Université Paris-Sud | 2006-2007
S1-IFIPS | Compléments de Mathématiques

Contrôle continu de Mathématiques 2

17 novembre 2006, durée 2h

Documents et calculettes interdits

Barême indicatif : I=4, II=5, III=2, IV=2, V=7

I

1. Ecrire la contraposée de l'implication suivante et démontrer qu'elle est vraie pour tout y réel.

$$((\forall x \in \mathbf{R})\ (\frac{1}{x^2+1} < y^2)) \Rightarrow ((y > 1) \text{ ou } (y < -1)).$$

2. Quelle est la réciproque de l'assertion précédente ? Est-elle vraie pour tout y réel ? Si oui, la démontrer. Si non, donner un contre exemple.

II

Soit I l'ensemble des étudiants de S1-IFIPS. On note $A \subset I \times I$ l'ensemble des couples (x, y) tels que x et y *ont le même âge*. On rappelle que I est divisé en 3 groupes de TD notés G_1, G_2 et G_3.

Traduire les assertions suivantes par des assertions mathématiques.

1. Il y a un groupe de TD dont tous les étudiants ont le même âge.
2. La négation de l'assertion précédente.
3. Il y a exactement un groupe de TD dont tous les étudiants ont le même âge.
4. Dans chaque groupe de TD on peut trouver un étudiant qui a le même âge que tous les étudiants de l'un des autres groupes.
5. Il y a un groupe de TD tel que tout étudiant de S1-IFIPS ait le même âge que l'un des étudiants de ce groupe.

III

Pour $n \geq 1$, on note u_n la somme des carrés des nombres entiers compris entre 1 et n. Sans calculer u_n, montrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$, $u_n \leq \frac{n(n+1)^2}{3}$.

IV

Soit I l'ensemble des étudiants de S1-IFIPS. On note A l'ensemble des étudiants qui ont une automobile, B celui des étudiants qui jouent au basket, C celui des étudiants qui prennent un café en arrivant à la fac le matin. On considère l'ensemble D des étudiants qui ont une voiture mais ne jouent pas au basket et ne boivent pas de café. On s'intéresse aussi à l'ensemble F des étudiants qui jouent au basket ou bien boivent du café, mais n'ont pas de voiture.

1. Ecrire des formules (ne faisant intervenir que $\cap$, $\cup$, les parties A, B et C et leurs complémentaires) qui définissent D et F.

2. Déterminer $D \cap F$ et $D \cup F$.

V

En vue d'un prochain week-end d'intégration, un étudiant rassemble des titres de chansons démodées, classées par interprète.

Interprète	Titre	Année
J. Clerc	Femmes... je vous aime	1982
J. Clerc	Ma préférence	1978
J. Clerc	Melissa	1984
J.-J. Goldman	Comme toi	1982
J.-J. Goldman	Envole moi	1984
J.-J. Goldman	Je marche seul	1985
J.-J. Goldman	Là bas	1987
J.-J. Goldman	Pas toi	1985
R. Gotainer	Femmes à lunettes	1990
R. Gotainer	Le mambo du décalco	1982
R. Gotainer	Le youki	1990
R. Gotainer	Primitif	1990
E. Mitchell	Couleur menthe à l'eau	1980
E. Mitchell	La dernière séance	1977
Renaud	Dans mon H.L.M	1980
Renaud	Dès que le vent soufflera	1983
Renaud	It is not because you are	1980
Renaud	Laisse béton	1977
Renaud	Mistral gagnant	1986
Renaud	Morgane de toi	1983
Rita Mitsouko	Don't forget the night	1984
Rita Mitsouko	Nuit d'ivresse	1987
Rita Mitsouko	Singing in the shower	1988
H.-F. Thiéfaine	Lorelei sebasto cha	1982

On note T l'ensemble des titres, I celui des interprètes, $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{1977, 1978, \dots,$ $1989,\ 1990\}$. On note $a : T \to A$ l'application qui donne l'année de parution d'une chanson, $i : T \to I$ l'application qui donne l'interprète d'un titre, et $n : I \to X$ l'application qui donne le nombre de chansons par artiste.

1. L'application a est-elle injective ? surjective ? L'application n est-elle injective ? surjective ?

2. Soit E l'ensemble des artistes ayant interprété au moins 4 titres de la liste, dont au moins un en 1988 ou après. On note $Y = \{1988, 1989, 1990\}$ et $Z = \{4, 5, 6\}$. Exprimer E au moyen des opérations image, image réciproque, $\cup$, $\cap$. Faire la liste des éléments de E.

3. L'étudiant souhaite sélectionner une chanson par année entre 1980 et 1990 inclus. Sa sélection consiste en une partie S de T. Quelles conditions doit satisfaire la restriction de a à S ? Une telle sélection est-elle possible ? En sus de celles figurant sur le tableau, l'étudiant a en réserve 2 autres chansons. Cela peut-il suffire pour compléter la sélection ?

4. Soit R un sous-ensemble de T tel que la restriction de a à R est injective. Combien, au maximum, R comporte-t'il d'éléments ? Donner un exemple de sous-ensemble R tel que la restriction de a à R soit injective et ayant le nombre maximal d'éléments.

Université Paris-Sud 2006-2007
S1-IFIPS Compléments de Mathématiques

Corrigé du contrôle continu de Mathématiques 2
17 novembre 2006

I

1. Contraposée.

$$((y \leq 1) \text{ et } (y \geq -1)) \Rightarrow (\exists x \in \mathbf{R})\ (\frac{1}{x^2+1} \geq y^2).$$

Démonstration. Si $y \leq 1$ et $y \geq -1$, alors $|y| \leq 1$. On peut élever au carré les deux membres de cette inégalité entre nombres positifs ou nuls, donc

$$y^2 = |y|^2 \leq 1.$$

Prenons $x = 0$. Alors $\frac{1}{x^2+1} = 1 \geq y^2$. On a donc prouvé, par un exemple, qu'il existe un $x \in \mathbf{R}$ tel que $\frac{1}{x^2+1} \geq y^2$, c.q.f.d.

2. La réciproque est

$$(\forall y \in \mathbf{R})\ (((y > 1) \text{ ou } (y < -1)) \Rightarrow (\forall x \in \mathbf{R})\ (\frac{1}{x^2+1} < y^2)).$$

Elle est vraie. En effet, supposons que $y > 1$ ou $y < -1$. Dans les deux cas, $y^2 > 1$. D'autre part, soit x un réel. $x^2 \geq 0$ entraîne $x^2 + 1 \geq 1$. On peut prendre l'inverse des deux membres de cette inégalité entre réels strictement positifs, à condition de changer le sens de l'inégalité, et il vient $\frac{1}{x^2+1} \leq 1 < y^2$, c.q.f.d.

II

1. $(\exists i \in \{1, 2, 3\})\ (\forall x \in G_i)\ (\forall y \in G_i)\ ((x, y) \in A)$.
2. $(\forall i \in \{1, 2, 3\})\ (\exists x \in G_i)\ (\exists y \in G_i)\ ((x, y) \notin A)$.
3. $(\exists i \in \{1, 2, 3\})\ (((\forall x \in G_i)\ (\forall y \in G_i)\ ((x, y) \in A))$ et $((\forall j \in \{1, 2, 3\} \setminus \{i\})\ (\exists x \in G_j)\ (\exists y \in G_j)\ ((x, y) \notin A)))$.
4. $(\forall i \in \{1, 2, 3\})\ (\exists x \in G_i)\ (\exists j \in \{1, 2, 3\})\ (\forall y \in G_j)\ ((x, y) \in A)$.
5. $(\exists i \in \{1, 2, 3\})\ (\forall x \in I)\ (\exists y \in G_i)\ ((x, y) \in A)$.

III

Notons $\mathcal{P}(n)$ l'assertion $(u_n \leq \frac{n(n+1)^2}{3})$. Remarquons que $u_1 = 1 \leq \frac{4}{3}$, donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Soit $n \geq 1$. Supposons l'assertion $\mathcal{P}(n)$ vraie. Alors

$$\begin{aligned} u_{n+1} - \frac{(n+1)(n+2)^2}{3} &= u_n + (n+1)^2 - \frac{(n+1)(n+2)^2}{3} \\ &\leq \frac{n(n+1)^2}{3} + (n+1)^2 - \frac{(n+1)(n+2)^2}{3} \\ &= \frac{n+1}{3}(n(n+1) + 3(n+1) - (n+2)^2) \\ &= -\frac{n+1}{3} \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

Autrement dit, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

On conclut que l'assertion $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n \geq 1$.

IV

1. $D = A \cap \bar{B} \cap \bar{C}$, $F = \bar{A} \cap (B \cup C)$.

2. Comme $D \subset A$ et $F \subset \bar{A}$, $D \cap F = \emptyset$.

Pour $D \cup F$, il y a plusieurs expressions possibles, comme $D \cup F = ((B \cup C) \setminus A) \cup A \setminus (B \cup C) = (B \cup C) \Delta A$ et $D \cup F = (B \Delta A) \cup (C \Delta A)$.

V

1. a n'est pas injective, car a(Capitaine abandonné)$=$ a(Ville de lumière). a n'est pas surjective, car aucun titre n'est daté de 1976. n n'est pas injective, car n(J. Clerc)$=$ n(Rita Mitsuko). n est surjective, car n(D. Hallyday)$= 1$, n(E. Mitchell)$= 2$, n(J. Clerc)$= 3$, n(R. Gotainer)$= 4$, n(J.-J. Goldman)$= 5$ et n(Renaud)$= 6$.

2. $E = i(a^{-1}(Y)) \cap n^{-1}(Z)$. Sur le tableau, $n^{-1}(Z) =$\{J.-J. Goldman, R. Gotainer, Renaud\}. Parmi ceux-ci, seul R. Gotainer a un titre postérieur à 1990. Par conséquent, $E =$\{R. Gotainer\}.

3. Il faut que la restriction $a_{|S}$ soit injective, et que son image soit $\{1980, \ldots, 1990\}$. C'est impossible, puisque aucun des titres du tableau ne porte le millésime 1981. Il en est de même seulement pour l'année 1989. Par conséquent, avec deux chansons prises hors tableau, il n'est pas impossible de trouver une sélection comportant tous les millésimes de 1980 à 1990. Il suffirait que les deux chansons hors tableau datent de 1981 et 1989 respectivement.

4. Si $a_{|R}$ est injective, alors le nombre d'éléments de R est égal à celui de $a(R)$, donc au plus égal à celui de l'image de a. Or l'image de a compte 11 éléments. Donc R a au plus 11 éléments. Un ensemble à 11 éléments qui convient est \{La dernière séance, Ma préférence, Couleur menthe à l'eau, Femmes... je vous aime, Dès que le vent soufflera, Envole moi, Je marche seul, Mistral gagnant, Là bas, Singing in the shower, Femmes à lunettes\}.