Université Paris-Sud
Centre d'Orsay

IFIPS
2007-2008 second semestre

Mathématiques

Feuille d'exercices 2
Équations différentielles

Exercice 1 Résoudre les équations différentielles du premier ordre suivantes :

1. $x^2(y+1)y' + (x-1)^2 y = 0$,
2. $x^3 + y^3 - 3xy^2y' = 0$ (effectuez un changement de variable du type $y = tx$),
3. $y' = \frac{x+y-1}{x-y+3}$ (faites d'abord un changement de variable $\tilde{x} = x + a$, $\tilde{y} = y + b$ pour eliminer les facteurs constants),
4. $(2x^2 + 3y^2 - 7)x - (3x^2 + 2y^2 - 8)yy' = 0$ (introduisez $u = x^2$, $v = y^2$),
5. $x^3y' + (2 - 3x^2)y + (2 - 3x^2) = x^3$,
6. $y' + (\tan x)y = 3 \sin x \cos x$,
7. $\mathrm{e}^y y' + e^y = 4 \sin x$,
8. $(3x + y - 1)y' + 2x^3 + 3y = 0$.

Exercice 2 Étudier les solutions –intervalles de définition inclus– des équations différentielles suivante:

1. $(x-1)y' + (x-2)y = \frac{1}{x^2e^x}$,
2. $xy' + y = \cos x$,
3. $x(x+1)y' + y = \arctan x$.

Exercice 3 Résoudre les équations différentielles linéaires, homogènes, du second ordre suivantes:

1. $y'' - 3y' - 4 = 0$,
2. $y'' - 10y' + 25y = 0$,
3. $y'' - 2y' + 5y = 0$.

Exercice 4 Les équations de la forme

$$a_0x^2y'' + a_1xy' + a_2y = f(x), \quad a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R} \tag{E}$$

s'appellent équations d'Euler.

1. Étudiez l'effet du changement de variable $x = e^t$ dans (E).
2. Résolvez les équations

   a) $x^2y'' + xy' - y = 0$,

b) $x^2y'' - xy' + y = 2x$.

Exercice 5 Considérons l'équation différentielle $x'' + bx' + \omega_0^2 x = A\cos(\omega t)$, avec $b > 0$ et $b^2 - 4\omega_0^2 < 0$.

1. Trouvez la solution générale.
2. Démontrez qu'il existe une unique solution bornée pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x_\omega(t)$, et trouvez-la.

Exercice 6 Résoudre les équations différentielles du second ordre suivantes:

1. $y''' - 2y'' + y' = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = -1$,
2. $y'' + y = x\sin x + x^2$,
3. $y'' - 2y' - 3y = x(1 + e^{3x})$,
4. $3y'' + 13y' + 4y = 4\cos 2x - \sin 2x$.

Exercice 7 Résolvez l'équation différentielle suivante, en devinant des solutions particulières:

1. $y'' + y' - 2y = 2\tan^3 x + \tan^2 x + 1$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.

Exercice 8 Soient P une fonction dérivable et Q, R des fonctions continues. On dit qu'une équation du second ordre (E): $P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$ est exacte s'il existe une fonction $f(x)$ telle que (E) s'écrit $(P(x)y')' + (f(x)y)' = 0$.

1. Donnez une condition nécessaire et suffisante sur P, Q, R pour que l'équation (E) soit exacte.
2. Déterminez si l'équation $x^3y'' + (3x^2 - x)y' - y = 0$ est exacte et, si c'est le cas, résolvez-la.

Exercice 9 Un électron de masse m et charge e se trouve dans un champ électrique d'intensités E et B d'accord avec le système

$$\begin{cases} mx'' + Bey' = Ee, \\ my'' - Bex' = 0. \end{cases}$$

Supposons qu'en temps 0 l'électron est au repos à l'origine. Quel trajectoire d'écrit l'électron sous l'effet du champ magnétique?