Université Paris-Sud
Centre d'Orsay

IFIPS
2007-2008, Second Semestre

Mathématiques

Feuille d'exercices 1

Exercice 1. Calculer les limites suivantes par des sommes de Riemann :

(a) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k^2+n^2}$.

(b) $\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} (1+\frac{2k}{n})^{2/n}$.

Exercice 2. Soit a, b des réels positifs. Interpréter géométriquement le résultat des intégrales suivantes :

(a) $\int_0^a bx \, dx$.

(b) $\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2-x^2} \, dx$.

Exercice 3. Calculer les intégrales suivantes à l'aide de changement de variable.

(a) $\int_e^{e^2} \frac{1}{t \ln t} \, dt$.

(b) $\int_0^1 \frac{e^{3x}-2e^x}{e^x+2} \, dx$.

(c) $\int_{1/2}^{2} \frac{\ln t}{1+t^2} \, dt$, poser $x = 1/t$.

(d) $\int_{-1}^{-1} t^2\sqrt{1-t^2} \, dt$.

Exercice 4. Calculer les primitives des fonctions suivantes en précisant leur domaine de définition.

(a) $f(x) = \frac{1}{x^2-2x-3}$.

(b) $f(x) = \frac{x-3}{x^2-2x+1}$.

(c) $f(x) = \frac{x+3}{(x-1)(x^2+2x+1)}$.

(d) $f(x) = \frac{x+4}{(x^2+5)(x-1)}$.

Exercice 5. Soit $a \in \mathbb{R}$. Calculer les primitives des fonctions suivantes en précisant leur domaine de définition.

(a) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

(b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$.

(c) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$.

(d) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2ax-x^2}}$.

Exercice 6. Évaluer en posant $x = \operatorname{tg} \dfrac{t}{2}$.

(a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2+\sin t}\,dt$.

(b) $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{1}{\sin t + \operatorname{tg} t}\,dt$.

Exercice 7. Intégrales multiples.

(a) Calculer $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx\right) dy$ et $\displaystyle\int_1^2 \left(\int_1^2 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dy\right) dx$.

(b) Calculer $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^y \frac{2(x+y)}{(1+(x+y)^2)^2}\,dx\right) dy$ et $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^x \frac{2(x+y)}{(1+(x+y)^2)^2}\,dy\right) dx$.

(c) Évaluer $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^{1-y} a^x b^y\,dx\right) dy$ pour $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$, $a \neq b$ et $a \neq 1 \neq b$.

Exercice 8. Domaines d'intégration.

(a) Calculer l'aire du domaine $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \leq y \leq 2-x^2\}$.

(b) Calculer $\displaystyle\int_D (x+\sin y)\,dx\,dy$ pour $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | -1 \leq x \leq 1, -1-x^2 \leq y \leq 1+x^2\}$.

(c) Calculer $\displaystyle\int_D \frac{xy^2}{1+x^2}\,dx\,dy$ pour $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}$.

(d) Calculer $\displaystyle\int_D (1-x-y)\,dx\,dy$ pour $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x+y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$.

(e) Pour $0 < \varepsilon < 1$, calculer $I_\varepsilon = \displaystyle\int_{D_\varepsilon} e^{y/x}\,dx\,dy$ où $D_\varepsilon = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq y \leq x, \varepsilon \leq x \leq 1\}$.
Que vaut $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} I_\varepsilon$?

Exercice 9. Évaluer directement puis à l'aide de coordonnées polaires $\displaystyle\int_D \frac{x}{x^2+y^2}\,dx\,dy$ où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 1 \leq x \leq \sqrt{3}, \frac{x}{\sqrt{3}} \leq y \leq x\}$.

Exercice 10. Coordonnées polaires.

(a) Calculer $\displaystyle\int_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dx\,dy$ où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2+y^2 \leq R^2\}$.

(b) Calculer $\displaystyle\int_D \frac{y^3}{x^2+y^2}\,dx\,dy$ où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 1 \leq x^2+y^2 \leq 4, 0 \leq x, y \leq x\}$.

(c) Calculer $\int_D \frac{xy}{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2+y^2 \geq 1, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.

(d) Évaluer $\int_D \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2+y^2 \leq 1, 0 \leq x^2+y^2-2y, 0 \leq x, 0 \leq y\}$.

Exercice 11. Utiliser un changement de variable pour calculer l'intégrale de f sur le domaine D avec

(a) $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2+y^2+z^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$ et $f(x,y,z) = xyz$.

(b) $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | 1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 4\}$ et $f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^\alpha$, pour $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 12. Soit D le domaine $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1\}$.

(a) Dessiner le domaine D.

(b) Calculer à l'aide du théorème de Fubini l'intégrale $I = \int_D (x+y)e^{-x}e^{-y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

(c) Calculer I par le changement de variable $t = x+y$ et $s = x-y$.

Exercice 13. Volumes.

(a) Calculer le volume d'une pyramide de hauteur h et de base rectangulaire de longueur l et de largeur L.

(b) Quel est le volume de $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | -1 \leq z \leq 1, x^2+y^2 \leq 1+z^2\}$?

Exercice 14. Évaluer le centre d'inertie (ou de gravité) des domaines D suivants :

(a) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$ où $a,b \in \mathbb{R}^\times$.

(b) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2+y^2 \leq 1, x \geq 0, |y| \geq ax\}$ où $a \in \mathbb{R}_{>0}$.

(c) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2+y^2 \leq 9, (x-1)^2+y^2 \geq 1\}$.

Exercice 15. Soit $R > 0$. L'intégrale qui détermine le potentiel électrique engendré par une sphère de rayon R ($B(0,R) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2+y^2+z^2 \leq R^2\}$) chargée uniformément par une densité ρ au point $(0,0,a)$ est

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{B(0,R)} \frac{\rho}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

Évaluer V.