0}_E$  et  $\lambda f(u) = \vec{0}_F$ , donc  $f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$ .

- On montre par récurrence sur  $n$  la propriété suivante :

$$\forall u_1, \dots, u_n \in E, \forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{K}, \text{ on a } f(\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n) = \lambda_1 f(u_1) + \dots + \lambda_n f(u_n).$$

– Pour  $n = 1$  on a  $f(\lambda_1 u_1) = \lambda_1 f(u_1)$  par définition.

– On suppose que le résultat est vrai au rang  $n$ . On pose  $v = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n$  et  $w = \lambda_{n+1} u_{n+1}$ . Alors  $f(\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n + \lambda_{n+1} u_{n+1}) = f(v + w) = f(v) + f(w)$ . Par hypothèse de récurrence  $f(v) = \lambda_1 f(u_1) + \dots + \lambda_n f(u_n)$  et par définition  $f(w) = \lambda_{n+1} f(u_{n+1})$ . Donc

$$f(\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n + \lambda_{n+1} u_{n+1}) = \lambda_1 f(u_1) + \dots + \lambda_n f(u_n) + \lambda_{n+1} f(u_{n+1}),$$

ce qui est la propriété de récurrence au rang  $n + 1$ .

– Conclusion : la propriété de récurrence est vraie pour tout  $n$ .

**Exemples.**

- Soit  $f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$  définie par  $f(x, y, z) = (2x - 3y, z)$ . Si  $u = (x, y, z)$ ,  $v = (x', y', z')$  et  $\lambda \in \mathbf{R}$  alors  $u + \lambda v = (x + \lambda x', y + \lambda y', z + \lambda z')$  et

$$f(u + \lambda v) = (2(x + \lambda x') - 3(y + \lambda y'), z + \lambda z') = (2x - 3y, z) + \lambda(2x' - 3y', z') = f(u) + \lambda f(v)$$

donc  $f$  est une application linéaire.

- Soit  $\theta$  un réel et  $R_\theta: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$  l'application définie par  $R_\theta(z) = e^{i\theta} z$ . Si  $z = \rho e^{i\alpha}$  alors  $R_\theta(z) = \rho e^{i(\alpha+\theta)}$  :  $R_\theta$  est la rotation d'angle  $\theta$ . C'est un endomorphisme du  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel  $\mathbf{C}$  car si  $z, z' \in \mathbf{C}$  et  $\lambda \in \mathbf{R}$  alors  $R_\theta(z + \lambda z') = e^{i\theta}(z + \lambda z') = e^{i\theta} z + \lambda e^{i\theta} z' = R_\theta(z) + \lambda R_\theta(z')$ .

**Remarque.**  $R_\theta$  est aussi un endomorphisme de  $\mathbf{C}$  vu comme un  $\mathbf{C}$ -espace vectoriel.



• Soit  $E$  l'ensemble des fonctions de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{R}$  et  $x_0 \in \mathbf{R}$ . On définit  $\varphi_{x_0}: E \rightarrow \mathbf{R}$  par  $\varphi(f) = f(x_0)$  (évaluation au point  $x_0$ ). C'est une forme linéaire. car pour toutes fonctions  $f, g \in E$  et  $\lambda \in \mathbf{R}$  on a  $\varphi(f + \lambda g) = (f + \lambda g)(x_0) = f(x_0) + \lambda g(x_0) = \varphi(f) + \lambda \varphi(g)$ .

### Image d'une base.

Soit  $f: E \rightarrow F$  une application linéaire et  $(e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ . On note  $u_i = f(e_i)$  pour  $i = 1, \dots, n$ . Soit  $v$  un vecteur de  $E$ , qu'on décompose dans la base de  $E$  :  $v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ . Alors  $f(v) = x_1 u_1 + \dots + x_n u_n$ .

**Propriété.** Si  $E$  est de dimension finie, une application linéaire est définie de façon unique si on connaît les images des vecteurs d'une base de  $E$ .

Réciproquement, soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$  et  $u_1, \dots, u_n$  des vecteurs de  $F$ . On définit l'application  $f: E \rightarrow F$  par  $f(v) = x_1 u_1 + \dots + x_n u_n$  pour tout  $v \in E$ , où  $(x_1, \dots, x_n)$  sont les coordonnées de  $v$  dans la base  $(e_1, \dots, e_n)$ . Alors  $f$  est une application linéaire.

**Preuve.** Soit  $u, v \in E$  et  $\lambda \in \mathbf{K}$ . Soit  $(x_1, \dots, x_n)$  les coordonnées de  $u$  et  $(y_1, \dots, y_n)$  les coordonnées de  $v$  dans la base  $(e_1, \dots, e_n)$ . Alors les coordonnées de  $u + \lambda v$  sont  $(x_1 + \lambda y_1, \dots, x_n + \lambda y_n)$  donc  $f(u + \lambda v) = (x_1 + \lambda y_1)u_1 + \dots + (x_n + \lambda y_n)u_n = x_1 u_1 + \dots + x_n u_n + \lambda(y_1 u_1 + \dots + y_n u_n)$ . Donc  $f(u + \lambda v) = f(u) + \lambda f(v)$  et  $f$  est une application linéaire.

**Cas particulier.** Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  la base canonique de  $\mathbf{K}^n$ . Si  $f: \mathbf{K}^n \rightarrow \mathbf{K}$  est une forme linéaire, alors  $f(x_1, \dots, x_n) = x_1 f(e_1) + x_2 f(e_2) + \dots + x_n f(e_n)$ , où  $f(e_1), \dots, f(e_n)$  sont des scalaires.

**Propriété.** L'application  $f: \mathbf{K}^n \rightarrow \mathbf{K}$  est une forme linéaire si et seulement s'il existe  $a_1, \dots, a_n \in \mathbf{K}$  tels que  $f(x_1, \dots, x_n) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n$ .

**Exemple.**  $f(x, y, z) = 17x - \frac{3}{5}y + z$  est une forme linéaire de  $\mathbf{R}^3$ .

### Composantes.

**Définition.** Si  $f$  est une application de  $E$  dans  $\mathbf{K}^n$ , les **composantes** de  $f$  sont les applications  $f_1, f_2, \dots, f_n$  de  $E$  dans  $\mathbf{K}$  correspondant aux coordonnées dans  $\mathbf{K}^n$  : pour tout  $u \in E$ ,  $f(u) = (f_1(u), f_2(u), \dots, f_n(u))$ .

**Proposition.** L'application  $f: E \rightarrow \mathbf{K}^n$  est linéaire si et seulement si ses composantes  $f_1, f_2, \dots, f_n$  sont des formes linéaires.

**Exemple.** L'application  $f: \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^2$  définie par  $f(x, y, z, t) = (x + 2y + 3z + 4t, 17x - y - \frac{1}{3}t)$  est une application linéaire car par ce qui précède  $(x, y, z, t) \mapsto x + 2y + 3z + 4t$  et  $(x, y, z, t) \mapsto 17x - y - \frac{1}{3}t$  sont des formes linéaires.

### Opérations sur les applications linéaires.

On définit les applications  $f + g: E \rightarrow F$  et  $\lambda f: E \rightarrow F$  par  $(f + g)(u) = f(u) + g(u)$  et  $(\lambda f)(u) = \lambda f(u)$  pour tout  $u \in E$ .

### Théorème.

- Si  $f$  et  $g$  sont des applications linéaires de  $E$  dans  $F$  et  $\lambda \in \mathbf{K}$  alors  $f + g$  et  $\lambda f$  sont des applications linéaires.
- Si  $f: E \rightarrow F$  et  $h: F \rightarrow G$  sont des applications linéaires alors  $h \circ f$  est une application linéaire de  $E$  dans  $G$ .

**Preuve.** Soit  $u, v \in E$  et  $\mu \in \mathbf{K}$ .

- L'application  $f + g$  va de  $E$  dans  $F$ . Elle est linéaire car

$$(f + g)(u + \mu v) = f(u + \mu v) + g(u + \mu v) = f(u) + \mu f(v) + g(u) + \mu g(v) = (f + g)(u) + \mu(f + g)(v).$$

• Comme  $f$  va de  $E$  dans  $F$  et que  $h$  va de  $F$  dans  $H$ , l'application  $h \circ f$  est bien définie et va de  $E$  dans  $G$ . Notons  $u' = f(u)$  et  $v' = f(v)$ . L'application  $h \circ f$  est linéaire car  $h \circ f(u + \mu v) = h(f(u) + \mu f(v)) = h(u' + \mu v') = h(u') + \mu h(v') = h \circ f(u) + \mu h \circ f(v)$ .

## 4.2 Applications linéaires particulières

L'application **identité de  $E$**  est notée  $\text{Id}_E$ ; elle est définie par  $\text{Id}_E(u) = u$  pour tout  $u \in E$ . C'est une application linéaire de  $E$  dans  $E$ .

Soit  $\lambda \in \mathbf{K}$ . L'**homothétie de rapport  $\lambda$**  est l'application linéaire  $f: E \rightarrow E$  définie par  $f(u) = \lambda u$  pour tout  $u \in E$ . On a  $f = \lambda \text{Id}_E$ .

Soit  $E_1$  et  $E_2$  deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans  $E : E = E_1 \oplus E_2$ . On rappelle que tout vecteur  $u \in E$  se décompose de façon unique  $u = u_1 + u_2$  avec  $u_1 \in E_1$  et  $u_2 \in E_2$ .

### Projection.

On définit l'application  $p: E \rightarrow E$  par  $p(u) = u_1$  pour tout  $x \in E$ . C'est une application linéaire, appelée la **projection sur  $E_1$  parallèlement à  $E_2$** .

**Propriété.**  $p(u) = u \Leftrightarrow u \in E_1$  et  $p(u) = \vec{0} \Leftrightarrow u \in E_2$ .

**Preuve.** Soit  $u \in E$ . On écrit  $u = u_1 + u_2$  avec  $u_1 \in E_1$  et  $u_2 \in E_2$  et on a  $p(u) = u_1$ . Si  $p(u) = u$  alors  $u = u_1 \in E_1$ . Si  $p(u) = \vec{0}$  alors  $u_1 = \vec{0}$  et  $u = u_2 \in E_2$ . Ceci démontre les deux implications  $p(u) = u \Rightarrow u \in E_1$  et  $p(u) = \vec{0} \Rightarrow u \in E_2$ .

Réciproquement, si  $u \in E_1$  alors la décomposition de  $u$  selon  $E_1 \oplus E_2$  est  $u + \vec{0}$ , donc  $p(u) = u$ . Si  $u \in E_2$  alors la décomposition de  $u$  selon  $E_1 \oplus E_2$  est  $\vec{0} + u$ , donc  $p(u) = \vec{0}$ . Ceci démontre les deux implications  $u \in E_1 \Rightarrow p(u)$  et  $u \in E_2 \Rightarrow p(u) = \vec{0}$ . La preuve est terminée.

### Symétrie.

On définit l'application  $s: E \rightarrow E$  par  $s(u) = u_1 - u_2$  pour tout  $u \in E$ . C'est une application linéaire, appelée la **symétrie par rapport à  $E_1$  parallèlement à  $E_2$** .

**Propriété.**  $s(u) = u \Leftrightarrow u \in E_1$  et  $s(u) = -u \Leftrightarrow u \in E_2$ .

**Preuve.** La preuve ressemble à la précédente.

Soit  $u \in E$ . On écrit  $u = u_1 + u_2$  avec  $u_1 \in E_1$  et  $u_2 \in E_2$  et on a  $s(u) = u_1 - u_2$ . Si  $s(u) = u$  alors  $u_1 + u_2 = u_1 - u_2$  donc  $2u_2 = \vec{0}$ , donc  $u_2 = \vec{0}$  et  $u = u_1 \in E_1$ . Si  $s(u) = -u$  alors  $u_1 + u_2 = -(u_1 - u_2)$  donc  $2u_1 = \vec{0}$ , donc  $u_1 = \vec{0}$  et  $u = u_2 \in E_2$ . On a montré les deux implications " $\Rightarrow$ ".

Réciproquement, si  $u \in E_1$  alors la décomposition de  $u$  selon  $E_1 \oplus E_2$  est  $u + \vec{0}$ , donc  $s(u) = u$ . Si  $u \in E_2$  alors la décomposition de  $u$  selon  $E_1 \oplus E_2$  est  $\vec{0} + u$ , donc  $s(u) = -u$ . On a montré les deux implications " $\Leftarrow$ ". Ceci termine la preuve.

## 4.3 Matrice d'une application linéaire

On considère deux espaces vectoriels  $E$  et  $F$  de dimension finie,  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$  et  $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_p)$  une base de  $F$ .

**Définition.** Soit  $f: E \rightarrow F$  une application linéaire. La **matrice de  $f$  dans les bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$**  est la matrice de taille  $n \times p$  dont les coefficients de la  $j$ -ième colonne sont les coordonnées du vecteur  $f(e_j)$  dans la base  $(e'_1, \dots, e'_p)$ .

Si  $F = E$  et  $\mathcal{B}' = \mathcal{B}$  alors cette matrice est appelée la **matrice de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}$** .

Quand  $E = \mathbf{R}^n$  et  $F = \mathbf{R}^p$  on utilise souvent les bases canoniques de  $E$  et  $F$ .

**Exemple 1.** Soit  $f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$  définie par  $f(x, y, z) = (2x - 3y + z, x + z)$ .

Base canonique de  $\mathbf{R}^3$  :  $(e_1, e_2, e_3)$  avec  $e_1 = (1, 0, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1, 0)$ ,  $e_3 = (0, 0, 1)$ .

Base canonique de  $\mathbf{R}^2$  :  $(e'_1, e'_2)$  avec  $e'_1 = (1, 0)$  et  $e'_2 = (0, 1, 0)$ .

On a :  $f(e_1) = (2, 1) = 2e'_1 + e'_2$ ,  $f(e_2) = (-3, 0) = -3e'_1 + 0e'_2$ ,  $f(e_3) = (1, 1) = e'_1 + e'_2$ ,  
donc la matrice de  $f$  dans les bases canoniques de  $\mathbf{R}^3$  et  $\mathbf{R}^2$  est  $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

**Exemple 2.** Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$  et  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base quelconque. La matrice de l'application identité dans la base  $\mathcal{B}$  est la matrice identité  $I_n$  car  $\text{Id}_E(e_i) = e_i$  pour  $i = 1, \dots, n$ .

**Exemple 3.** Soit  $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  l'application linéaire telle que  $f(x, y) = (\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2})$ . Soit  $u_1 = (1, 1)$ ,  $u_2 = (1, -1)$ ,  $\mathcal{B}$  la base canonique de  $\mathbf{R}^2$  et  $\mathcal{B}' = (u_1, u_2)$ ;  $\mathcal{B}'$  est aussi une base de  $\mathbf{R}^2$ .

La matrice de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}$  est  $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ .

$f(u_1) = (1, 1) = u_1 = u_1 + 0u_2$  et  $f(u_2) = (0, 0) = 0u_1 + 0u_2$  donc les coordonnées de  $f(u_1)$  dans la base  $(u_1, u_2)$  sont  $(1, 0)$  et les coordonnées de  $f(u_2)$  dans la base  $(u_1, u_2)$  sont  $(0, 0)$ . La matrice de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}'$  est  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

$f$  est la projection sur  $\mathbf{R}u_1$  parallèlement à  $\mathbf{R}u_2$  car ces deux applications coïncident sur la base  $(u_1, u_2)$ . C'est une base adaptée à la projection.

**Théorème.** Soit  $f: E \rightarrow F$  une application linéaire et soit  $A$  la matrice de  $f$  dans les bases  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  et  $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_p)$ . Soit  $u$  un vecteur de  $E$ , on note

$U = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  et  $V = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}$  où  $(x_1, \dots, x_n)$  sont les coordonnées de  $u$  dans la base  $\mathcal{B}$  et où  $(y_1, \dots, y_p)$  sont les coordonnées de  $v = f(u)$  dans la base  $\mathcal{B}'$ . Alors  $V = AU$ .

**Preuve.**

Soit  $C_1, \dots, C_n$  les colonnes de  $A$ . Par définition de  $A$ , les coefficients de  $C_i$  sont les coordonnées de  $f(e_i)$  dans la base  $\mathcal{B}'$ . On a vu dans le chapitre précédent que  $AU = x_1C_1 + x_2C_2 + \dots + x_nC_n$ . Donc les coefficients de la matrice colonne  $AU$  sont les coordonnées dans la base  $\mathcal{B}'$  du vecteur  $x_1f(e_1) + x_2f(e_2) + \dots + x_nf(e_n)$ .

Or  $u = x_1e_1 + \dots + x_ne_n$ , donc  $f(u) = x_1f(e_1) + x_2f(e_2) + \dots + x_nf(e_n)$ , autrement dit  $AU = V$ .

**Exemple.** Soit  $f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$  définie par  $f(x, y, z) = (2x - 3y + z, x + z)$ . Sa matrice dans les bases canoniques est  $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$  donc  $f(1, 2, 3) = (-1, 4)$ . De façon générale,  $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - 3y + z \\ x + z \end{pmatrix}$ .

**Théorème.**

• Soit  $f$  et  $g$  des applications linéaires de  $E$  dans  $F$  et  $\lambda \in \mathbf{K}$ . Si  $A$  est la matrice de  $f$  et si  $B$  est

la matrice de  $g$  dans les bases  $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ , alors  $A + B$  est la matrice de  $f + g$  dans ces bases et  $\lambda A$  est la matrice de  $\lambda f$ .

• Soit  $f: E \rightarrow F$  et  $g: F \rightarrow G$  des applications linéaires. Si  $A$  est la matrice de  $f$  dans les bases  $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$  et si  $B$  est la matrice de  $g$  dans les bases  $\mathcal{B}'$  et  $\mathcal{B}''$  alors  $BA$  est la matrice de  $g \circ f$  dans les bases  $\mathcal{B}, \mathcal{B}''$ .

**Preuve.**

• Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ . On note  $A_1, \dots, A_n$  les colonnes de  $A$  et  $B_1, \dots, B_n$  les colonnes de  $B$ . On a  $(f + g)(e_i) = f(e_i) + g(e_i)$ , donc la  $i$ -ième colonne de la matrice de  $f + g$  est  $A_i + B_i$ . On en déduit que la matrice de  $f + g$  dans les bases  $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$  est  $A + B$ . De même la matrice de  $\lambda f$  est  $\lambda A$  car  $(\lambda f)(e_i) = \lambda f(e_i)$ .

• Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ ,  $p = \dim F$  et  $q = \dim G$ . Soit  $u \in E$ , notons  $(x_1, \dots, x_n)$  les coordonnées de  $u$  dans la base  $\mathcal{B}$ ,  $(y_1, \dots, y_p)$  les coordonnées de  $v = f(u)$  dans la base  $\mathcal{B}'$  et  $(z_1, \dots, z_q)$  les coordonnées de  $g(v) = g \circ f(u)$  dans la base  $\mathcal{B}''$ . Notons  $X, Y, Z$  les matrices colonnes correspondantes. On a vu au théorème précédent que  $Y = AX$  et  $Z = BY$ . On a donc  $Z = B(AX) = (BA)X$ . Appliquons ce résultat pour  $u = e_i$  : on a  $x_i = 1$  et  $x_j = 0$  si  $j \neq i$  donc la matrice  $(BA)X$  est égale à la  $i$ -ième colonne de  $BA$ . Par définition  $Z$  est la matrice des coordonnées de  $g \circ f(u) = g \circ f(e_i)$  dans la base  $\mathcal{B}''$ . Comme  $Z = BAX$ , on en déduit que les colonnes de la matrice  $BA$  sont les coordonnées de  $(g \circ f(e_1), \dots, g \circ f(e_n))$  dans la base  $\mathcal{B}''$ , autrement dit  $BA$  est la matrice de  $g \circ f$  dans les bases  $\mathcal{B}, \mathcal{B}''$ .

## 4.4 Définitions : injection, surjection, bijection, isomorphisme

**Définition.**

Soit  $\varphi: X \rightarrow Y$  une application.

–  $\varphi$  est **injective** si deux éléments distincts ont des images distinctes, autrement dit un élément de  $Y$  a au plus un antécédent (éventuellement zéro), ou encore :  $\varphi(x) = \varphi(y) \Rightarrow x = y$ .

(C'est généralement cette dernière propriété qu'on utilise pour montrer l'injectivité.)

–  $\varphi$  est **surjective** si tout point de  $Y$  a au moins un antécédent (éventuellement plusieurs), ce qu'on peut écrire  $\varphi(X) = Y$ .

–  $\varphi$  est **bijective** si elle est injective et surjective, autrement dit tout élément de  $Y$  a un et un seul antécédent. Cela signifie exactement que  $\varphi$  est inversible.

**Exemple 1.**

$e: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  est injective. En effet, si  $e^x = e^y$  alors on peut prendre  $\ln$  de chaque côté (car  $e^x > 0$  et  $e^y > 0$ ) et on trouve  $x = y$ . Mais elle n'est pas surjective car  $\forall x \in \mathbf{R}, e^x > 0$  donc par exemple  $-1$  n'a pas d'antécédent (de même que tout point  $y \leq 0$ ).

**Exemple 2.**

Soit  $\varphi: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \varphi(x) = x + 3$ .  $\varphi$  est injective car si  $x + 3 = x' + 3$  alors  $x = x'$ .  $\varphi$  est surjective car si  $y \in \mathbf{R}$  alors  $\varphi(y - 3) = y$ . Donc  $\varphi$  est bijective.

Ceci revient à dire que dans l'équation  $y = \varphi(x)$  d'inconnue  $x$  il y a une et une seule solution  $x$  (qui dépend de  $y$ ). Ici  $x = y - 3$  et  $\varphi^{-1}(y) = y - 3$ .

**Définition.**

Soit  $E, F$  deux espaces vectoriels. Un **isomorphisme** de  $E$  sur  $F$  est une application linéaire  $f: E \rightarrow F$  qui est bijective.

**Théorème.**

Soit  $E, F$  deux espaces vectoriels. Si l'application  $f$  est un isomorphisme de  $E$  sur  $F$  alors  $f^{-1}$  est un isomorphisme de  $F$  sur  $E$

**Preuve.**

Puisque  $f: E \rightarrow F$  est une bijection, on sait que  $f^{-1}: F \rightarrow E$  existe et est une bijection. Il reste à montrer que c'est une application linéaire.

Soit  $v, v' \in F$  et  $\lambda \in \mathbf{K}$ . On pose  $u = f^{-1}(v)$  et  $u' = f^{-1}(v')$ , on a  $f(u) = v$  et  $f(u') = v'$ . Comme  $f$  est linéaire, on a  $f(u + \lambda u') = f(u) + \lambda f(u')$ , donc  $f(u + \lambda u') = v + \lambda v'$ . En prenant  $f^{-1}$ , on trouve  $u + \lambda u' = f^{-1}(v + \lambda v')$ , autrement dit  $f^{-1}(v) + \lambda f^{-1}(v') = f^{-1}(v + \lambda v')$ , ce qui prouve que  $f^{-1}$  est linéaire.

**Définition.**

On dit que les espaces vectoriels  $E$  et  $F$  sont **isomorphes** ou que  $E$  est **isomorphe** à  $F$  s'il existe un isomorphisme de  $E$  sur  $F$ .

**Exemple.**

Soit  $f: M_2(\mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{R}^4$ ,  $f \left( \begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix} \right) = (a, b, c, d)$ .  $f$  est une application linéaire et c'est une bijection, de bijection réciproque  $f^{-1}(a, b, c, d) = \left( \begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix} \right)$ . Donc  $M_2(\mathbf{R})$  et  $\mathbf{R}^4$  sont isomorphes.

## 4.5 Image d'un sous-espace vectoriel, noyau

Dans cette partie,  $E$  et  $F$  sont des espaces vectoriels sur  $\mathbf{K}$  et  $f: E \rightarrow F$  est une application linéaire.

**Définition.**

Si  $A$  est une partie de  $E$ , on note  $f(A) = \{f(x) \in F \mid x \in A\}$ .

**Théorème.**

Si  $G$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  alors  $f(G)$  est un sous-espace vectoriel de  $F$ .

**Preuve.**

On a  $\vec{0} \in G$  et  $f(\vec{0}) = \vec{0}$ , donc  $\vec{0} \in f(G)$  et  $f(G) \neq \emptyset$ .

Soit  $v, v' \in f(G)$  et  $\lambda \in \mathbf{K}$ . Par définition il existe  $u, u' \in G$  tels que  $f(u) = v$  et  $f(u') = v'$ . On a donc  $v + \lambda v' = f(u) + \lambda f(u') = f(u + \lambda u')$  car l'application  $f$  est linéaire. Or  $u + \lambda u' \in G$  car  $G$  est un sous-espace vectoriel, donc  $v + \lambda v' \in f(G)$ . L'ensemble  $f(G)$  est donc un sous-espace vectoriel de  $F$ .

**Définition.**

On appelle **image** de  $f$  l'ensemble  $f(E)$  et on le note  $\Im f$ . C'est un sous-espace vectoriel de  $F$ .

On appelle **noyau** de  $f$  l'ensemble des vecteurs  $u \in E$  tels que  $f(u) = \vec{0}$  et on le note  $\text{Ker } f$ . C'est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

**Preuve.**

Montrons que  $\text{Ker } f$  est un sous-espace vectoriel. On a  $f(\vec{0}) = \vec{0}$  donc  $\vec{0} \in \text{Ker } f$  et  $\text{Ker } f \neq \emptyset$ . Soit

$u, u' \in \text{Ker } f$  et  $\lambda \in \mathbf{K}$ . Par définition  $f(u) = \vec{0}$  et  $f(u') = \vec{0}$ , donc  $f(u + \lambda u') = f(u) + \lambda f(u') = \vec{0}$ , ce qui implique que  $u + \lambda u' \in \text{Ker } f$ . On en déduit que  $\text{Ker } f$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

**Théorème.**

L'application linéaire  $f$  est injective si et seulement si  $\text{Ker } f = \{\vec{0}\}$ .

**Preuve.**

Supposons que  $f$  est injective. Soit  $u \in \text{Ker } f$ . On a  $f(u) = \vec{0} = f(\vec{0})$ , donc par injectivité  $u = \vec{0}$ . Par conséquent  $\text{Ker } f = \{\vec{0}\}$ .

Réciproquement, supposons que  $\text{Ker } f = \{\vec{0}\}$ . Soit  $u, v \in E$  tels que  $f(u) = f(v)$ , autrement dit  $f(u) - f(v) = \vec{0}$ . Comme  $f$  est linéaire, on a  $f(u) - f(v) = f(u - v) = \vec{0}$ , donc  $u - v \in \text{Ker } f$ . On en déduit que  $u - v = \vec{0}$ , c'est-à-dire  $u = v$ . Par conséquent  $f$  est injective. Ceci termine la preuve.

Par définition,  $f$  est surjective si et seulement si  $\Im f = F$ .

On utilise souvent ces résultats sous la forme suivante :

**Théorème.**

L'application linéaire  $f$  est un isomorphisme si et seulement si  $\text{Ker } f = \{\vec{0}\}$  et  $\Im f = F$ .

**Théorème.**

Soit  $G$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . Si  $G$  est engendré par  $u_1, \dots, u_k$  alors  $f(G)$  est engendré par  $f(u_1), \dots, f(u_k)$ . En particulier  $\dim f(G) \leq \dim G$ .

Si  $E$  est de dimension finie,  $\dim \Im f \leq \dim E$ . La dimension de  $\Im f$  est appelée le **rang** de  $f$ .

**Preuve.**

Comme  $u_i \in G$  on a  $f(u_i) \in f(G)$ . Soit  $v \in f(G)$ . Par définition il existe  $u \in G$  tel que  $f(u) = v$ . Comme  $G = \text{Vect}(u_1, \dots, u_k)$ , il existe des scalaires  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  tels que  $u = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_k u_k$ . Par conséquent,  $v = f(\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_k u_k) = \lambda_1 f(u_1) + \dots + \lambda_k f(u_k)$ . Ceci montre que la famille  $(f(u_1), \dots, f(u_k))$  engendre  $f(G)$ .

Si  $\dim G = k$ , il existe  $(u_1, \dots, u_k)$  une base de  $G$ , donc  $f(G) = \text{Vect}(f(u_1), \dots, f(u_k))$  et  $\dim f(G) \leq k$ .

**Exemple.**

Il n'existe pas d'application linéaire surjective  $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$  car  $\dim \Im f \leq 2 < \dim \mathbf{R}^3$ .

**Théorème.**

Supposons que  $E$  est de dimension finie. Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$  et soit  $f: E \rightarrow F$  une application linéaire. L'application  $f$  est un isomorphisme si et seulement si  $(f(e_1), \dots, f(e_n))$  est une base de  $F$ .

En particulier, si  $f$  est un isomorphisme alors  $\dim E = \dim F$ .

**Preuve.**

Supposons que  $f$  est un isomorphisme et montrons que  $(f(e_1), \dots, f(e_n))$  est une base de  $F$ . L'application  $f$  est surjective donc  $\Im f = F$ . Comme  $(e_1, \dots, e_n)$  engendre  $E$ , le théorème précédent implique que la famille  $(f(e_1), \dots, f(e_n))$  engendre  $f(E) = F$ .

Soit  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  des scalaires tels que  $\lambda_1 f(e_1) + \dots + \lambda_n f(e_n) = \vec{0}$ . Par linéarité, on obtient que  $f(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n) = \vec{0}$ , et en prenant  $f^{-1}$  on trouve  $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = \vec{0}$ . Comme  $(e_1, \dots, e_n)$  est une famille libre de  $E$ , ceci implique que  $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ . Par conséquent,  $(f(e_1), \dots, f(e_n))$

est une famille libre de  $F$ .

La famille  $(f(e_1), \dots, f(e_n))$  est libre et génératrice dans  $F$ , donc c'est une base de  $F$ .

Réciproquement, supposons que  $(f(e_1), \dots, f(e_n))$  est une base de  $F$  et montrons que  $f$  est un isomorphisme. Le théorème précédent implique que  $(f(e_1), \dots, f(e_n))$  engendre  $\Im f$ ; comme c'est une famille génératrice de  $F$ , on obtient que  $\Im f = F$ , autrement dit  $f$  est surjective.

Soit  $u \in E$  et  $(x_1, \dots, x_n)$  ses coordonnées dans la base  $(e_1, \dots, e_n)$ . On a  $u = x_1e_1 + \dots + x_n e_n$  donc  $f(u) = x_1f(e_1) + \dots + x_nf(e_n)$ , autrement dit  $(x_1, \dots, x_n)$  sont les coordonnées de  $f(u)$  dans la base  $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ . Si  $f(u) = \vec{0}$  alors les coordonnées de  $f(u)$  sont nulles :  $x_1 = \dots = x_n = 0$ , donc on a aussi  $u = \vec{0}$ . Par conséquent,  $\text{Ker } f = \{\vec{0}\}$  et par un théorème vu précédemment  $f$  est injective.

L'application linéaire  $f$  est surjective et injective, donc c'est un isomorphisme.

### **Théorème.**

Supposons que  $E$  et  $F$  sont de dimension finie. Alors  $E$  et  $F$  sont isomorphes si et seulement si  $\dim E = \dim F$ .

### **Preuve.**

Soit  $n = \dim E$ . Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ . Supposons que  $E$  et  $F$  sont isomorphes : il existe un isomorphisme  $f: E \rightarrow F$ . Par le théorème précédent,  $(f(e_1), \dots, f(e_n))$  est une base de  $F$  donc  $\dim F = n$ .

Réciproquement, supposons que  $\dim F = n$ . Soit  $(u_1, \dots, u_n)$  une base de  $F$ . Nous avons vu qu'on peut définir une application linéaire  $f: E \rightarrow F$  en posant  $f(e_i) = u_i$  pour  $i = 1, \dots, n$ . Par le théorème précédent,  $f$  est un isomorphisme, autrement dit  $E$  et  $F$  sont isomorphes.

Le théorème suivant s'appelle également *théorème de la dimension* ou *théorème du rang*.

### **Théorème noyau-image.**

Si  $E$  est de dimension finie alors

$$\dim E = \dim \text{Ker } f + \dim \Im f.$$

### **Preuve.**

Puisque  $E$  est de dimension finie, le sous-espace vectoriel  $\text{Ker } f$  admet un supplémentaire dans  $E$ . Choisissons-en un et appelons-le  $G$ . Cela signifie que  $E = G + \text{Ker } f$  et  $G \cap \text{Ker } f = \{\vec{0}\}$ .

Soit  $g: G \rightarrow \Im f$  l'application définie par  $g(u) = f(u)$  pour tout  $u \in G$  (c'est une restriction de l'application  $f$ ). Calculons  $\text{Ker } g$ . Soit  $u \in G$  tel que  $g(u) = \vec{0}$ , autrement dit  $f(u) = \vec{0}$ . On a donc  $u \in G \cap \text{Ker } f$ , donc  $u = \vec{0}$ . Par conséquent  $\text{Ker } g = \{\vec{0}\}$  donc  $g$  est injective.

Soit  $v \in \Im f$ . Par définition il existe  $u \in E$  tel que  $f(u) = v$ . Puisque  $E = G + \text{Ker } f$ , il existe  $u_1 \in G$  et  $u_2 \in \text{Ker } f$  tels que  $u = u_1 + u_2$ . Alors

$$v = f(u) = f(u_1 + u_2) = f(u_1) + f(u_2) = f(u_1) + \vec{0} = g(u_1).$$

L'application  $g: G \rightarrow \Im f$  est donc surjective. Par conséquent  $g$  est un isomorphisme de  $G$  sur  $\Im f$ , donc  $\dim G = \dim \Im f$ . Enfin, puisque  $E = \text{Ker } f \oplus G$ , on a  $\dim E = \dim \text{Ker } f + \dim G$  donc  $\dim E = \dim \text{Ker } f + \dim \Im f$ . Ceci conclut la preuve.

### **Exemple 1.**

Soit  $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x_1, \dots, x_n) = a_1x_1 + \dots + a_nx_n$  avec  $a_1, \dots, a_n$  sont tous nuls. Si  $(e_1, \dots, e_n)$  est la base canonique de  $\mathbf{R}^n$ , on a  $f(e_i) = a_i$ . Donc  $\Im f \neq \{0\}$ . Par conséquent  $\dim \Im f \geq 1$  et comme

$\Im f$  est inclus dans  $\mathbf{R}$  qui est de dimension 1, on a  $\dim \Im f = 1$ . Par le théorème noyau-image, on en déduit  $\text{Ker } f$  est de dimension  $n - 1$ , autrement dit le sous-espace vectoriel d'équation cartésienne  $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0$  est de dimension  $n - 1$ .

**Exemple 2.**

Il n'existe pas d'application linéaire injective  $f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$  car  $\dim \Im f \leq \dim \mathbf{R}^2 = 2$  et comme  $\dim \text{Ker } f = \dim \mathbf{R}^3 - \dim \Im f$  on a  $\dim \text{Ker } f \geq 1$ .

**Théorème.**

Supposons que  $\dim E = \dim F$ . Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

- $f$  est injective,
- $f$  est surjective,
- $f$  est un isomorphisme.

En général, il est plus facile de montrer qu'une application est injective (en montrant  $\text{Ker } f = \{\vec{0}\}$ ).

**Preuve.**

On a les équivalences suivantes :

- $f$  injective  $\Leftrightarrow \text{Ker } f = \{\vec{0}\} \Leftrightarrow \dim \text{Ker } f = 0$ .
- $f$  surjective  $\Leftrightarrow \Im f = F \Leftrightarrow \dim \Im f = \dim F \Leftrightarrow \dim \Im f = \dim E$ .

Le théorème noyau-image nous donne que  $\dim E = \dim \text{Ker } f + \dim \Im f$  donc on a l'équivalence  $\dim \text{Ker } f = 0 \Leftrightarrow \dim \Im f = \dim E$ , autrement dit  $f$  est injective si et seulement si elle est surjective. Donc, si on suppose que  $f$  est injective ou surjective, elle est bijective. Et si on suppose que  $f$  est bijective, elle est évidemment injective et surjective.

**Exemple.**

Soit  $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ ,  $f(x, y) = (x + y, x - y)$ . Cherchons  $\text{Ker } f$ .  $f(x, y) = \vec{0}$  est équivalent à

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 0 \\ -2y = 0 \end{cases}$$

donc  $y = 0$  et  $x = 0$ . On a montré que  $\text{Ker } f = \{\vec{0}\}$  donc  $f$  est un isomorphisme (ici  $E = F = \mathbf{R}^2$  donc évidemment  $\dim E = \dim F$ ).

## 4.6 Matrice d'une application inversible

**Théorème.**

Soit  $E$  et  $E'$  des espaces vectoriels de même dimension  $n$ ,  $\mathcal{B}$  une base de  $E$  et  $\mathcal{B}'$  une base de  $E'$ . Soit  $f: E \rightarrow F$  une application linéaire et soit  $A$  sa matrice dans les bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$ . Alors l'application  $f$  est un isomorphisme si et seulement si la matrice  $A$  est inversible.

De plus, si  $f$  est un isomorphisme alors  $A^{-1}$  est la matrice de  $f^{-1}$  dans les bases  $\mathcal{B}'$  et  $\mathcal{B}$ .

**Preuve.** Supposons que  $f$  est un isomorphisme. Soit  $M$  la matrice de  $f^{-1}$  dans les bases  $\mathcal{B}'$  et  $\mathcal{B}$ . Par un théorème vu au paragraphe 3, la matrice  $MA$  est la matrice de l'application  $f^{-1} \circ f$  dans les bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}$ . Or  $f^{-1} \circ f = \text{Id}_E$  et la matrice de  $\text{Id}_E$  dans la base  $\mathcal{B}$  est la matrice identité, donc  $MA = I_n$ . On a de même  $f \circ f^{-1} = \text{Id}_F$  et sa matrice dans la base  $\mathcal{B}'$  est  $AM$ , donc  $AM = I_n$ . On en déduit que  $A$  est inversible et  $M = A^{-1}$ .

Réciproquement, supposons que  $A$  est inversible. Soit  $g: F \rightarrow E$  l'application linéaire telle que les coordonnées de  $g(u'_i)$  dans la base  $\mathcal{B}$  sont les coordonnées de la colonne  $i$  de la matrice  $A^{-1}$  (on



a vu qu'on peut définir une application linéaire en donnant les images des vecteurs d'une base). Autrement dit,  $A^{-1}$  est la matrice de  $g$  dans les bases  $\mathcal{B}'$  et  $\mathcal{B}$ . La matrice  $A^{-1}A = I_n$  est la matrice de l'application  $g \circ f$  dans la base  $\mathcal{B}$ . Or  $I_n$  est la matrice de  $\text{Id}_E$  dans la base  $\mathcal{B}$ , donc  $g \circ f = \text{Id}_E$  (ces deux applications linéaires ont la même matrice, donc elles coïncident sur une base, donc elles sont égales). De même, la matrice  $AA^{-1} = I_n$  est la matrice de  $f \circ g$  dans la base  $\mathcal{B}'$ , donc  $f \circ g = \text{Id}_F$ . On en déduit que  $f$  est inversible et  $g = f^{-1}$ .

## 4.7 Changement de bases

### Définition.

Soit  $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$  et  $\mathcal{B}' = (u'_1, \dots, u'_n)$  deux bases de  $E$ . La **matrice de passage** de la base  $\mathcal{B}$  à la base  $\mathcal{B}'$  est la matrice carrée  $P \in M_n(\mathbf{K})$  dont les coefficients de la colonne  $i$  sont les coordonnées du vecteur  $u'_i$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

### Exemple.

Soit  $E = \mathbf{R}^2$ ,  $u_1 = (1, 0)$ ,  $u_2 = (0, 1)$ ,  $\mathcal{B} = (u_1, u_2)$  (c'est la base canonique de  $\mathbf{R}^2$ ),  $u'_1 = (1, 1)$ ,  $u'_2 = (2, 3)$  et  $\mathcal{B}' = (u'_1, u'_2)$ ; on peut montrer que  $\mathcal{B}'$  est une base de  $\mathbf{R}^2$ . La matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}'$  est  $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ .

On a  $(1, 0) = 3(1, 1) - (2, 3)$  et  $(0, 1) = -2(1, 1) + (2, 3)$ , autrement dit  $u_1 = 3u'_1 - u'_2$  et  $u_2 = -2u'_1 + u'_2$ . Donc les coordonnées de  $u_1$  dans  $\mathcal{B}'$  sont  $(3, -1)$ . et les coordonnées de  $u_2$  dans  $\mathcal{B}'$  sont  $(-2, 1)$ . La matrice de passage de  $\mathcal{B}'$  à  $\mathcal{B}$  est :  $P' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ .

### Propriétés des matrices de passage.

Considérons l'application identité  $\text{Id}_E: E \rightarrow E$ . On a  $\text{Id}_E(u'_i) = u'_i$  donc par définition la matrice de l'application  $\text{Id}_E$  dans les bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  est la matrice de passage  $P$ . Comme l'application  $\text{Id}_E$  est un isomorphisme, on en déduit que  $P$  est inversible et que  $P^{-1}$  est la matrice de l'application  $\text{Id}_E^{-1} = \text{Id}_E$  dans les bases  $\mathcal{B}'$  et  $\mathcal{B}$ . Par conséquent  $P^{-1}$  est la matrice de passage de  $\mathcal{B}'$  à  $\mathcal{B}$ .

Soit  $v \in E$ . Notons  $(x_1, \dots, x_n)$  les coordonnées de  $v$  dans la base  $\mathcal{B}$ ,  $(x'_1, \dots, x'_n)$  les coordonnées de  $v$  dans la base  $\mathcal{B}'$  et  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ,  $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$ .

On a l'égalité  $v = \text{Id}_E(v)$ , ce qui se traduit par la relation matricielle  $X = PX'$ .

### Propriétés.

Soit  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  des bases de  $E$  et soit  $P$  la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}'$ .

- La matrice  $P$  est inversible et son inverse  $P^{-1}$  est la matrice de passage de  $\mathcal{B}'$  à  $\mathcal{B}$ .
- Si  $X$  représente les coordonnées d'un vecteur  $u$  dans la base  $\mathcal{B}$  et si  $X'$  représente les coordonnées de  $u$  dans la base  $\mathcal{B}'$  alors  $X = PX'$ .

### Attention au piège !

$P$  s'appelle la matrice de passage **de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}'$**  mais la formule  $X = PX'$  donne les coordonnées **dans  $\mathcal{B}$**  en fonction des coordonnées **dans  $\mathcal{B}'$** , et non l'inverse.

Pour avoir les coordonnées dans  $\mathcal{B}'$  en fonction des coordonnées dans  $\mathcal{B}$ , il faut utiliser la formule  $X' = P^{-1}X$ .

## Formule de changement de bases.

### Théorème.

Soit  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  des bases de  $E$  et  $P$  la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}'$ . Soit  $f: E \rightarrow E$  un endomorphisme de  $E$ ,  $A$  la matrice de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}$  et  $A'$  la matrice de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}'$ . Alors on a la formule de changement de bases suivante :

$$A' = P^{-1}AP.$$

**Preuve.** Nous avons déjà vu que  $P$  est la matrice de  $\text{Id}_E$  dans les bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  et que  $P^{-1}$  est la matrice de  $\text{Id}_E$  dans les bases  $\mathcal{B}'$  et  $\mathcal{B}$ . Par un théorème vu au paragraphe 3,  $AP$  est la matrice de  $f \circ \text{Id}_E$  dans les bases  $\mathcal{B}'$  et  $\mathcal{B}$ , et de même  $P^{-1}(AP)$  est la matrice de  $\text{Id}_E \circ f \circ \text{Id}_E$  dans la base  $\mathcal{B}'$ . Or  $\text{Id}_E \circ f \circ \text{Id}_E = f$  donc  $P^{-1}AP$  est la matrice de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}'$ , c'est-à-dire  $P^{-1}AP = A'$ . Ceci termine la preuve.

### Remarque.

La formule du changement de base a un intérêt théorique mais en pratique on ne l'utilise pas pour calculer  $A'$  à partir de  $A$  et de  $P$ . Pour calculer  $A'$ , on revient à la définition de la matrice d'une application dans une base.

### Exemple.

Cet exemple illustre à quoi peut servir la formule de changement de bases.

Soit  $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique est  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ . Soit  $u_1 = (1, 1)$  et  $u_2 = (1, 3)$ . Les vecteurs  $u_1, u_2$  forment une base de  $\mathbf{R}^2$  car ils ne sont pas colinéaires (c'est-à-dire ils ne sont pas proportionnels).

On a  $f(u_1) = (2, 2) = 2u_1$  et  $f(u_2) = (1, 3) = u_1$  donc la matrice de  $f$  dans la base  $(u_1, u_2)$  est  $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ . Les puissances de  $A'$  se calculent facilement par récurrence :

$$A'^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, A'^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}, \dots \text{ et } A'^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \text{ pour tout entier } n \geq 1.$$

La matrice de passage de la base canonique à la base  $(u_1, u_2)$  est  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ . Si on calcule son inverse, on trouve  $P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ .

On a  $A' = P^{-1}AP$  donc  $A = PA'P^{-1}$ . Calculons les puissances de  $A$  en fonction de  $A'$  :  $A^2 = (PA'P^{-1})(PA'P^{-1}) = PA'^2P^{-1}$ ,  $A^3 = A^2A = (PA'^2P^{-1})(PA'P^{-1}) = PA'^3P^{-1}, \dots$   $A^n = PA'^nP^{-1}$ . Si on utilise la formule de  $A'^n$  pour calculer le produit  $PA'^nP^{-1}$ , on trouve :

$$A^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 - 2^n & -1 + 2^n \\ 3 - 3 \cdot 2^n & -1 + 3 \cdot 2^n \end{pmatrix} \text{ pour tout entier } n \geq 1.$$