Université Paris-Sud
IFIPS

2006-2007
S1-Math2

Test de Mathématiques

en vue du contrôle en TD, 2ème semaine d'octobre

Pour chacune des assertions 1 à 8, dire si elle est vraie ou fausse. La démontrer ou en donner un contre-exemple.

1. Pour tous réels x et y non nuls, $((x < y) \Leftrightarrow (xy^2 < y^3))$.
2. Pour tous réels x et y, $(x > y > 0) \Leftrightarrow \big(\frac{1}{x} < \frac{1}{y}\big)$.
3. L'assertion $\mathcal{P}$ suivante est vraie.
$$(\forall x \in \mathbf{R})(\forall z \in \mathbf{R}) \quad (((x \leq 1) \text{ et } (z > 0)) \Rightarrow (xz < z)).$$
4. L'assertion $\mathcal{Q}$ suivante est vraie.
$$(\forall x \in \mathbf{R}) \quad ((x \geq 1) \Rightarrow ((\exists z \in \mathbf{R})(xz > z))).$$
5. Soient A, B et C des sous-ensembles d'un ensemble E. Le complémentaire de $A \cup (B \cap C)$ est $\bar{A} \cap (\bar{B} \cup \bar{C})$.
6. Soient A, B et C des sous-ensembles d'un ensemble E. Alors $C \setminus (B \cup A) = (C \setminus A) \setminus B$.
7. Soient A, B et C des sous-ensembles d'un ensemble E. Alors $C \cap (B \setminus A) = (C \cap B) \setminus A$.
8. Soient A, B et C des sous-ensembles d'un ensemble E. Alors $C \cup (B \setminus A) = (C \cup B) \setminus A$.

Les questions 9 à 18 portent sur des manipulations d'assertions. Pour chacune, dire si la manipulation est correcte ou non. Si non, rétablir la conclusion exacte.

9. La négation de $((x^2 \geq 1)$ ou $(x \in \big]\frac{1}{2}, 3\big]))$ est $(x \in \big[-1, \frac{1}{2}\big])$.
10. La négation de l'assertion $\mathcal{P}$ de la question 3 est
$$(\exists x \in \mathbf{R})(\exists z \in \mathbf{R}) \quad (((x \leq 1) \text{ et } (z > 0)) \text{ et } (xz \geq z)).$$
11. La négation de l'assertion $\mathcal{Q}$ de la question 4 est
$$(\exists x \in \mathbf{R}) \quad ((x \geq 1) \text{ ou } ((\forall z \in \mathbf{R})(xz \leq z))).$$
12. La réciproque de $\mathcal{P}$ est l'assertion
$$(\forall x \in \mathbf{R})(\forall z \in \mathbf{R}) \quad ((xz < z) \Rightarrow ((x \leq 1) \text{ ou } (z > 0))).$$
13. La réciproque de $\mathcal{Q}$ est l'assertion
$$(\forall x \in \mathbf{R}) \quad (((\exists z \in \mathbf{R})(xz \leq z)) \Rightarrow (x \geq 1)).$$
14. La contraposée de $\mathcal{P}$ est l'assertion
$$(\forall x \in \mathbf{R})(\forall z \in \mathbf{R}) \quad ((xz \leq z) \Rightarrow ((x > 1) \text{ ou } (z \leq 0))).$$

15. La contraposée de $\mathcal{Q}$ est l'assertion

$$(\forall x \in \mathbf{R}) \quad (((\exists z \in \mathbf{R})(xz \leq z)) \Rightarrow (x < 1)).$$

16. L'assertion *étant donnés trois entiers, si leur produit est non nul, alors chacun d'entre eux est non nul* se traduit par

$$(\forall a \in \mathbf{N})(\forall b \in \mathbf{N})(\forall c \in \mathbf{N})((abc \neq 0) \Rightarrow ((a \neq 0) \text{ et } (b \neq 0) \text{ et } (c \neq 0))).$$

17. L'assertion *une condition nécessaire pour qu'une année soit bissextile est que son millesime soit un multiple de 4* se traduit par

$$\text{L'année } n \text{ est bissextile } \Rightarrow \ n \text{ est un multiple de } 4.$$

18. L'assertion *en S1-IFIPS, il y a dans chaque groupe de TD deux étudiants qui ont leur anniversaire le même jour* se traduit par

$$(\forall i \in \{1, 2, 3\})(\exists x \in G_i)(\exists y \in G_i)((x \neq y) \text{ ou } (\text{anniversaire}(x) = \text{anniversaire}(y))).$$