Université Paris-Sud
Centre d'Orsay

IFIPS
2007-2008, Second Semestre

# Mathématiques

## Feuille d'exercices 4

**Remarque :** Sur cette feuille, les vecteurs qui sont traditionellement des colonnes (*e.g.* $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$) seront notés par une ligne suivi du symbole de la transposition (pour le précédent vecteur $(a,b,c)^\dagger$). D'autre part, on notera $\text{Vect}\{\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_n\}$ l'espace engendré par les vecteurs $\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_n$.

**Exercice 1.** Soit $a \in \mathbb{R}$. Parmi les sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$ suivants, lesquels (et pour quelle valeur de $a$, lorsque cela a un sens) sont des sous-espaces vectoriels .

$$
\begin{array}{ll}
E_1 = \{(x,y)^\dagger \in \mathbb{R}^2 | x^2 + xy \geq 0\}, & E_2 = \{(x,y)^\dagger \in \mathbb{R}^2 | x^2 + xy + y^2 \geq 0\}, \\
E_3 = \{(x,y)^\dagger \in \mathbb{R}^2 | x + ay + 1 \geq 0\}, & E_4 = \{(x,y,z)^\dagger \in \mathbb{R}^3 | x + y + a = 0, \text{ et } x + 3az = 0\}, \\
E_5 = \{(x,y,z)^\dagger \in \mathbb{R}^3 | x + y = 0\}, & E_6 = \{(x,y,z)^\dagger \in \mathbb{R}^3 | x = 1\}, \\
E_7 = \{(x,y,z)^\dagger \in \mathbb{R}^3 | xy = 0\}, & E_8 = \{(x,y,z)^\dagger \in \mathbb{R}^3 | x + y - z = x + y + z = 0\}, \\
E_9 = \{(x,y,z)^\dagger \in \mathbb{R}^3 | x^2 - z^2 = 0\}, & E_{10} = \{(x,y,z)^\dagger \in \mathbb{R}^3 | e^x e^y = 1\}, \\
E_{11} = \{(x,y,z)^\dagger \in \mathbb{R}^3 | z(x^2 + y^2) = 0\}, & E_{12} = \{(x,y,z,t)^\dagger \in \mathbb{R}^4 | x = 0, y = z\}.
\end{array}
$$

**Exercice 2.** Soit $\mathbb{P}_n$ l'espace vetoriel (sur $\mathbb{R}$) des polynômes (en une seule variable et à coefficients dans $\mathbb{R}$) de degré inférieur ou égal à $n$. Dites quels ensembles parmi les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{P}_3$.

$$
\begin{array}{ll}
E_1 = \{p(x) \in \mathbb{P}_3 | p'(0) = 3\}, & E_2 = \{p(x) \in \mathbb{P}_3 | p'(x) \in \mathbb{P}_1\}, \\
E_3 = \{p(x) \in \mathbb{P}_3 | p(3) = 0\}, & E_4 = \{p(x) \in \mathbb{P}_3 | p(1) = p'(2)\}.
\end{array}
$$

**Exercice 3.** Soit $\mathcal{F}$ l'espace vectoriel (sur $\mathbb{R}$) des fonctions de $\mathbb{R}$ à valeur dans $\mathbb{R}$. Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des sous-espaces vectoriels ?

$$
\begin{array}{ll}
E_1 = \{f(x) \in \mathcal{F} | f(0) = 1\}, & E_2 = \{f(x) \in \mathcal{F} | f(1) = 0\}, \\
E_3 = \{f(x) \in \mathcal{F} | f \text{ est croissante}\}, & E_4 = \{f(x) \in \mathcal{F} | f \text{ est dérivable}\}.
\end{array}
$$

**Exercice 4.** Soit $\vec{v}_1 = (1,1,0)^\dagger$, $\vec{v}_2 = (4,1,4)^\dagger$ et $\vec{v}_3 = (2,-1,4)^\dagger$.

(a) Montrer que $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ ne sont pas colinéaires, puis qu'il en est de même pour $\vec{v}_2$ et $\vec{v}_3$ ainsi que $\vec{v}_3$ et $\vec{v}_1$.

(b) La famille $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\}$ est-elle libre ?

**Exercice 5.** On considère dans $\mathbb{R}^n$ une famille de quatre vecteurs linéairement indépendants : $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3,\vec{e}_4\}$.

(a) Que pouvez-dire sur $n$ ?

(b) Les familles suivantes sont-elles libres ?

$$
\begin{array}{ll}
\mathcal{E}_1 = \{\vec{e}_1, 2\vec{e}_2, \vec{e}_3\}, & \mathcal{E}_2 = \{\vec{e}_1, 2\vec{e}_1 + \vec{e}_4, \vec{e}_4\}, \\
\mathcal{E}_3 = \{\vec{e}_3, 3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_3, \vec{e}_2 + \vec{e}_3\}, & \mathcal{E}_4 = \{2\vec{e}_1 + \vec{e}_2, \vec{e}_1 - 3\vec{e}_2, \vec{e}_4, \vec{e}_2 - \vec{e}_1\}.
\end{array}
$$

**Exercice 6.** Soit $E = \{(x,y,z,t)^\dagger \in \mathbb{R}^4 | x+y+z+t = 0\}$. Est-ce un sous-espace vectoriel ? Si oui, en donner une base.

**Exercice 7.** Décrire le sous-espace de $\mathbb{P}_2$ (l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à 2) engendré par les polynômes $1-x$, $(1-x)^2$, $(1+x)^2$ et $x^2$ ?

**Exercice 8.** Soit $\vec{e}_1 = (1,2,3,4)^\dagger$ et $\vec{e}_2 = (1,-2,3,-4)^\dagger$.

(a) Existe-t-il $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $(x,1,y,1)^\dagger \in \text{Vect}\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ ?

(b) Qu'en est-il si on demande que $(x,1,1,y)^\dagger \in \text{Vect}\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ ?

**Exercice 9.** Soit $E = \text{Vect}\{(2,3,-1)^\dagger, (1,-1,-2)^\dagger\}$ et $F = \text{Vect}\{(3,7,0)^\dagger, (5,0,-7)^\dagger\}$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. Montrer que $E$ et $F$ sont égaux.

**Exercice 10.** Pour chaque paire de ces sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$, donner la somme et dire si elle est directe

$$E_1 = \text{Vect}\{(1,0,1,0)^\dagger, (5,-1,6,0)^\dagger) \qquad E_2 = \text{Vect}\{(0,3,4,4)^\dagger, (-1,1,2,4)^\dagger\}$$
$$E_3 = \text{Vect}\{(1,1,2,0)^\dagger, (1,2,3,0)^\dagger, (3,1,4,0)^\dagger\} \quad E_4 = \text{Vect}\{(1,1,0,0)^\dagger, (1,3,2,4)^\dagger, (0,1,1,2)^\dagger\}$$

**Exercice 11.** On se place dans l'espace vectoriel $\mathcal{F}$ des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Trouver lesquels parmi les espaces suivants sont en somme directe.

$$E_1 = \{f \in \mathcal{F} | f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}\} \qquad E_2 = \{f \in \mathcal{F} | f(0) = 0\}$$
$$E_3 = \text{Vect}\{x^{1/3}, (x+2)\ln|x+2|\} \qquad E_4 = \{f \in \mathcal{F} | f(1) = 0\}$$

**Exercice 12.** Montrer que dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $\vec{v}_1 = (1,0,1)^\dagger$, $\vec{v}_2 = (-1,-1,2)^\dagger$, et $\vec{v}_3 = (-2,1,-2)^\dagger$ forme une base. Calculer les coordonnées dans cette base d'un vecteur $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)^\dagger$.

**Exercice 13.** Soit $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ une base de $\mathbb{R}^3$.

(a) Montrer que $\vec{v}_1 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$ et $\vec{v}_2 = \vec{e}_2 + \vec{e}_3$ forme une famille libre.

(b) Compléter la famille $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ en une base de $\mathbb{R}^3$.

**Exercice 14.** Soit le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ suivant $E = \{(x,y,z,t)^\dagger \in \mathbb{R}^4 | 2x-2y-z+t = 0\}$.

(a) Déterminer la dimension de $E$ et une base de $E$.

(b) Déterminer un supplémentaire de $E$.

**Exercice 15.** Soit $\vec{v}_1 = (1,-1,2,0)^\dagger$, $\vec{v}_2 = (0,2,1,1)^\dagger$, $\vec{v}_3 = (1,1,3,1)^\dagger$, et $\vec{v}_4 = (2,0,5,1)^\dagger$ des vecteurs dans $\mathbb{R}^4$.

(a) Les vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ et $\vec{v}_4$ sont-ils linéairement indépendants ?

(b) Soit $F = \text{Vect}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$. Déterminer la dimension de $F$ et une base de $F$. En déduire le rang de la famille $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$.

(c) Donner un système d'équation caractérisant $F$.

(d) Trouver un supplémentaire de $F$.

**Exercice 16.** Soit $E = \{(x,y,z,t)^\dagger \in \mathbb{R}^4 | y+z+t=0\}$ et $F = \{(x,y,z,t)^\dagger \in \mathbb{R}^4 | x+y=0 \text{ et } z = 2t\}$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$.

(a) Déterminer la dimension et une base de $E$ et $F$.

(b) Trouver la dimension et une base de $E \cap F$.

(c) Que peut-on dire de $E+F$ ? La somme est-elle directe ?

**Exercice 17.** Soit donné les vecteurs suivant de $\mathbb{R}^5$ :

$$\begin{array}{lll} \vec{v}_1 = (3,2,3,-1,2)^\dagger, & \vec{v}_2 = (1,2,1,-1,-2)^\dagger, & \vec{v}_3 = (1,-6,1,3,14)^\dagger, \\ \vec{e}_1 = (3,4,3,-2,-2)^\dagger, & \vec{e}_2 = (-2,-3,-3,1,2)^\dagger, & \vec{e}_3 = (2,1,-3,-3,2)^\dagger. \end{array}$$

Soit $E$ l'espace vectoriel engendré par $\vec{v}_1, \vec{v}_2$, et $\vec{v}_3$. De même, soit $F = \text{Vect}\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$.

(a) Trouver la dimension et une base de $E$.

(b) Même question pour $F$.

(c) Déterminer la dimension et une base de $E+F$.

(d) $E$ et $F$ sont-ils en somme directe ? En déduire la dimension de $E \cap F$.

(e) Donner une base de $E \cap F$.

**Exercice 18.** Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit $\vec{v}_1 = (1,-1,0,2)^\dagger$, $\vec{v}_2 = (1,0,1,2)^\dagger$, $\vec{v}_3 = (1,3,5,7)^\dagger$ et $\vec{v}_4 = (0,2,3,a)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^4$.

(a) Pour quelles valeurs de $a$ la famille $\mathcal{V} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$ est-elle une base ?

(b) Pour les valeurs de $a$ où $\mathcal{V}$ est liée, quelles sont les relations entre ces vecteurs ?

(c) Quelle est la dimension de $E = \text{Vect}\mathcal{V} = \text{Vect}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$ selon les valeurs de $a$ ?

(d) Soit $k \in \mathbb{R}$. Soit $\vec{e} = (4,k,1,3)^\dagger$. Pour les valeurs de $a$ où $\mathcal{V}$ est liée, quelles sont les valeurs de $k$ telles que $\vec{e} \in F$.

(e) Pour ces valeurs de $k$ et de $a$, exprimer $\vec{e}$ en fonction de $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ et $\vec{v}_4$.

(f) Quand est-ce que $\vec{e} \in F$ pour les valeurs de $a$ où $\mathcal{V}$ est libre ? Écrire les composantes de $\vec{e}$ pour $\mathcal{V}$.