## S2IFIPS 2008

# Feuille d'exercices n° 6a

### Exercice 1

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f_a$ l'application linéaire de matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 & a-1 \\ 0 & -1 & 1 & a \\ 1 & 0 & a & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer, suivant la valeur de $a$, le rang de $f_a$, une base de son image et de son noyau.

### Exercice 2

Soient $V$ un espace vectoriel réel et $u$ un endomorphisme de $V$ tel que $u^2 = u$.
1. Montrer que, pour tout $x \in V$, on a $x - p(x) \in \operatorname{Ker} p$, en déduire que $V = \operatorname{Im} p + \operatorname{Ker} p$.
2. Montrer que $E = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Im} p$. En déduire que $p$ est la projection sur $\operatorname{Im} p$ parallèlement à $\operatorname{Ker} p$.
3. Que dire de $s = 2p - 1$ ? Écrire les matrices de $s$ et $p$ dans une base bien choisie.

### Exercice 3

Soient $V$ un espace vectoriel de dimension 3 et $u$ un endomorphisme de $V$ tel que $u \neq 0$ et $u^2 = 0$.
1. Montrer que $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} u$ et déterminer la dimension du noyau de $u$.
2. En déduire qu'il existe une base de $V$ dans laquelle la matrice de $u$ est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

### Exercice 4

Soit $A$ la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -28 & 6 \\ -1 & -19 & 6 \\ 4 & -88 & 25 \end{pmatrix}$$

1. Résoudre, en fonction du paramètre scalaire $\lambda$, l'équation $AX = \lambda X$.
2. Trouver une matrice $P$ telle que $A' = P^{-1}AP$ soit une matrice diagonale.
3. Donner une matrice $B$ telle que $B^2 = A$. Combien y a-t-il de telles matrices $B$ possibles ?
4. On pose à présent

$$C = \begin{pmatrix} -12 & -8 & 6 \\ -11 & -9 & 6 \\ -46 & -38 & 25 \end{pmatrix}$$

Existe-t-il des matrices réelles $D$ telles que $D^2 = C$ ?

### Exercice 5

1. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer les matrices $A, A^2, A^3, A^4$. Pour $n$ quelconque, que valent $A^n$, $(1+A)^n$ ?
2. On suppose que $B$ est une matrice vérifiant $B^2 = A$. Que dire de $B^6$, $B^8$ ?
3. Soit $E_n = \operatorname{Im} B^n$. Montrer que les $E_n$ forment une suite décroissante de sous-espace vectoriels de $\mathbb{R}^4$.
4. Pourquoi existe-t-il un entier $n$ tel que $E_n = E_{n+1} \neq \{0\}$ ? Montrer que la restriction de $B$ à $E_n$ est un isomorphisme. Trouver une contradiction (avec la question 2). Conclure.