S2IFIPS 2008

Feuille d'exercices n° 3

Systèmes linéaires

Exercice 1

Résoudre les systèmes linéaires suivants :

$$\left\{\begin{array}{llll} -x & +y & & = 3 \\ x & -y & -z & = -2 \\ x & -2y & +z & = -5 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lllll} x & -4y & +2z & +3t & = -10 \\ x & -y & +2z & +t & = -1 \\ -2x & +3y & +z & +2t & = 0 \\ 2x & -2y & +3z & +t & = -1 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{llll} 3x & +y & -z & = 1 \\ 2x & -y & +2z & = 5 \\ -x & -2y & +3z & = 4 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{llll} 5x & +2y & -2z & = 1 \\ -x & & +3z & = 2 \\ 4x & +2y & +z & = 1 \end{array}\right.$$

Exercice 2

Résoudre les systèmes linéaires suivants, en prenant garde à discuter en fonction de la valeur du paramètre m :

$$\left\{\begin{array}{lll} x & +my & = 0 \\ mx & +y & = 0 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{llll} x & +my & +m^2z & = 1 \\ 2x & +y & +5z & = 5 \\ x & -y & +z & = 2 \end{array}\right.$$

Exercice 3

Discuter en fonction du paramètre réel t le système :

$$\left\{\begin{array}{llll} & y & +z & = tx \\ x & & +z & = ty \\ x & +y & & = tz \end{array}\right.$$

Exercice 4

Déterminer les polynômes P de degré inférieur à trois satisfaisant les conditions :

(i) $P(1) = 2$, $P(3) = P(2)$, $P'(2) = 1$, $P'(3) = -1$;

(ii) $P(1) = -1$, $P(2) = -1$, $P(3) = 1$, $P(4) = 5$;

(iii) $\int_1^2 (x^4 + P(x))x^m dx = 0$ pour $m = 0, 1, 2, 3$. (on trouvera avantage à calculer d'abord $\int_1^2 x^n dx$ pour tout entier positif n).

Exercice 5

Déterminer l'unique solution de l'équation différentielle homogène $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$ (on remarquera une racine évidente de l'équation caractéristique...), satisfaisant les conditions initiales : $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = 6$.

Exercice 6

Reprendre les systèmes de l'exercice 1, mais en remplaçant cette fois les membres de droite par des inconnues a, b, c, ou a, b, c, d. Que remarque-t-on ?

Matrices

Exercice 7

On considère les deux matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer $A + B$, $(A + B)^2$, A^2, B^2, AB et BA. En déduire que $(A + B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$.

Exercice 8

À quelle condition sur la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ a-t-on $AB = BA$ pour toute matrice 2×2 B ?

Indication : on pourra utiliser $B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 9

Dire lesquelles des matrices suivantes sont inversibles, et donner leur inverse :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 10

Pour toute matrice A carrée de taille n, on note $\mathcal{C}(A)$ le commutant de A, c'est-à-dire l'ensemble des matrices B carrées de taille n telles que $AB = BA$.

(i) Pourquoi exige-t-on que B soit carrée de taille n ?

(ii) Si A est une matrice carrée quelconque, donner des exemples de matrice appartenant à $\mathcal{C}(A)$. Quel est l'exemple le plus large possible ?

(iii) Calculer le commutant des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 4 & 21 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 11

Pour toutes les matrices suivantes, résoudre le système $AX = \lambda X$, où λ est un scalaire et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ un vecteur :

$$A = \begin{pmatrix} -10 & -35 \\ 6 & 19 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$