Université Paris-Sud
Centre d'Orsay

IFIPS
2007-2008 second semestre

Mathématiques

Feuille d'exercices 5
Applications linéaires

Exercice 1 Parmi les applications suivantes, lesquelles sont linéaires?

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto xy$;
2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto (2x, 0)$;
3. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (x + y, x - y)$;
4. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$;
5. $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \overline{z}$, $\mathbb{C}$ étant considéré comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel;
6. $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \overline{z}$, $\mathbb{C}$ étant considéré comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel;
7. $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto iz$, $\mathbb{C}$ étant considéré comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel;
8. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x + y + 1$;
9. $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2$, $(x, y, z) \mapsto (x + y, x - 2y + z)$;
10. $f : \mathbb{R}_n[X] \mapsto \mathbb{R}_n[X]$, $P \mapsto P'$, où $\mathbb{R}_n[X]$ est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de degré $\leq n$ et à coefficients réels;
11. $f : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$, $P \mapsto XP'$.

Pour celles qui sont linéaires, écrire leur matrice dans les bases canoniques. Déterminer leur noyau, leur image. Préciser si l'application est injective, surjective, bijective.

Exercice 2 Déterminer pour chaque condition s'il existe une application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vérifiant

1. $f(1, -1) = (2, 3)$ et $f(2, -2) = (3, 2)$;
2. $f(1, -1) = (2, 3)$ et $f(1, 1) = (3, 2)$;
3. $f(1, -1) = (2, 3)$ et $f(3, -3) = (6, 9)$.

Exercice 3 Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par

$$f(x, y, z) = (x + 2y - 2z, 2x + y - 2z, 2x + 2y - 3z).$$

1. Écrire la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Écrire la matrice B de f dans la base $\{(1, 1, 1), (-1, 1, 0), (1, 0, 1)\}$.
3. Donner une matrice inversible P telle que $PAP^{-1} = B$.

Exercice 4 Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par

$$f(x, y, z, t) = (x - 2y - z + t, x + z + t, 3x - y + 2z + 3t).$$

1. Calculez une base du noyau de f.
2. Calculez une base de l'image de f, $e_1, \dots, e_n$. Donnez-en aussi une équation.
3. Pour tout e_i, trouvez un élément $\widetilde{e}_i \in \mathbb{R}^4$ tel que $f(\widetilde{e}_i) = e_i$. Justifiez que la famille $\widetilde{e}_1, \dots, \widetilde{e}_n$ est libre.
4. Soit $F = \mathrm{Vect}\{\widetilde{e}_1, \dots, \widetilde{e}_n\}$. Vérifiez que F est un supplémentaire pour $\ker f$.

Exercice 5 Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel engendré par les fonctions $1, x, x^2, \sin x, \cos x$. Considérons l'endomorphisme

$$\begin{aligned} T : E &\longrightarrow E \\ f &\longmapsto f + f' + f''. \end{aligned}$$

Démontrez que E est de dimension cinq et que T est linéaire. Écrivez la matrice de T dans la base donnée. Exhibez aussi des bases de $\ker T$ et $\operatorname{im} T$. Existe-t-il $g \in E$ tel que $T(g) = 2\sin x - 3\cos x + 6$?

Exercice 6 Soient E la droite de $\mathbb{R}^3$ engendrée par le vecteur $(1, 0, -2)$ et F le plan de $\mathbb{R}^3$ déquation $x + y - z = 0$.

1. Donner des équations de E, une base de F. Montrer que E et F sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
2. Donner la matrice des applications suivantes: la projection p_E sur E parallèlement à F; la projection p_F sur F parallèllement à E; la symétrie s_E par rapport à E, parallèlement à F; la symétrie s_F par rapport à F, parallèlement à E.

Exercice 7

1. Soit $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application linéaire vérifiant $p^2 = p$. Montrer que $\ker p$ et $\operatorname{im} p$ sont supplémentaires dans E. Que peut-on dire (géométriquement) de p?
2. Soit $s : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application linéaire vérifiant $s^2 = \mathrm{id}$. Montrer que $\operatorname{im}(s - \mathrm{id}) \subset \ker(s + \mathrm{id})$. En utilisant le théorème du rang, en déduire que $E = \ker(s - \mathrm{id})$ et $F = \ker(s + \mathrm{id})$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^n$. Que dire alors de s?
3. Soit p telle que $p^2 = p$. Construire à partir de p une application linéaire s vérifiant $s^2 = \mathrm{id}$.

Exercice 8 Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'application linéaire définie par

$$f(x, y, z, t) = (2x + y - z, -x + y - z + t, -x + t, x + y - z + t).$$

1. Calculez une base du noyau de f.
2. Trouvez une base du sous-espace vectoriel formé des vecteurs $u \in \mathbb{R}^4$ avec $f(u) = u$.
3. Trouvez une base du sous-espace vectoriel formé des vecteurs $u \in \mathbb{R}^4$ avec $f(u) = 2u$.
4. À l'aide des questions précédentes et du théorème du rang, trouvez une base de $\operatorname{im} f$.

Exercice 9 Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et définissons

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

1. Calculez $R(\theta)R(\varphi)$. En déduire $R(\theta)^{-1}$.
2. Donnez une interprétation géométrique de l'application linéaire associée à $R(\theta)$.
3. Déterminez les réels λ et les vecteurs $u \in \mathbb{R}^2$ tels que $R(\theta)u = \lambda u$.
4. Déterminez les $\lambda \in \mathbb{C}$ et les vecteurs $v \in \mathbb{C}^2$ tels que $R(\theta)v = \lambda v$.