## S2IFIPS 2008

# Devoir n° 3

On note 1 la matrice identité, et, si $x$ est un scalaire, $x = x.1$ la matrice scalaire associée.

## Exercice 1

### Algorithme de Wiedemann

Le but de cet exercice est de présenter une nouvelle méthode de calcul de l'inverse d'une matrice, plus efficace dans le cas particulier d'une matrice creuse (c'est-à-dire dont la plupart des coefficients sont nuls). On note $\mathbb{R}^{n\times n}$ l'espace des matrices carrées de taille $n$.

(i) Soit $A = \begin{pmatrix} 18 & -11 & 3 \\ 37 & -22 & 6 \\ 6 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Pour pouvoir vérifier les calculs que nous allons faire, il faut connaître l'inverse de $A$. En utilisant la méthode du pivot de Gauß, montrer que $A$ est inversible, et calculer son inverse.

(ii) Quelle est la dimension de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{n\times n}$ ? Montrer que la famille des $(A^n)$, pour $n$ entier positif, est liée.

(iii) Calculer les matrices $A^2$ et $A^3$. Montrer que la famille $(1, A, A^2, A^3)$ est liée dans $\mathbb{R}^{n\times n}$, en écrivant la matrice $A^3$ en fonction de 1, $A$ et $A^2$.

*Indication : il s'agit en principe de résoudre un système de neuf équations à trois inconnues. Par conséquent, trois équations devraient suffire...*

(iv) Déduire de la question précédente une formule exprimant l'inverse de $A$ comme un polynôme en $A$, de degré 2. Calculer $A^{-1}$ en utilisant cette formule, et vérifier que l'on retrouve bien le bon résultat !

(v) Soit $X$ un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$. Que peut-on dire de la famille $(X, AX, A^2X, A^3X)$ ? Trouver une relation entre ces vecteurs, dans le cas où $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. En déduire une façon de « deviner » la relation entre 1, $A$, $A^2$ et $A^3$.

(vi) Un vecteur $X$ pris au hasard permet « en général » de deviner la relation. Essayer par exemple avec $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Montrer qu'en fait, la famille $(Y, AY, A^2Y)$ est déjà liée, et donner une relation.

(vii) Donner l'ensemble $E$ des matrices $X$ telles que $5X + 4AX + A^2X = 0$, et l'ensemble $F$ des matrices $X$ telles que $AX - X = 0$. Montrer que $E$ et $F$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

(viii) On pose à présent $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, et $Z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Utiliser chacun des trois vecteurs $X$, $Y$, $Z$ pour essayer de deviner (puis de vérifier !) une relation entre 1, $B$, $B^2$, $B^3$ et $B^4$. En déduire $B^{-1}$.

## Exercice 2

### Récurrences linéaires

(i) Soit $E$ l'ensemble des suites complexes $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence linéaire

$$x_{n+1} = x_n + x_{n-1} \qquad \text{pour tout } n \geqslant 1.$$

Montrer que $E$ est un espace vectoriel complexe. En donner une base. Quelle est sa dimension ?

(ii) Décrire tous les éléments de $E$ qui sont des suites géométriques. Montrer qu'on peut trouver une base de $E$ qui est formée de suites géométriques.

(iii) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de Fibonacci, définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 1$, et $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$. Écrire la valeur du terme général de $u_n$.

(iv) *Cette question utilise la réponse à la question (iii) de l'exercice 1.*
Soit $A$ la matrice de l'exercice 1. Montrer qu'il existe des scalaires $x_n$, $y_n$ et $z_n$ tels que $A^n = x_n + y_n A + z_n A^2$ pour tout entier positif $n$. Donner une matrice $C$ telle que

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}.$$

Que valent $x_n$, $y_n$ et $z_n$ pour $n = 0, 1, 2$ ?

(v) Montrer que la matrice $C$ vérifie la même relation que $A$ entre les puissances 1, $C$, $C^2$, $C^3$. En déduire que les suites $x_n$, $y_n$, $z_n$ vérifient toutes la relation de récurrence linéaire suivante :

$$x_{n+3} = -3x_{n+2} - x_{n+1} + 5x_n, \quad \text{de même pour } y_n \text{ et } z_n.$$

(vi) Soit $F$ l'ensemble des suites $(u_n)$ vérifiant cette relation de récurrence linéaire. Montrer que c'est un espace vectoriel complexe, et en donner une base formée de suites géométriques. En déduire le terme général des suites $x_n$, $y_n$, $z_n$.

(vii) En déduire l'écriture générale de $A^n$.