S2IFIPS 2008

Feuille d'exercices n° 6b

Exercice 1

On définit une application linéaire $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ par $(u, v, w) \longmapsto (2w, u - v)$.

(i) Trouver son noyau, son image et son rang. Vérifier que $\dim \operatorname{Ker} T + \dim \operatorname{Im} T = \dim \mathbb{R}^3$.

(ii) T est-elle injective ? surjective ?

(iii) Quelle est la matrice A représentant T relativement aux bases canoniques B_3 et B_2 ?

(iv) On équipe à présent $\mathbb{R}^3$ de la base $B_3' = \{(1,1,0),(1,1,1),(0,2,1)\}$ et $\mathbb{R}^2$ de la base $B_2' = \{(1,-1),(1,1)\}$. Trouver les matrices de passage $B_2 \to B_2'$ et $B_3' \to B_3$ et la matrice A' représentant T relativement aux bases B_3' et B_2'.

Exercice 2

Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

$$n+1 \sim n, \qquad 2^{n+1} \sim 2^n, \qquad n + \sqrt{n} = O(n), \qquad 2^{n+\sqrt{n}} = O(2^n),$$
$$2^{\sqrt{n}} = o(2^n), \qquad e^n = o(n!), \qquad n! = o(n^n).$$

Exercice 3

Trouver des équivalents pour les suites suivantes :

$$\sin(1+\frac{1}{n}), \qquad n\ln(1+\frac{1}{n}), \qquad \frac{1}{\ln(1+\frac{1}{n})} - \frac{1}{\sin\frac{1}{n}},$$
$$(1+\sin(\frac{1}{n}))^n, \qquad \sqrt{\ln(n+1)} - \sqrt{\ln(n)}, \qquad n\cos(\frac{1}{n}) - \sqrt{n^2-1},$$
$$\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(n)), \qquad \ln(\sqrt{(}1+n^2)+n), \qquad \ln(\sqrt{(}1+n^2)-n), \qquad \cos(\frac{1}{n}) - \frac{1}{4}\cos(\frac{2}{n}) - \frac{3}{4}.$$

Exercice 4

Comparer la croissance des suites suivantes (O, Ω, Θ) :

$$\sin(n), \qquad \ln(1+\frac{1}{n}), \qquad n\ln(1+\frac{1}{n}+e^n), 2+\cos(n).$$

Exercice 5

Calculer les limites des suites suivantes, en fonctions des éventuels paramètres :

$$n(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1), \qquad n\ln(1+\frac{1}{n}), \qquad n^2 - \frac{1}{\sin^2(\frac{1}{n})}.$$

Exercice 6

On pose $u_n = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t^n}}$.

(i) Soit $t \in]0,1[$. Donner un développement asymptotique au deuxième ordre, puis un encadrement, de $\frac{1}{\sqrt{1+t^n}}$ pour $n \to \infty$.

(ii) En déduire un encadrement de u_n. Donner un développement asymptotique de u_n, de la forme

$$u_n = a + \frac{b}{n} + O(\frac{1}{n^2}).$$

Exercice 7

Donner un équivalent, à une constante près, du nombre d'opérations (additions, multiplications) nécessaires pour effectuer les calculs suivants, dans le cas le plus général :

- Ajouter deux matrices $n \times n$.
- Multiplier deux matrices $n \times n$.
- Résoudre un système linéaire de n équations à n inconnues.
- Inverser une matrice $n \times n$ par la méthode du pivot de Gauß.