

## Mathématiques Devoir n°1

À rendre au plus tard le 14 février

**Question 1.** Évaluer les intégrales suivantes :

(a)  $\int_0^1 \frac{t+1}{t^3-t^2+2t+4} dt.$

(b)  $\int_2^3 \frac{t^4+3}{t^3-t^2-t+1} dt.$

(c)  $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\cos t} dt.$

**Question 2.** Intégrales multiples.

(a) Calculer l'aire de  $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 \leq y \leq 2x^2, y^2 \leq x \leq 3y^2\}$  (poser  $u = y/x^2$  et  $v = x/y^2$ ).

(b) Calculer  $\int_D e^{-x^2} dx dy$  sur  $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \geq 0, -x \leq y \leq x\}$ .

(c) Évaluer  $\int_D \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} dx dy$  pour  $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \frac{2}{\pi} \leq x \leq \infty, -\frac{1}{x} \leq y \leq \frac{1}{x}\}$ .

(d) Calculer  $\int_D (x^2 + y^2) dx dy$  où  $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq x, x^2 + y^2 \geq y\}$ .

(e) Calculer le volume du domaine  $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 \leq 4a^2, x^2 + y^2 \leq 2ay\}$  où  $a > 0$ .

(f) Évaluer  $\int_D \frac{x}{x^2 + y^2} dx dy dz$  où  $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$ .

**Question 3.** La vitesse d'un corps en chute libre qui subit une force de frottement turbulente est donnée par l'équation  $v'(t) = g - kv(t)^2$  où  $g, k \in \mathbb{R}_{>0}$ . Trouver  $v(t)$ . Que vaut  $\lim_{t \rightarrow \infty} v(t)$  ?

**Question 4.** Pour chacune des équations différentielles suivantes trouver une solution définie sur  $\mathbb{R}$  et déterminer la solution vérifiant  $y(0) = 1$  :

(a)  $(t^2 + 1)y' + 2ty = t \cos t.$

(b)  $(t^2 + t - 2)y' + (t - 1)y = 2t^2 - t + 3.$