

Analyse de Fourier au sens des fonctions et des distributions

Cours et exercices



Chapitre 1

Séries de Fourier

Des problèmes historiques

Définitions des séries de Fourier

Convergence des séries de Fourier

Dérivation et intégration terme à terme

Phénomène de Gibbs

Formule de Plancherel

Séries de fonctions orthogonales

1.1 Des problèmes historiques

L'idée de représenter une fonction par une série de sinus et cosinus de différentes fréquences remonte au problème des cordes vibrantes résolu par l'encyclopédiste d'Alembert en 1747. Ce point de vue sera repris par Fourier en 1808 dans son mémoire sur la propagation de la chaleur.

Dans ce travail, Fourier montre que la température $T(\vec{r}, t)$ obéit à l'équation aux dérivées partielles :

$$T_t = T_{xx} + T_{yy} + T_{zz}.$$

La situation stationnaire ($T_t = 0$), correspond à une équation de Laplace : $\Delta T = 0$. Fourier commence par considérer un cas stationnaire où il y a invariance par translation selon Oz : $T(\vec{r}, t) = T(x, y, t)$, et cherche une solution dans le domaine défini par $y > 0$ et $0 < x < 1$. Le problème est de déterminer une solution bornée avec les conditions aux limites particulières $T(0, y) = T(1, y) = 0$ et $T(x, 0) = 1$.

Fourier cherche une solution sous forme séparable $T(x, y) = f(x)g(y)$ qui le conduit au système d'équations différentielles

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = -\frac{g''(y)}{g(y)} = -C^2,$$

où C est une constante. On a donc comme solution générale de ces équations :

$$\begin{aligned} f(x) &= A \sin Cx + B \cos Cx, \\ g(y) &= A' e^{+Cy} + B' e^{-Cy} \end{aligned}$$

Comme $T(0, y) = 0$ et que la solution recherchée doit être bornée pour $y \rightarrow \infty$, les solutions sont toutes de la forme $T(x, y) = \sin Cx e^{-Cy}$; la condition aux limites $T(1, y) = 0$ fixe la valeur de C qui vaut $n\pi$ où n est un entier positif. Une solution générale s'écrit donc sous la forme de la série : $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-n\pi y} \sin n\pi x$, où les coefficients a_n sont contraints par la dernière relation $T(x, 0) = 1$.

En utilisant la propriété $\int_0^1 \sin n\pi x \sin m\pi x dx = \delta_{mn}/2$, on trouve $a_n = 4/(n\pi)$ pour n impair et $a_n = 0$ pour n pair. Les a_n étant bornés, la série obtenue est convergente, et on a donc trouvé une solution sous la forme d'une série de sinus qui comprend toutes les harmoniques impaires :

$$T(x, y) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{4}{n\pi} e^{-n\pi y} \sin n\pi x, \quad (x, y) \in [0, 1] \times [0, +\infty[$$

Partant de là, il était naturellement tentant de savoir si le procédé était généralisable, et quelles conditions devait satisfaire une fonction pour qu'on puisse la représenter sur un intervalle par une série trigonométrique. Autrement dit, $a_n(f)$ et $b_n(f)$ étant des coefficients dépendant de la fonction f , quand peut-on écrire

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n(f) \sin n\pi x + b_n(f) \cos n\pi x) \quad ?$$

1.2 Définition des séries de Fourier

Définition 1.2.1 Soit f une fonction de période T , définie sur \mathbb{R} et à valeurs dans \mathbb{R} . On pose $\omega = 2\pi/T$. La série de Fourier associée à la fonction f est la série définie par la relation

$$b_0(f) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(f) \cos n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f) \sin n\omega t \equiv \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{+in\omega t},$$

avec $c_n = (b_n - i a_n)/2$.

Les coefficients de Fourier a_n, b_n et c_n , lorsqu'ils existent, sont définis par les relations

$$\begin{aligned} b_0(f) &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt, \\ b_n(f) &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos n\omega t dt, \\ a_n(f) &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin n\omega t dt, \\ c_n(f) &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-in\omega t} dt. \end{aligned}$$

Pour que les coefficients existent, il n'est pas nécessaire que f soit continue, il suffit que f soit intégrable sur l'intervalle période. On remarquera en particulier que $c_0 = b_0$ et que c_{-n} est la quantité conjuguée de c_n : $c_{-n} = \bar{c}_n$. La définition de ces coefficients est suggérée (en cas de convergence) par *les relations d'orthogonalité* (à démontrer) :

$$\int_0^T \sin m\omega t \sin n\omega t dt = \int_0^T \cos m\omega t \cos n\omega t dt = \frac{T}{2} \delta_{m,n} \quad (m \neq 0),$$

$$\int_0^T \sin m\omega t \cos n\omega t dt = 0, \quad \forall m, n, \in \mathbb{N}$$

Le développement en séries d'exponentielles complexes peut apparaître plus économique. Il est cependant préférable d'utiliser les développements en sinus ou cosinus lorsque les fonctions ont une parité définie. En effet, comme les intégrations peuvent être prises sur l'intervalle symétrique $[-T/2, +T/2]$, les coefficients a_n ou b_n sont nuls selon que la fonction est paire ou impaire. La série de Fourier d'une fonction impaire ne contient donc que des sinus (fonction impaire), et la série de Fourier d'une fonction paire est une série de cosinus (fonction paire).

Il est bon de mentionner qu'on parle parfois de *développement de Fourier sur un intervalle (a, b) pour une fonction non périodique*. Il s'agit en fait du développement de la fonction f_1 , de période $(b - a)$, qui coïncide avec f sur l'intervalle (a, b) . Si la série converge vers la fonction, le développement en série de f n'est pas en général valable en dehors de (a, b) .

1.3 Convergence des séries de Fourier

Il ne suffit malheureusement pas que les coefficients de Fourier existent pour que la série de Fourier converge vers sa fonction. Kolmogorov a même exhibé un exemple de fonction sommable dont la série de Fourier diverge en tout point de l'intervalle période !

En physique, on a souvent affaire à des fonctions assez régulières, et un premier théorème garantissant la convergence dans des conditions pas trop contraignantes est donné par l'énoncé suivant :

Théorème 1.3.1 *Si f est de carré sommable ou si f est de classe C^2 sur l'intervalle période I , la série de Fourier converge (normalement) vers f dans I .*

Si f est C^2 , en intégrant 2 fois par parties, on établit facilement que $|c_n| \leq \sup |f''(t)| / (4\pi^2 n^2)$, ce qui montre que $\sum_n |c_n| < \infty$. On peut justifier que la somme de la série de Fourier construite avec les c_n s'identifie bien avec f .

Il ne suffit pas qu'une fonction soit continue pour que sa série de Fourier converge. Là encore, les mathématiciens ont pu exhiber des exemples (pathologiques) de fonctions continues dont la série de Fourier diverge au moins en un

point de l'intervalle période. On donne maintenant un résultat plus fin dans le cas de fonctions éventuellement discontinues, mais régulière par morceaux.

Définition 1.3.1 Soit I un intervalle de \mathbb{R} . Une fonction f définie sur I et à valeurs dans \mathbb{R} est dite régulière par morceaux sur I , si f est bornée et n'a qu'un nombre fini de discontinuités et d'extrema dans l'intervalle I .

On dit également d'une fonction régulière par morceaux, qu'elle vérifie les conditions de Dirichlet. Par exemple, la fonction $x \mapsto \sin 1/x$ est bornée mais a un nombre infini d'extrema dans tout intervalle qui contient 0 : elle n'est donc pas régulière par morceaux.

Théorème 1.3.2 Soit f une fonction de période T définie sur \mathbb{R} et à valeurs dans \mathbb{R} . On pose $\omega = 2\pi/T$. Si f est régulière par morceaux sur $[0, T]$, alors

- aux points où f est continue :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t} = f(t)$$

- aux points de discontinuité :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \epsilon) + f(t - \epsilon)}{2},$$

Ce théorème montre qu'à la différence des séries de Taylor, il est possible de représenter une fonction discontinue par une série de Fourier (sous les conditions de Dirichlet). On notera en outre que la convergence de la série est uniforme aux points de continuité, mais seulement simple aux points de discontinuité. Cet aspect sera discuté de façon plus approfondie lorsque nous traiterons du phénomène de Gibbs.

1.4 Dérivation et Intégration terme à terme

L'intégration, terme à terme, de la série de Fourier : $\sum_n c_n e^{in\omega t}$, s'écrit

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \int_a^b e^{in\omega t} dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{c_n}{in\omega} e^{in\omega t} \Big|_a^b$$

Le résultat de l'intégration est d'introduire une division par n de chaque coefficient. L'intégration améliore donc la convergence. En conséquence, *une série de Fourier convergente peut toujours être intégrée terme par terme, la série obtenue convergeant vers l'intégrale de la fonction.*

Il est clair au contraire, que la dérivée de la série introduit une multiplication par n de chaque coefficient de Fourier. La convergence s'en trouve dégradée et

peut même être perdue. En conséquence, *on ne peut pas, en général, dériver terme à terme, une série de Fourier convergente.*

On dispose cependant du théorème suivant

Théorème 1.4.1 *Soit f une fonction continue de période T définie sur \mathbb{R} et à valeurs dans \mathbb{R} . On pose $\omega = 2\pi/T$. Si f' est régulière par morceaux sur $[0, T]$, alors*

- *La série de Fourier de f' peut être obtenue en dérivant la série de Fourier de f terme à terme.*
- *aux points où f' est continue :*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (in\omega c_n) e^{+in\omega t} = f'(t)$$

- *aux points où f' est discontinue :*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (in\omega c_n) e^{+in\omega t} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f'(t + \epsilon) + f'(t - \epsilon)}{2},$$

1.5 Phénomène de Gibbs

Le phénomène de Gibbs concerne l'étude du développement en série de Fourier au voisinage d'un point de discontinuité.

Pour le mettre en évidence, considérons la fonction de période 2, définie sur $] - 1, 1[$ par

$$f(x) = \begin{cases} -1 & -1 < x < 0 \\ +1 & 0 < x < 1, \end{cases}$$

On montrera en TD que le créneau carré admet pour développement en série de Fourier

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)\pi x}{2n-1},$$

éventuellement valable sur tout \mathbb{R} si on demande en outre que $f(0) = f(1) = 0$.

La figure (1.1) représente ce développement lorsqu'on retient 10 et 50 termes. On constate que loin du point de discontinuité (pour $x = 0.5$, par exemple), un nombre plus grand de termes améliore la convergence (ici vers 1), tandis qu'un phénomène de rebond apparaît au voisinage du point de discontinuité. L'amplitude du rebond ne semble pas se réduire lorsqu'on augmente le nombre de termes de la série. Ce phénomène fut observé par Michelson lors de la mise au point d'un analyseur harmonique et expliqué par J. W. Gibbs.

La raison mathématique de ce comportement surprenant tient dans le fait que la convergence *uniforme* de la série de Fourier vers la fonction est garantie aux points où la fonction est continue, mais perdue aux points de discontinuités.

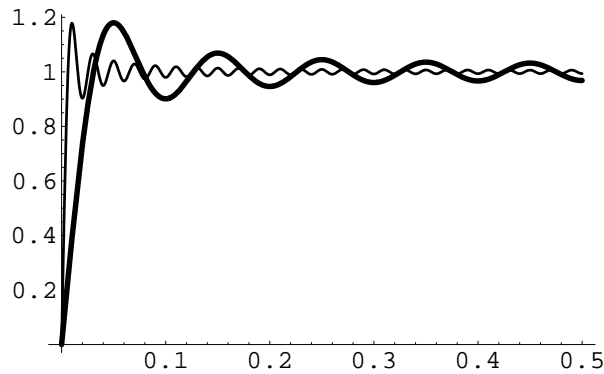


FIG. 1.1 – Série de Fourier du créneau carré avec 10 termes (trait épais) et 50 termes (trait fin).

Considérons la somme finie à N termes correspondant à la série de Fourier

$$g(x, N) \equiv \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^N \frac{\sin(2n-1)\pi x}{2n-1}.$$

Il est facile de montrer (le faire!) que :

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 2 \frac{\sin 2N\pi x}{\sin \pi x}$$

Le premier extremum de g (un maximum, en fait) apparaît donc en $x = 1/2N$. Calculons la valeur de g en ce point. Comme $g(0, N) = 0$, on a

$$g\left(\frac{1}{2N}, N\right) = 2 \int_0^{1/2N} \frac{\sin 2N\pi x}{\sin \pi x} dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin z}{2N \sin(z/2N)} dz.$$

Ainsi, même lorsque $N \rightarrow \infty$, la somme dépasse systématiquement la valeur attendue (1) puisque :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} g\left(\frac{1}{2N}, N\right) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin z}{z} dz \approx 1.17898,$$

en accord avec le résultat numérique.

On notera qu'il n'en reste pas moins vrai que la série converge (simplement, donc) vers la demi-somme des valeurs à droite et à gauche du point de continuité, c'est-à-dire ici vers 0.

1.6 Exercices

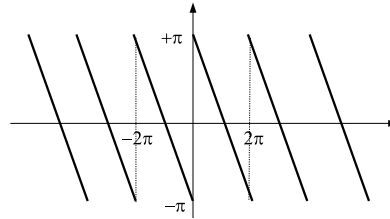
Exercice 1.1 On considère la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(t) = |\sin \alpha t|,$$

où α est une constante positive.

1. Représenter schématiquement cette fonction et préciser sa parité.
2. Le développement en série de Fourier contiendra-t-il toutes les harmoniques en sinus et cosinus ?
3. Donner le développement en série de Fourier de la fonction f .

Exercice 1.2 On considère la fonction f , de période 2π , égale à $f(x) = \pi - x$ si $0 < x < 2\pi$.



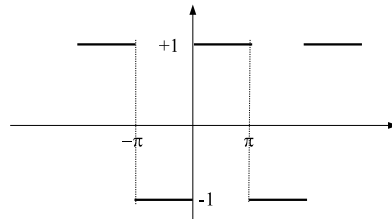
1. Quelle est la parité de cette fonction ?
2. Montrer que le développement de f en série de Fourier s'écrit :

$$f(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}.$$

Préciser pour quelles valeurs de x ce développement est-il valable.

3. Comment faudrait-il compléter la définition de f pour que le développement précédent soit valable sur tout \mathbb{R} .

Exercice 1.3 Calculer le développement en série de Fourier de la fonction 2π périodique qui vaut -1 pour $t \in]-\pi, 0[$, et $+1$ pour $t \in]0, \pi[$.



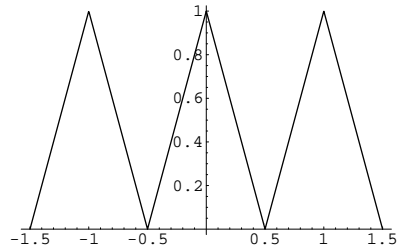
Exercice 1.4 Montrer que le développement en série de Fourier de la fonction $x \mapsto \cos ax$ entre $-\pi$ et $+\pi$, avec a réel non entier s'écrit :

$$\cos ax = \frac{2a \sin \pi a}{\pi} \left(\frac{1}{2a^2} - \frac{\cos x}{a^2 - 1^2} + \frac{\cos 2x}{a^2 - 2^2} - \dots \right).$$

Exercice 1.5 On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} , de période $T = 1$, telle que $f(t) = 1 - 2|t|$ pour $t \in [-1/2, +1/2]$.

1. Quelle est sa parité ?

2. Déterminer le développement en série de Fourier de f . On précisera le domaine sur lequel ce développement est valable.
3. Représenter la fonction dérivée f' .
4. Peut-on obtenir le développement en série de Fourier de f' par dérivation terme à terme du développement en série de Fourier de f ? Justifier votre réponse.
5. Déterminer le développement en série de Fourier de f' .



Chapitre 2

Transformation de Fourier

Motivations

Transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$

Dérivation et Inversion

Convolution

Transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$

Transformées à plusieurs variables

Applications aux équations différentielles à coefficients constants

2.1 Motivations

Les phénomènes physiques ne se restreignent évidemment pas aux phénomènes périodiques, et il est très naturel de se poser la question de la représentation des phénomènes physiques non périodiques par un analogue des séries de Fourier. La transformation de Fourier joue précisément ce rôle. La transformée de Fourier de la fonction f est la fonction \hat{f} , définie pour $\xi \in \mathbb{R}$ par :

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i2\pi\xi x} f(x) dx, \quad (2.1)$$

Sous certaines conditions que l'on précisera plus loin, on dispose de la formule d'inversion qui exprime la fonction f comme une superposition de contributions en " fréquences " ξ :

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{i2\pi\xi x} \hat{f}(\xi) d\xi. \quad (2.2)$$

$\hat{f}(\xi)$ représente donc l'amplitude de la sinusoïde de fréquence ξ dans f .

Il est important de réaliser que la transformation de Fourier est une application qui associe une fonction f à une autre fonction \hat{f} : c'est-à-dire *une application fonctionnelle*. Il est bon de s'interroger sur les types de fonctions que le physicien est amené à utiliser le plus souvent. En physique des milieux continus, par exemple, il est commode d'introduire des densités des grandeurs

physiques considérées ; ainsi on parle fréquemment de densité de masses, de quantité de mouvement ou d'énergie ¹. Par exemple, la relation :

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2} \epsilon_0 |\mathbf{E}(x)|^2 dx < \infty,$$

où $\mathbf{E}(x)$ représente le champ électrostatique, exprime le caractère fini de l'énergie électrique totale. Mathématiquement, cela revient à dire que la fonction $x \mapsto \mathbf{E}(x)$ doit être de carré sommable. Un autre exemple important du même genre de contrainte intervient en physique microscopique lorsqu'on adopte un point de vue probabiliste pour décrire une particule quantique dans son espace des phases. On associe à la particule, une "fonction d'onde" ψ , dont le carré représente une densité de probabilité. La condition de normalisation de la probabilité (la particule doit être quelque part) :

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\psi(x)|^2 dx = 1$$

montre que la fonction d'onde ψ doit être de carré sommable.

Dans ce chapitre, on se limitera² à définir et à étudier les propriétés des fonctions de puissance p sommable ($p = 1, 2$), définies sur \mathbb{R}^n . Plus précisément :

Définition 2.1.1 Une fonction f , définie dans \mathbb{R} et à valeurs dans \mathbb{C} , est de puissance p -sommable, si l'on a

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx < \infty$$

On note $L^p(\mathbb{R})$, l'espace des fonctions de puissance p -sommable.

On vient de présenter la transformation de Fourier, comme une représentation intégrale exprimée sur une base de fonctions sinusoïdales. Le contenu physique d'une telle décomposition est clair, et l'on peut facilement imaginer que la transformation de Fourier jouera un rôle déterminant dans tous les phénomènes physiques mettant en jeu des périodicités spatiales ou temporelles, et plus généralement des longueurs ou temps caractéristiques.

Ainsi, pour donner quelques exemples, tous les phénomènes de diffusion de rayonnement (lumière, rayons X, mais aussi électrons ou neutrons via la dualité onde corpuscule) sont susceptibles d'une analyse reposant sur la transformation de Fourier ; plus précisément, l'amplitude diffusée³ $A(\mathbf{k})$:

$$A(\mathbf{k}) \propto \int_{\mathbb{R}^3} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \rho(\mathbf{r}) d\mathbf{r},$$

¹ c'est-à-dire la masse, la quantité de mouvement ou l'énergie contenue dans le petit élément de volume dx

² Un cadre plus confortable pour les besoins de la physique nécessiterait l'étude de la transformation de Fourier au sens des distributions.

³ dans le cadre de l'approximation de Fraunhofer.

où $\rho(\mathbf{r})$ représente la densité de particules diffusantes. De là, on déduit facilement que l'intensité s'exprime comme la transformée de Fourier d'un produit de convolution (cette notion sera définie plus loin).

La transformation de Fourier, continue ou discrète, est également l'outil de base pour *le traitement de l'information numérique*. Le traitement du signal analogique repose essentiellement sur l'utilisation de circuits électroniques qui fonctionnent mathématiquement comme des opérateurs linéaires diagonalisables par transformation de Fourier. Le traitement du signal discret a été rendu possible par la mise au point d'algorithmes rapides de calcul de transformées de Fourier discrètes. La transformation de Fourier est cependant limitée à une analyse globale soit en temps, soit en fréquence. Les signaux complexes doivent être analysés par des outils plus sophistiqués que les filtres linéaires. Le développement récent du traitement de l'information a conduit à une analyse utilisant des transformées de Fourier à fenêtre et aux célèbres "ondelettes".

Les équations décrivant les phénomènes physiques s'expriment bien souvent par des équations différentielles ou par des équations aux dérivées partielles. Dans le cas où les opérateurs associés sont linéaires et à coefficients constants, il est possible d'utiliser la transformation de Fourier pour diagonaliser ces opérateurs. Parmi celles-ci on peut citer :

– l'équation de Poisson :

$$\Delta\phi(x) = -\frac{\rho(x)}{\epsilon_0}$$

– l'équation de la diffusion :

$$\frac{\partial c(x,t)}{\partial t} - D \frac{\partial^2 c(x,t)}{\partial x^2} = 0$$

– l'équation de Schrödinger libre :

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi(x,t)$$

– l'équation des ondes :

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 0$$

Par transformée de Fourier, on se ramène à l'étude d'équations algébriques, ce qui est, bien sûr, considérablement plus simple. Bien que le cadre confortable de travail pour l'étude par transformée de Fourier des équations de la Physique, soit celui, plus général, des distributions, on donnera quelques exemples d'applications à la fin de cette partie du cours.

2.2 Transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$

Définition 2.2.1 Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, on appelle transformée de Fourier de f , la fonction, à valeurs complexes, notée \hat{f} ou $\mathcal{F}(f)$, définie pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ par :

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i2\pi\xi x} f(x) dx$$

on a bien sûr :

$$|\hat{f}(\xi)| = \left| \int_{\mathbb{R}} e^{-i2\pi\xi x} f(x) dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |e^{-i2\pi\xi x} f(x)| dx = \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx < \infty$$

d'où l'on déduit que la transformée de Fourier d'une fonction sommable est une fonction bornée.

En physique, x représente soit une variable d'espace, soit le temps. La variable conjuguée ξ s'identifiera alors à un vecteur d'onde ou à une pulsation.

Il existe d'autres *conventions de définition* ; par exemple :

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} f(x) dx, \quad \text{ou} \quad \hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} f(x) dx.$$

Avec ces définitions de la transformation de Fourier, il n'apparaît pas de facteur 2π dans la formule d'inversion (voir plus loin), mais il en apparaît soit dans la dérivation, soit dans la convolution.

Premiers exemples

Donnons tout de suite quelques exemples de transformées de Fourier de fonctions sommables couramment utilisées en Physique. Il s'agit des fonctions "porte" ou de ses généralisations et des exponentielles décroissantes à support limité ou non limité.

La fonction caractéristique $\mathbf{1}_{[a,b]}$ de l'intervalle $[a, b]$ est la fonction qui vaut l'unité dans l'intervalle et 0 ailleurs, soit :

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_{[a,b]}(x) &= 1 \quad \text{pour } x \in [a, b] \\ &= 0 \quad \text{ailleurs.} \end{aligned}$$

On notera Π la fonction caractéristique de l'intervalle $[-1/2, +1/2]$: c'est la fonction "porte" couramment utilisée en théorie du signal. On notera également H , la fonction dite de Heaviside, c'est-à-dire la fonction caractéristique de l'intervalle $[0, \infty[$.

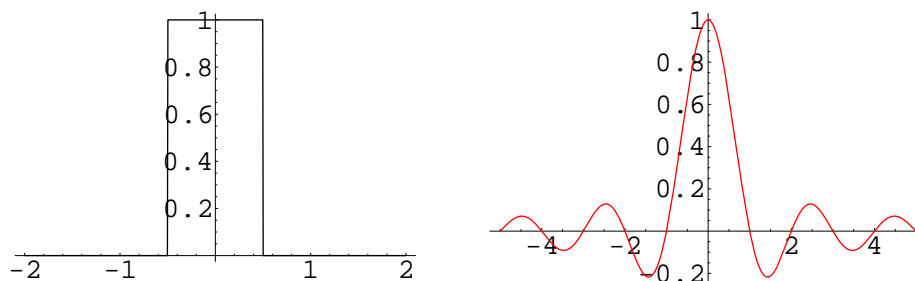


FIG. 2.1 – Fonction porte et sa transformée de Fourier.

Exercice 2.1 *Etablir les résultats suivants par un calcul direct :*

$$\begin{aligned} f(x) = \Pi(x) &\Rightarrow \hat{f}(\xi) = \frac{\sin \pi \xi}{\pi \xi}, \\ f(x) = e^{-\alpha|x|} &\Rightarrow \hat{f}(\xi) = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + 4\pi^2\xi^2} \quad \text{pour } \alpha > 0, \\ f(x) = H(x) e^{-\alpha x} &\Rightarrow \hat{f}(\xi) = \frac{1}{\alpha + i2\pi\xi} \quad \text{pour } \alpha > 0, \end{aligned}$$

où $x \in \mathbb{R}$, Π la fonction indicatrice de l'intervalle $[-1/2, +1/2]$ et H est la fonction de Heaviside.

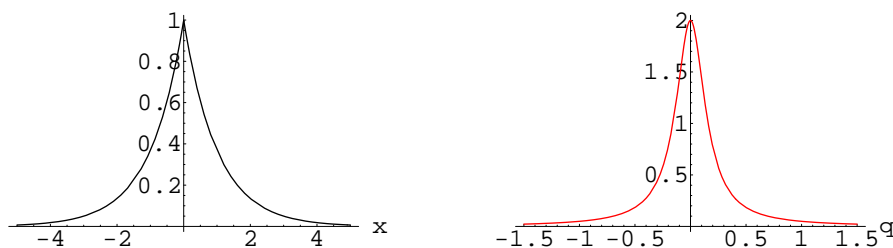


FIG. 2.2 – Fonction $x \mapsto e^{-|x|}$ et sa transformée de Fourier.

Propriétés

Les propriétés qui suivent découlent immédiatement de la définition de la transformation de Fourier (TD).

1. Conservation de la parité.
si f est une fonction paire (resp. impaire), alors \hat{f} est une fonction paire (resp. impaire).
2. Echange de la réalité et de la symétrie hermitienne.
*si f est une fonction réelle, alors $\hat{f}(-\xi) = \overline{\hat{f}(\xi)}$,
 si $f(-x) = \overline{f(x)}$, alors \hat{f} est une fonction réelle.*
3. Echange de la translation et de la modulation.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f(x - x_0)) &= e^{-i2\pi x_0 \xi} \hat{f}(\xi), \\ \mathcal{F}(e^{i2\pi x \xi_0} f(x)) &= \hat{f}(\xi - \xi_0) \end{aligned}$$

4. Dilatation.

$$\mathcal{F}(f(x/\lambda)) = |\lambda| \hat{f}(\lambda \xi) \quad \text{pour } \lambda \text{ réel non nul}$$

La propriété de dilatation est l'une des propriétés les plus importantes de la transformée de Fourier ; elle traduit le fait que la transformée de Fourier d'une fonction large est une fonction étroite et réciproquement. Cela se manifeste très souvent en Physique ; en optique par exemple, la tache de diffraction créée par un diaphragme circulaire est d'autant plus étendue que le rayon de l'orifice est petit.

Exercice 2.2 1. *Etablir la propriété :*

$$\mathcal{F} \left[e^{i2\pi x \xi_0} f(x) \right] (\xi) = \mathcal{F} [f(x)] (\xi - \xi_0).$$

En déduire la transformée de Fourier de la fonction $x \mapsto \cos(2\pi\beta x)e^{-\alpha|x|}$ ($\alpha, \beta > 0$) et la représenter sur un schéma.

2. *Etablir la propriété (de dilatation) :*

$$\mathcal{F} [f(x/\lambda)] (\xi) = |\lambda| \mathcal{F} [f(x)] (\lambda\xi)$$

Une autre convention de définition de la transformation de Fourier est $\mathcal{F}[f(x)](\xi) = \int_{\mathbb{R}} dx f(x) e^{-i\xi x}$. Utilisez la propriété précédente pour calculer $\mathcal{F}[\Pi(x)](\xi)$ avec cette convention.

Le théorème fondamental de la transformée de Fourier est le théorème suivant dit *lemme de Riemann-Lebesgue*

Théorème 2.2.1 *La transformée de Fourier d'une fonction sommable est bornée, continue et tend vers 0 à l'infini.*

On a déjà montré plus haut que la transformée de Fourier était bornée. La continuité de \hat{f} résulte des égalités

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \hat{f}(\xi + \eta) = \int_{\mathbb{R}} \lim_{\eta \rightarrow 0} \left[f(x) e^{-i(2\pi\xi + \eta)x} \right] dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i2\pi\xi x} dx = \hat{f}(\xi),$$

où la permutation de la limite et du signe intégral est justifiée.⁴

Pour montrer que \hat{f} tend vers 0 à l'infini, on approche f par une fonction en escalier g qui satisfait $\int_{\mathbb{R}} |f(x) - g(x)| dx < \epsilon$, ϵ étant un nombre aussi petit qu'on le désire. g étant une fonction en escalier est une combinaison linéaire de fonctions portes translatées, on a donc $|\hat{g}(\xi)| < \epsilon$, pour ξ assez grand. La linéarité de l'intégrale jointe à l'inégalité triangulaire permettent d'écrire :

$$|\hat{f}(\xi)| = |\widehat{(f-g)}(\xi) + \hat{g}(\xi)| \leq |\widehat{(f-g)}(\xi)| + |\hat{g}(\xi)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x) - g(x)| dx + |\hat{g}(\xi)|,$$

qui peut donc être rendu aussi petit qu'on le désire pour ξ assez grand.

On notera en particulier que la transformation de Fourier est une opération "régularisante" puisqu'elle rend continue une fonction qui ne l'est pas forcément (le cas de la porte, par exemple).

2.3 Dérivation et Inversion

1. Dérivation

⁴une application du théorème de la convergence dominée ..

Les deux théorèmes de cette section traduisent les deux idées réciproques suivantes : plus une fonction est dérivable, plus sa transformée de Fourier décroît vite à l'infini, plus une fonction décroît vite à l'infini, plus sa transformée de Fourier est dérivable.

Commençons par un résultat sur la transformée de Fourier de la dérivée d'une fonction :

Théorème 2.3.1 *Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, de classe C^1 dont la dérivée est sommable, alors*

$$\widehat{f}'(\xi) = 2i\pi\xi \widehat{f}(\xi)$$

et donc,

$$|\xi| \widehat{f}(\xi) \rightarrow 0 \quad \text{pour } \xi \rightarrow \infty.$$

Pour retenir ce résultat, il suffit d'intégrer par parties

$$\mathcal{F}(f'(x)) = \int_{\mathbb{R}} f'(x) e^{-i2\pi\xi x} dx = \left[f(x) e^{-i2\pi\xi x} \right]_{-\infty}^{+\infty} + i2\pi\xi \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i2\pi\xi x} dx$$

qui donne donc le résultat puisque $f(\pm\infty) = 0^5$. Le comportement à l'infini est une conséquence du lemme de Riemann-Lebesgue appliqué à \widehat{f}' .

Pour la dérivée de la transformée de Fourier d'une fonction, on a :

Théorème 2.3.2 *Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $x \rightarrow xf(x)$ soit sommable, alors*

$$\frac{d\widehat{f}}{d\xi}(\xi) = -\mathcal{F}(2i\pi xf)(\xi)$$

et donc f est de classe C^1 .

Ce résultat découle des égalités

$$\frac{d\widehat{f}}{d\xi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \frac{d}{d\xi} \left(f(x) e^{-i2\pi\xi x} \right) dx = \int_{\mathbb{R}} (-i2\pi x f(x)) e^{-i2\pi\xi x} dx = \mathcal{F}(-i2\pi x f(x)),$$

où là encore, il faudrait justifier de l'inversion de la dérivée et du signe intégral.

Ces 2 résultats se généralisent aisément aux dérivées d'ordre plus élevées.

Exercice 2.3 *En s'inspirant des théorèmes 2.3.1 et 2.3.2, établir la formule donnant la dérivée d'ordre n de la transformée de Fourier d'une fonction, et celle donnant la transformée de Fourier de la dérivée d'ordre n d'une fonction.*

On s'attachera à préciser les conditions requises pour l'application de ces théorèmes.

Exercice 2.4 (a) *Montrer que la fonction $\xi \mapsto \widehat{f}(\xi) \equiv \mathcal{F}(e^{-x^2})(\xi)$ vérifie l'équation différentielle :*

$$\widehat{f}'(\xi) + 2\pi^2\xi\widehat{f}(\xi) = 0.$$

⁵ $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(y) dy$, donc $f(\pm\infty)$ existe puisque f' est sommable. De plus $f(\pm\infty)$ doit être nul, faute de quoi f ne serait pas sommable.

- (b) Calculer $\hat{f}(0)$ puis déterminer la solution de l'équation différentielle.
 (c) Utiliser la propriété de dilatation pour établir le résultat :

$$\mathcal{F}(e^{-ax^2})(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\pi^2 \xi^2 / a} \quad \text{pour } a > 0.$$

2. Inversion

Nous avons vu comment \hat{f} s'exprime en fonction de f à la seule condition que f soit sommable. On se pose maintenant la question de savoir s'il est possible de définir f en fonction de \hat{f} : c'est le problème de l'inversion de la transformation de Fourier. On a le résultat suivant :

Théorème 2.3.3 Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, on a alors

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{+i2\pi x \xi} \hat{f}(\xi) d\xi$$

Ainsi, tant qu'on reste dans L^1 , l'inversion n'est possible que si f et \hat{f} sont toutes les deux sommables. On peut montrer que l'on a pas mieux concernant cette propriété d'inversion dans L^2 . Le recours aux distributions dites tempérées pour lesquelles on sait définir une transformation de Fourier lève en partie ces contraintes.

2.4 Convolution

Dans cette section on définit le produit de convolution de deux fonctions sommables, et l'on montre que la transformation de Fourier échange le produit de convolution et la multiplication. Cette dernière propriété est d'une importance fondamentale dans les applications comme nous le verrons dans la suite.

Définition 2.4.1 Soient f et g des fonctions sommables, le produit de convolution, noté $f \star g$, est défini par

$$(f \star g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y) dy$$

Pour bien saisir cette définition, on pourra essayer de convoluer 2 portes identiques : le résultat est une fonction ayant la forme d'un triangle.

Comme premier exemple, considérons le potentiel électrostatique créé en un point \mathbf{r} par une distribution de charge volumique $\rho(\mathbf{r})$ contenue dans un volume \mathcal{V} , on a :

$$V(r) = \int_{\mathcal{V}} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' = \left(\frac{1}{r} \star \rho_{\mathcal{V}}\right)(\mathbf{r}),$$

où $\rho_{\mathcal{V}}$ est la fonction égale à ρ sur \mathcal{V} et nulle ailleurs. Cette formule peut être interprétée comme la réponse du milieu étudié à la perturbation électrique localisée $\rho(\mathbf{r})$. La fonction a dans ce cas est le potentiel électrique créé par une charge ponctuelle.

On pourra vérifier aisément que le produit de convolution des fonctions sommables possède les propriétés de commutativité, associativité et distributivité par rapport à l'addition, soit :

$$\begin{aligned} f \star g &= g \star f, \\ f \star (g \star h) &= (f \star g) \star h, \\ f \star (ag + bh) &= a(f \star g) + b(f \star h) \quad \text{pour } a, b \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Le théorème le plus utile pour les applications est le théorème suivant qui montre que la transformation de Fourier remplace un produit de convolution par une multiplication.

Théorème 2.4.1 *Soient f et g sommables, alors $f \star g$ est sommable et,*

$$\widehat{f \star g} = \hat{f} \hat{g},$$

qui se démontre en écrivant les définitions de chaque membre. Si f et g sont deux fonctions sommables, leur produit n'est en général pas sommable, ce qui ne permet pas toujours de définir $\mathcal{F}(fg)$. Par contre, on verra plus loin qu'on peut démontrer une formule réciproque dans L^2 .

Le produit de convolution intervient fréquemment dans l'analyse des systèmes linéaires et homogènes. Une situation assez générique consiste en effet à exciter un système par une fonction extérieure, que nous noterons $x \mapsto e(x)$ et à mesurer la réponse $r(x)$ du système. Dans le cadre de notre étude, on supposera e et r sommables. Le système physique étudié est dit *linéaire et homogène* si l'on peut définir un opérateur $\mathcal{L} : e \mapsto r = \mathcal{L}(e)$, qui satisfait aux deux propriétés suivantes :

- $\mathcal{L}(\alpha e_1(x) + \beta e_2(x)) = \alpha \mathcal{L}(e_1(x)) + \beta \mathcal{L}(e_2(x))$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
- $\mathcal{L}(e(x - x_0)) = r(x - x_0)$

La convolution permet de construire aisément un opérateur linéaire et homogène. On montre en effet, que si la réponse du système s'écrit sous la forme $r = \mathcal{L}(e) = a \star e$, où a une fonction sommable, l'opérateur \mathcal{L} est bien linéaire et homogène. Toute l'information sur le système est alors contenue dans la fonction a qu'il importe de déterminer.

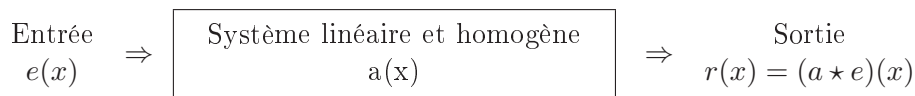


FIG. 2.3 – Effet de filtre d'un système linéaire et homogène.

Le théorème sur la transformée de Fourier du produit de convolution permet de calculer la réponse $r = a \star e$ d'un système linéaire et homogène. En effet la transformée de Fourier donne $\hat{r} = \hat{a} \hat{e}$, c'est-à-dire que chaque composante $\hat{e}(\xi)$ du signal d'entrée se trouve multipliée (amplifiée ou atténuée) par un coefficient $\hat{a}(\xi)$. Le système fonctionne donc comme *un filtre fréquentiel*, la fonction a est appelée la fonction de transfert du filtre. Comme exemples concrets de systèmes physiques homogènes et linéaires, on peut penser aux circuits électriques

constitués d'éléments passifs (résistance, bobine et capacité) qui, correctement combinés, ont effectivement des fonctions de filtres.

Exercice 2.5 On considère les gaussiennes de "largeur" $\ell_a = a^{-1/2}$ définies par :

$$f_a(x) = e^{-ax^2} \quad a > 0.$$

1. Après avoir rappelé l'expression de \hat{f}_a , montrer que l'on peut utiliser la formule d'inversion pour retrouver f_a à partir de \hat{f}_a .
2. a et b étant 2 réels positifs, calculer $f_a \star f_b$, et en déduire la relation :

$$f_a \star f_b = \sqrt{\frac{\pi}{a+b}} f_{\frac{ab}{a+b}}.$$

3. Etudier le cas où $\ell_a \gg \ell_b$ et en déduire l'approximation :

$$f_a \star f_b \approx \sqrt{\frac{\pi}{b}} f_a \quad \text{pour } \ell_a \gg \ell_b,$$

c'est-à-dire que la convolution d'une fonction large et d'une fonction étroite est une fonction large.

2.5 Transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$

On a déjà signalé, aussi bien pour des raisons physiques que mathématiques, que le cadre des fonctions sommables est beaucoup trop étroit pour un usage commode des transformées de Fourier. Comme il n'existe pas de relation d'inclusion⁶ entre $L^1(\mathbb{R})$ et $L^2(\mathbb{R})$ on peut, par exemple, être amené à rencontrer des fonctions qui appartiennent à L^2 sans appartenir à L^1 . Dans ce cas, il n'est plus possible de définir la transformée de Fourier par une formule intégrale, puisque cette dernière expression n'a aucun sens. Un autre cas problématique est celui des fonctions sommables dont la transformée de Fourier n'est pas sommable mais de carré sommable. Dans ce cas, on ne peut utiliser la formule d'inversion, ce qui est très limitant dans la pratique.

Au début de ce siècle, Plancherel a pu étendre les résultats connus sur la transformation de Fourier des fonctions sommables aux fonctions de carré sommable, plus quelques autres que nous mentionnons dans la suite.

Sans rentrer dans le détail, contentons nous de dire que la transformée de Fourier-Plancherel d'une fonction de L^2 est définie comme une limite de transformées de Fourier de fonctions appartenant à $L^1 \cap L^2$.

On a signalé dans une section précédente, que l'on ne pouvait pas en général définir \widehat{fg} pour f et g dans L^1 . Mais dans L^2 , on a

⁶Les exemples standards sont $x \mapsto e^{-x^2}/\sqrt{x} \in L^1 \notin L^2$, $x \mapsto e^{-x^2} \in L^1 \cap L^2$, mais $x \mapsto (x^2 + 1)^{-1/2} \in L^2 \notin L^1$.

Théorème 2.5.1 Soient f et g deux fonctions de $L^2(\mathbb{R})$. Alors :

$$\widehat{fg} = \hat{f} \star \hat{g}$$

A titre d'exercice, vous pouvez essayer de vérifier ce théorème dans le cas particulier où on peut utiliser la représentation intégrale.

Le résultat le plus important est la *formule de Parseval-Plancherel* :

Théorème 2.5.2 Soient f et g deux fonctions de $L^2(\mathbb{R})$. Alors :

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)} dx = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)} d\xi$$

En effet $\int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)} dx \equiv \widehat{f\overline{g}}(0) = \hat{f}(0) \star \widehat{\overline{g}}(0)$ par le théorème précédent. Le résultat est obtenu en observant que $\widehat{\overline{g}}(-\eta) = \overline{\hat{g}(\eta)}$ (à vérifier!).

Dans le cas particulier où $f = g$, la formule de Parseval-Plancherel s'écrit

$$\int |f(x)|^2 dx = \int |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi.$$

Lorsque f représente l'amplitude d'une onde ou d'une déformation, ce résultat exprime que l'énergie totale associée peut être calculée de façon équivalente dans l'espace des positions ou dans l'espace des fréquences.

Exercice 2.6 Utiliser la formule de Parseval-Plancherel pour calculer les intégrales suivantes :

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n dx \quad \text{pour } n = 2, 3, 4.$$

Exercice 2.7 1. Calculer la transformée de Fourier de la fonction

$$x \rightarrow \frac{1}{1+x^2},$$

et en déduire la transformée de Fourier de la fonction

$$x \rightarrow \frac{x}{1+x^2}.$$

2. Après avoir étudié la parité des deux fonctions précédentes, calculer :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos mx}{1+x^2} dx \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \frac{x \sin mx}{1+x^2} dx \quad \text{pour } m > 0.$$

3. Utiliser la formule de Parseval-Plancherel pour calculer les intégrales :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx$$

2.6 Transformées à plusieurs variables.

$\xi \cdot x$ désignant le produit scalaire dans \mathbb{R}^n , soit $\xi \cdot x = x_1 \xi_1 + \dots + x_n \xi_n$ si $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, on a la définition.

Définition 2.6.1 Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, on appelle transformée de Fourier de f , la fonction, à valeurs complexes, notée \hat{f} ou $\mathcal{F}(f)$, définie pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$ par :

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i2\pi\xi \cdot x} f(x) dx$$

On dispose dans \mathbb{R}^n des mêmes résultats que ceux obtenus dans les sections précédentes pour les fonctions à une variable. On discute maintenant 2 cas importants pour lesquels on peut obtenir des formules explicites.

1. Fonctions séparables

Un cas particulièrement simple est le cas des fonctions séparables, qui s'écrivent comme un produit de fonctions à une variable : $f(x) \equiv \prod_{i=1}^n f_i(x_i)$. Si chaque fonction f_i est sommable dans \mathbb{R} , on a simplement :

$$\hat{f}(\xi) = \prod_{i=1}^n \hat{f}_i(x_i)$$

puisque $e^{-i2\pi\xi \cdot x} = \prod_{i=1}^n e^{-i2\pi\xi_i x_i}$.

2. Fonctions radiales

Les fonctions radiales, d'un usage très fréquent en Physique, sont des fonctions qui ne dépendent que de la distance à l'origine. On a donc dans ce cas :

$$f(x) = F(r) \quad \text{où} \quad r \equiv (x_1 + \dots + x_n)^{1/2}$$

Montrons d'abord que si f est radiale alors \hat{f} aussi. Si f est radiale cela veut dire que n'importe quelle rotation \mathcal{R} centrée sur l'origine est telle que $f(\mathcal{R}x) = f(x)$ pour tout x . Montrons alors que $\hat{f}(\mathcal{R}\xi) = \hat{f}(\xi)$.

$$\hat{f}(\mathcal{R}\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i2\pi\mathcal{R}\xi \cdot x} f(x) dx$$

Or, $\mathcal{R}\xi \cdot x = \xi \cdot \mathcal{R}^{-1}x$, de sorte qu'en effectuant le changement de variable $y = \mathcal{R}^{-1}x$, de jacobien égal à 1, on a

$$\hat{f}(\mathcal{R}\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i2\pi\xi \cdot y} f(\mathcal{R}y) dy = \hat{f}(\xi),$$

puisque $f(\mathcal{R}y) = f(y)$ par hypothèse

Posons $\rho \equiv (\xi_1 + \dots + \xi_n)^{1/2}$, il existe donc une fonction G telle que $\hat{f}(\xi) = G(\rho)$. On va montrer que G s'exprime en fonction de F . On peut toujours choisir un système d'axes orthonormés, de telle sorte que $\xi = (0, \dots, \xi_n)$

(ξ étant donné, cela revient à placer l'axe Ox_n dans la direction du vecteur ξ), alors, puisque $\rho = \xi_n$ et $f(x) = F(r)$:

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i2\pi\xi_n x_n} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i2\pi\rho x_n} F(r) dx = G(\rho)$$

La suite du calcul dépend de la dimension (le faire!) :

$$\begin{aligned} G(\rho) &= 2 \int_0^\infty \cos(2\pi\rho r) F(r) dr \quad \text{pour } n = 1, \\ G(\rho) &= 2\pi \int_0^\infty r J_0(2\pi\rho r) F(r) dr \quad \text{pour } n = 2, \\ G(\rho) &= \frac{2}{\rho} \int_0^\infty r \sin(2\pi\rho r) F(r) dr \quad \text{pour } n = 3, \end{aligned}$$

où on a introduit la fonction de Bessel $J_0(u)$ définie par la relation $J_0(u) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-iu \cos \theta} d\theta$.

Exercice 2.8 Soit (x, y, z) un élément de \mathbb{R}^3 ; on pose $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$.

Calculer la transformée de Fourier de la fonction :

$$(x, y, z) \rightarrow \frac{e^{-\alpha r}}{r}, \quad \alpha > 0.$$

2.7 Applications aux EDO à coefficients constants

Dans certaines circonstances que nous allons préciser plus loin, la transformation de Fourier transforme une équation différentielle à coefficients constants en une équation algébrique. On dit parfois que la transformation de Fourier "diagonalise" les opérateurs à coefficients constants. Lorsque cette méthode est applicable, la transformée de Fourier permet de déterminer une solution particulière d'une équation différentielle ayant un "bon" comportement physique.

Considérons une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre m . Sa forme générale s'écrit

$$f^{(m)}(x) + \sum_{i=1}^{m-1} a_i f^{(i)}(x) + a_0 f(x) = h(x) \quad (2.3)$$

où h est une fonction donnée et f l'inconnue.

A l'équation sans second membre, on associe l'équation caractéristique :

$$P(\lambda) = \lambda^m + \sum_{i=1}^{m-1} a_i \lambda^i + a_0 = 0$$

Prenons la transformée de Fourier de l'équation différentielle; alors, s'il est légitime d'appliquer le théorème sur la transformée d'une dérivée, on obtient

$P(i2\pi\xi)\hat{f}(\xi) = \hat{h}(\xi)$. Si le polynôme caractéristique n'a aucune racine imaginaire pure, on peut procéder à la division et l'on obtient :

$$\hat{f}(\xi) = \frac{\hat{h}(\xi)}{P(i2\pi\xi)}$$

Si maintenant \hat{f} est elle-même sommable, on peut utiliser la formule d'inversion et l'on obtient comme solution :

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{+i2\pi x\xi} \frac{\hat{h}(\xi)}{P(i2\pi\xi)} d\xi$$

Exemple

Un certain nombre de problèmes de Physique, dans des contextes variés, admettent une modélisation qui est celle de l'oscillateur harmonique amorti. La dynamique du système est régie par l'équation différentielle :

$$u''(t) + \gamma u'(t) + \omega_0^2 u(t) = f(t)$$

où ω_0 , réel positif, est la fréquence propre de l'oscillateur, $\gamma \in \mathbb{R}^+$, un coefficient d'amortissement et f une force extérieure convenablement normalisée. Pour des raisons de commodité évidente, on posera $\xi \equiv \omega/2\pi$ la variable conjuguée du temps t dans la suite du problème. Le problème est de trouver u pour f donnée.

Le polynôme caractéristique $P(i\omega) = -\omega^2 + i\gamma\omega + \omega_0^2$ admet pour racines :

$$\begin{aligned} \omega_{\pm} &= \frac{i\gamma}{2} \mp \omega_1, \\ \omega_1 &= \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}} \end{aligned}$$

ω_{\pm} ne peut être réel sauf si $\gamma = 0$ (dans ce cas $\omega = \omega_0$ annule $P(i\omega)$).

Plus précisément,

- si $\omega_0 > \gamma/2$, ω_1 est réel, ω_{\pm} a une partie réelle et une partie imaginaire, et on s'attend à ce que la solution oscille avec la fréquence ω_1 et s'atténue avec le temps caractéristique $\tau = 2/\gamma$.
- si $\omega_0 < \gamma/2$, ω_1 et ω_{\pm} sont imaginaires purs, le système est dit sur-amorti, et il apparaît 2 temps caractéristiques d'amortissement :

$$\frac{1}{\tau_{\pm}} = \frac{\gamma}{2} \left(1 \mp \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_0}{\gamma/2}\right)^2} \right)$$

il est facile de voir qu'en cas de fort amortissement : $\gamma/2 \gg \omega_0$, $\tau_+ \approx \gamma/\omega_0^2$ et $\tau_- \approx 1/\gamma$; au temps longs devant τ_- , seul compte τ_+ ce qui revient à négliger le terme inertiel dans l'équation différentielle et à considérer

$$\gamma u'(t) + \omega_0^2 u(t) = f(t),$$

équation effectivement utilisée dès lors que les effets visqueux sont prépondérants.

Pour u et f dans $L^1(\mathbb{R})$, et $\gamma \neq 0$, on peut donc écrire :

$$\hat{u}(\omega) = \frac{\hat{f}(\omega)}{-\omega^2 + i\gamma\omega + \omega_0^2}$$

La fonction de réponse χ du système est définie par le rapport “effet/cause”, soit ici :

$$\chi(\omega) = \frac{\hat{u}(\omega)}{\hat{f}(\omega)} = \frac{1}{P(i\omega)} = \frac{1}{-\omega^2 + i\gamma\omega + \omega_0^2},$$

comme $\omega_1^2 = \omega_0^2 - \gamma^2/4$, on a

$$-\omega^2 + i\gamma\omega + \omega_0^2 = -\omega^2 + i\gamma\omega + \omega_1^2 + \frac{\gamma^2}{4} = \omega_1^2 - (\omega - i\gamma/2)^2$$

donc,

$$\chi(\omega) = \frac{1}{2\omega_1} \left[\frac{1}{\omega_1 - \omega + i\gamma/2} + \frac{1}{\omega_1 + \omega - i\gamma/2} \right]$$

Pour $\omega_0 > \gamma/2$ (ω_1 réel), on a encore :

$$\chi(\omega) = \frac{i}{2\omega_1} \left[\frac{1}{i(\omega + \omega_1) + \gamma/2} - \frac{1}{i(\omega - \omega_1) + \gamma/2} \right] = \frac{i}{2\omega_1} \mathcal{F} \left([e^{-i\omega_1 t} - e^{+i\omega_1 t}] H(t) e^{-\gamma t/2} \right),$$

et donc

$$\begin{aligned} \chi(t) &= \frac{1}{\omega_1} \sin(\omega_1 t) H(t) e^{-\gamma t/2}, \\ u(t) &= \chi(t) \star f(t) \end{aligned}$$

qui donne donc la solution pour toute force extérieure sommable, dans le cas ω_1 réel. On trouve bien, comme annoncé, une réponse du système qui oscille à la fréquence ω_1 tout en s'amortissant avec le temps caractéristique $\tau = 2/\gamma$.

Lorsque $\omega_0 < \gamma/2$, on a $\omega_1 = i\sqrt{\gamma^2/4 - \omega_0^2}$, et l'on peut écrire :

$$\begin{aligned} \chi(\omega) &= \frac{1}{2\omega_1'} \left[\frac{1}{i\omega + \tau_+^{-1}} - \frac{1}{i\omega + \tau_-^{-1}} \right] = \frac{1}{2\omega_1'} \mathcal{F} \left(H(t) [e^{-t/\tau_+} - e^{-t/\tau_-}] \right), \\ \omega_1' &= \sqrt{\gamma^2/4 - \omega_0^2} \end{aligned}$$

Compte tenu des relations entre τ_+ et τ_- , on peut aussi écrire :

$$\begin{aligned} \chi(t) &= \frac{1}{\omega_1'} \sinh(\omega_1' t) H(t) e^{-\gamma t/2}, \\ u(t) &= \chi(t) \star f(t), \end{aligned}$$

solution qui se comporte bien comme $e^{-\omega_0^2 t/\gamma}$ au temps longs.

Exercice 2.9 On considère le circuit RC série. $u(t)$ désigne la tension d'entrée, et on mesure la tension de sortie $v(t)$ aux bornes de la capacité C . On note $\tau = RC$ la constante de temps du circuit.

1. Montrer que les tensions satisfont l'équation différentielle

$$v'(t) + \frac{v(t)}{\tau} = \frac{u(t)}{\tau}$$

2. On applique une tension d'entrée dont on suppose seulement qu'elle correspond à une fonction sommable. Montrer que

$$v(t) = (a \star u)(t)$$

Donner l'expression de la fonction a .

3. On donne la forme suivante au signal d'entrée :

$$u(t) = u_0 H(t) e^{-\alpha t}$$

Quelle est la forme du signal de sortie :

- (a) pour $\alpha \neq \tau^{-1}$?
 - (b) à la résonance : $\alpha = \tau^{-1}$?
4. Pourrait-on traiter le problème par la même méthode si le signal d'entrée avait la forme $u(t) = u_0 H(t)$ (signal continu) ?

Chapitre 3

Transformation de Fourier au sens des distributions

On a déjà fait remarquer qu'une définition de la transformation de Fourier limitée aux fonctions sommables était beaucoup trop contraignante dans les applications. Ainsi, des fonctions aussi courantes que les fonctions constantes ou la fonction de Heaviside, n'admettent pas de transformées de Fourier *au sens des fonctions*, puisqu'elles n'appartiennent pas à $L^1(\mathbb{R})$. Nous montrons dans ce chapitre, que le cadre des fonctions généralisées, ou distributions, offre un cadre beaucoup plus confortable qui permet de définir beaucoup plus de transformées de Fourier.

Pour définir une opération au sens des distributions, la procédure est toujours la même : on reporte la définition sur la fonction test. Suivant cette idée, φ étant une fonction test, la TF de la distribution T , que nous noterons \hat{T} , pourrait être définie par l'égalité :

$$\langle \hat{T}, \varphi \rangle \equiv \langle T, \hat{\varphi} \rangle$$

Cette définition peut sembler satisfaisante pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, mais il apparaîtrait rapidement que les calculs effectifs mettant en jeu en particulier l'inversion et la convolution seraient assez malaisés dans ce cas. On débute donc ce chapitre en introduisant un nouvel espace de fonctions tests et son espace associé de distributions.

3.1 Espaces de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$

On introduit un nouvel espace de fonctions tests, que l'on appelle **l'espace de Schwartz**, et que l'on note $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Cet espace désigne *l'espace des fonctions indéfiniment dérivables à décroissance rapide*, c'est-à-dire des fonctions φ indéfiniment dérivables sur \mathbb{R} qui vérifient :

$$\forall n, p \in \mathbb{N}, \quad |x^n \varphi^{(p)}(x)| \leq M_{p,n}, \quad \text{avec } M_{p,n} \text{ réels.}$$

Du fait de la contrainte très forte de décroissance plus rapide que toute fonction en x^{-n} , on notera que les fonctions de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ sont, d'un point de vue pratique, très semblables aux fonctions (indéfiniment dérivables à support bornés) de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

De la même façon qu'on introduit l'espace des distributions $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ comme l'ensemble des formes linéaires définies sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, on définit l'**espace des distributions tempérées** $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ comme l'ensemble des formes linéaires définies sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Ce sont ces distributions tempérées¹ pour lesquelles nous définirons une transformée de Fourier.

Donnons quelques propriétés de ces espaces.

Théorème 3.1.1 *Les fonctions de \mathcal{S} ainsi que toutes leurs dérivées sont bornées et intégrables sur \mathbb{R} .*

Soit $\varphi \in \mathcal{S}$. Par définition, toutes ses dérivées sont également dans \mathcal{S} . Donc, $\forall n, p, |x^n \varphi^{(p)}(x)| \leq M_{p,n}$, et en particulier que $|(1+x^2) \varphi^{(p)}(x)| \leq M_{p,0} + M_{p,2}$. Toutes les dérivées $\varphi^{(p)}$ sont donc bornées et majorées par des fonctions intégrables : elles sont donc elles-mêmes intégrables.

Ainsi, puisque $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$, toutes les définitions, propriétés et théorèmes vus au chapitre précédent pour les fonctions sommables s'étendent aux fonctions de l'espace de Schwartz. En particulier la transformée de Fourier d'une fonction $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ est définie, pour $q \in \mathbb{R}$, par l'intégrale :

$$\hat{\varphi}(q) = [F\varphi](q) \equiv \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) e^{-i2\pi qx} dx$$

Mais il y a plus : la formule d'inversion est valable pour toute fonction de \mathcal{S} (ce qui n'était assuré dans L^1 , que si la TF était elle-même dans L^1), et la formule de Parseval-Plancherel (valable dans L^2 mais pas dans L^1), s'étend aux fonctions de \mathcal{S} . Le théorème qui suit (dont la preuve est donnée dans les compléments d'intégration du cours de math de S5) résume la situation :

Théorème 3.1.2 *1. Soit $\varphi \in \mathcal{S}$. Sa transformée de Fourier $\hat{\varphi}$ est elle-même dans \mathcal{S} .*

2. Toute fonction $\varphi \in \mathcal{S}$ est la TF inverse d'un élément $\hat{\varphi} \in \mathcal{S}$, telle que :

$$\varphi(x) = [F^{-1}\hat{\varphi}](x) \equiv \int_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}(q) e^{+i2\pi qx} dq$$

3. Pour φ et ψ dans \mathcal{S} :

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \overline{\psi(x)} dx = \int_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}(q) \overline{\hat{\psi}(q)} dq,$$

et en particulier, pour $\varphi \in \mathcal{S}$:

$$\int_{\mathbb{R}} |\varphi(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} |\hat{\varphi}(q)|^2 dq.$$

¹Le terme "tempéré" est à comprendre ici comme modéré : nous verrons que les distributions tempérées ne doivent pas croître à l'infini plus vite que des polynômes.

La dernière égalité montre que la TF conserve la norme dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Concernant l'espace des distributions tempérées $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, les critères suivant permettent de savoir dans de nombreux cas si une distribution est tempérée ou non :

Théorème 3.1.3 1. *Les fonctions qui sont soit sommables, soit bornées, soit majorées par un polynôme définissent des distributions régulières tempérées.*

2. *Les distributions à support bornés sont tempérées.*

Pour le premier point il faut montrer que $\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x) dx$ est finie lorsque $\varphi \in \mathcal{S}$. Comme φ est bornée, si f est sommable ou bornée, l'intégrale a un sens. Le produit d'un polynôme et d'une fonction de \mathcal{S} est également une fonction de \mathcal{S} , donc intégrable. Pour le 2ème point, comme $\varphi \in \mathcal{S}$, φ est C^∞ , et comme la distribution (disons T) est à support borné par hypothèse, le produit $\langle T, \varphi \rangle$ a un sens.

◇ Exemple

Les distributions δ_a et $\delta^{(n)}$ sont des distributions tempérées.

Les distributions régulières $1, H, \cos 2\pi ax, H e^{i2\pi ax}$ sont des distributions tempérées.

Lorsque le théorème précédent ne peut être appliqué, pour savoir si une distribution particulière T est tempérée, il faut vérifier directement si $\langle T, \varphi \rangle$ a un sens pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{S}$.

3.2 Transformée de Fourier des distributions

Définition 3.2.1 Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, c'est-à-dire une distribution tempérée. La transformée de Fourier, $\hat{T} = FT$, de la distribution T est définie par la relation :

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \quad \langle FT, \varphi \rangle \equiv \langle T, F\varphi \rangle,$$

et la transformée de Fourier inverse, $F^{-1}T$, est définie par la relation :

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \quad \langle F^{-1}T, \varphi \rangle \equiv \langle T, F^{-1}\varphi \rangle,$$

◇ Exemples

$$\hat{\delta} = 1 \text{ et } \hat{1} = \delta.$$

En effet, par définition $\langle \hat{\delta}, \varphi \rangle = \langle \delta, \hat{\varphi} \rangle = \hat{\varphi}(0) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx = \langle 1, \varphi \rangle$.

De même, $\langle \hat{1}, \varphi \rangle = \langle 1, \hat{\varphi} \rangle = \int_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}(q) dq = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle$.

Ce résultat est très souvent écrit sous forme intégrale dans les cours de physique, soit :

$$\text{Ecritures incorrectes : } \int_{\mathbb{R}} e^{-i2\pi qx} \delta(x) dx = 1 \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}} e^{-i2\pi qx} dx = \delta(q)$$

Insistons encore une fois que ces expressions sont largement abusives puisque δ n'est pas une fonction et que ces 2 intégrales ne sont pas définies.

La définition précédente peut prendre une forme plus précise lorsque les distributions sont à support borné. En effet, par définition :

$$\langle FT, \varphi \rangle \equiv \langle T, F\varphi \rangle = \left\langle T, \int \varphi(x) e^{-i2\pi qx} dx \right\rangle = \int \langle T, e^{-i2\pi qx} \rangle \varphi(x) dx$$

On notera que $\langle T, e^{-i2\pi qx} \rangle$ n'a un sens que si T est à support borné. La fonction $x \mapsto e^{-i2\pi qx}$ étant C^∞ , il en est de même de la fonction $x \mapsto \langle T, e^{-i2\pi qx} \rangle$ qui définit donc une distribution régulière. On a donc prouvé le théorème suivant :

Théorème 3.2.1 *La transformée de Fourier d'une distribution à support borné est une distribution régulière définie par la fonction C^∞ :*

$$FT(x) = \langle T, e^{-i2\pi qx} \rangle$$

◇ Exemples

$$\widehat{\delta}'(x) = +i2\pi x.$$

Sans utiliser le théorème précédent, on a par définition de la dérivée : $\langle \widehat{\delta}', \varphi \rangle = -\langle \delta, \frac{d\varphi}{dq} \rangle = + \int i2\pi x \varphi(x) dx = \langle i2\pi x, \varphi \rangle$.

On obtient le même résultat en utilisant le théorème : $\widehat{\delta}'(x) = \langle \delta', e^{-i2\pi qx} \rangle = -\langle \delta, \frac{de^{-i2\pi qx}}{dq} \rangle = +i2\pi x \langle \delta, e^{-i2\pi qx} \rangle = i2\pi x$.

Rappelons que la translatée $\tau_a T$ et la dilatée $d_a T$ d'une distribution sont définies par les relations : $\langle \tau_a T, \varphi \rangle \equiv \langle T, \tau_{-a} \varphi \rangle$ et $\langle d_a T, \varphi \rangle \equiv \langle T, |a| d_{1/a} \varphi \rangle$, pour $a \in \mathbb{R}^*$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, avec $(\tau_a \varphi)(x) \equiv \varphi(x - a)$ et $(d_a \varphi)(x) \equiv \varphi(x/a)$. On établira facilement à titre d'exercice les propriétés suivantes,

$$\begin{aligned} F(\tau_a T) &= e^{-i2\pi qa} FT, \\ F(e^{-i2\pi ax} T) &= \tau_a(FT), \\ F(d_a T) &= |a| d_{1/a} FT \end{aligned}$$

◇ Exemples

L'amplitude diffractée $\mathcal{A}(q)$ par un objet dans l'approximation de Fraunhofer (diffraction à l'infini) est proportionnelle à la TF de la fonction de transparence ρ .

Les propriétés précédentes permettent de discuter quelques cas physiquement intéressants :

- 1 source ponctuelle à l'origine : $\rho \sim \delta \Rightarrow \mathcal{A}(q) \sim 1$

- 1 source translatée en $x = a$: $\rho \sim \delta_a \Rightarrow \mathcal{A}(q) \sim e^{-i2\pi qa}$

- 2 sources ponctuelles en $x = \pm a$: $\rho \sim \delta_a + \delta_{-a} \Rightarrow \mathcal{A}(q) \sim 2 \cos(2\pi qa)$

L'intensité lumineuse observée étant le module au carré de l'amplitude, on retrouve le résultat bien connu que l'intensité est inchangée lorsqu'on translate une source tandis que la présence de 2 sources conduit au phénomène d'interférences.

Le cas des fentes de largeurs finies sera traité en Tds.

Un autre cas intéressant est la diffraction d'une onde plane $e^{-i2\pi(\nu t - x/\lambda)}$, à la fois par rapport aux variables x et t :

$$\rho \sim e^{-i2\pi(\nu t - x/\lambda)} \Rightarrow \mathcal{A}(q) \sim \delta_\nu \delta_{\frac{1}{\lambda}}$$

Ainsi, en prenant la TF de toutes les ondes qui peuvent exister dans un milieu donné, on obtient un ensemble de points dans le plan $(\nu, \frac{1}{\lambda})$ (ou (ω, k)), qui est connue sous le nom de *relation de dispersion*.

3.3 Convolution et transformation de Fourier

Pour ce qui concerne la convolution, l'échange entre produit de convolution et produit par TF est total dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$:

Théorème 3.3.1 *Soient f et g deux fonctions de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Alors, le produit $f \times g$ et le produit de convolution $f \star g$ sont aussi dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ et l'on a :*

$$\widehat{f \star g} = \hat{f} \times \hat{g} \quad \text{et} \quad \widehat{f \times g} = \hat{f} \star \hat{g}$$

(la deuxième propriété n'est pas garantie dans $L^1(\mathbb{R})$).

La première propriété résulte d'un simple changement de variable; il est évident que cette première propriété vaut également avec la TF inverse : $F^{-1}(f \star g) = F^{-1}(f) F^{-1}(g)$ Or Ff et Fg sont également dans \mathcal{S} . Donc :

$$F^{-1}(Ff \star Fg) = F^{-1}(Ff) F^{-1}(Fg) = fg \quad \text{donc} \quad Ff \star Fg = F(fg),$$

ce qui démontre la 2ème propriété.

◇ Exemples

$$\widehat{\Pi \star \Pi}(q) = \left(\frac{\sin \pi q}{\pi q} \right)^2.$$

Rappelons que le produit de convolution des 2 distributions S et T , lorsqu'il existe, noté $S \star T$, est défini, pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ de la forme $\varphi(x, y) = u(x)v(y)$ avec $u, v \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, par la relation :

$$\langle S \star T, u(x)v(y) \rangle = \langle S, u \rangle \langle T, v \rangle$$

On rappelle également que le produit de convolution existe si l'une au moins des 2 distributions est à support borné.

Théorème 3.3.2 *Soient S et T 2 distributions à supports bornés. Alors leur produit de convolution $S \star T$ est aussi à support borné et vérifie :*

$$F(S \star T) = FS \times FT$$

Si S et T sont à supports bornés, comme le support de $S \star T$ est inclus dans la somme du support de S et du support de T , le support de $S \star T$ est donc borné. FS et FT étant à supports bornés, ce sont des distributions régulières définies par les fonctions $FS(x) = \langle S, e^{-i2\pi qx} \rangle$ et $FT(y) = \langle T, e^{-i2\pi qy} \rangle$. Le produit de ces deux fonctions est tel que :

$$FS(x) FT(y) = \langle S, e^{-i2\pi qx} \rangle \langle T, e^{-i2\pi qy} \rangle \equiv \langle S \star T, e^{-i2\pi q(x+y)} \rangle$$

Cette dernière expression est une fonction C^∞ (par rapport à la variable $x + y$) qui définit la TF de la distribution $S \star T$.

Bien noter que le produit de 2 distributions, ST ou $\hat{S}\hat{T}$ ne peut être défini en toute généralité. Dans le cas où S est une distribution tempérée quelconque et T une distribution à support borné, le théorème tient encore, mais le produit

\widehat{ST} doit être interprété comme le produit d'une distribution par une fonction C^∞ .

◇ Exemple

$$\widehat{T'} = i2\pi x \widehat{T}.$$

Il suffit de remarquer que $T' \equiv \delta' \star T$ puis d'utiliser le théorème.

Peigne de Dirac : III

La distribution δ joue un rôle particulier pour la convolution qu'il convient de souligner.

En premier lieu, *la distribution de Dirac est l'unité du produit de convolution*. On entend par là que la convolution d'une distribution quelconque par δ ne modifie pas la distribution :

$$\forall T, \quad \delta \star T = T \star \delta = T$$

C'est en effet évident par TF puisque $F(\delta \star T) = 1.FT$.

En second lieu, soulignons que δ_a joue le rôle d'un opérateur de translation :

$$\forall T, \quad \delta_a \star T = T \star \delta_a = \tau_a T,$$

résultat encore évident par TF puisque $F(\delta_a \star T) = F\delta_a.FT = e^{-i2\pi qa} FT = F(\tau_a T)$.

Un peigne de Dirac de pas a est la distribution correspondant à la réunion d'une infinité de distributions de Dirac translatées en na où n est un entier positif ou négatif.

Plus précisément, on admettra le résultat suivant :

Soit a un réel non nul. La suite de distributions $\Delta_{Na} \equiv \sum_{n=-N}^N \delta_{na}$ converge dans \mathcal{D}' vers la distribution :

$$\text{III}_a \equiv \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_{na},$$

que l'on appelle peigne de Dirac de pas a (le symbole III se prononce "Sha" d'après une lettre de l'alphabet cyrillique).

$\text{III}_a \in \mathcal{S}'$. Sa TF est telle que :

$$\widehat{\text{III}}_a = \frac{1}{a} \text{III}_{\frac{1}{a}}$$

Deux applications importantes des peignes de Dirac sont les réseaux (à traits) utilisés en optique, et la correspondance réseau direct/réseau réciproque utilisée en cristallographie pour interpréter les figures de diffraction des cristaux.

◇ Exemple

Un cristal unidimensionnel consiste en la répétition périodique d'une cellule unité (le motif) qui contient un ou plusieurs atomes. Soit ρ_0 la densité électronique de la cellule unité et a la période de répétition (c'est le pas du réseau), la densité totale électronique d'un cristal infini ρ_∞ est obtenu en translatant ρ en na avec $n \in \mathbb{Z}$ si le cristal est infini. On peut donc écrire :

$$\rho_\infty \equiv \rho_0 \star \text{III}_a$$

L'amplitude diffractée par des rayons X sur un cristal est proportionnelle à la TF de la densité électronique. On obtient donc aussitôt :

$$\mathcal{A}_\infty = \hat{\rho}_0 \times \left(\frac{1}{a} \text{III}_{\frac{1}{a}} \right)$$

Cela signifie que l'amplitude diffusée est également périodique, mais avec une période en $1/a$. Le signal observé dépend également de $\hat{\rho}_0(q)$ que l'on appelle le facteur de structure en cristallographie, et que l'on note traditionnellement $F(q)$. Dans le cas où $F(q)$ est une fonction C^∞ , on peut utiliser la propriété : $F(q) \delta_{n/a} = F(n/a) \delta_{n/a}$, de sorte que l'amplitude s'écrit explicitement :

$$\mathcal{A}_\infty(q) = \frac{1}{a} \sum_{n \in \mathbb{Z}} F(n/a) \delta_{n/a}$$

On n'observera donc du signal dans l'espace des q (l'espace réciproque), qu'aux points tels que $q = n/a$ avec une intensité proportionnelle à $|F|^2$. Des extinctions supplémentaires peuvent se produire par interférences destructives si le motif contient plusieurs atomes.

L'analyse précédente repose sur l'hypothèse d'un cristal infini. Dans la réalité, tout cristal est fini et la densité électronique ρ_L d'un cristal fini de taille L peut s'écrire sous la forme :

$$\rho_L = \rho_\infty \times S_L,$$

où $S_L(x)$ est une fonction de forme du cristal. Pour fixer les idées, on peut imaginer par exemple que la fonction S_L est une porte de largeur L : $S_L \equiv \Pi_L$. Dans ces conditions, puisque $\hat{\Pi}_L = L \sin(\pi q L) / (\pi q L)$, on obtient pour l'amplitude du cristal fini :

$$\mathcal{A}_L(q) = \mathcal{A}_\infty(q) \star L \frac{\sin(\pi q L)}{\pi q L}$$

L'amplitude de chacun des pics aux noeuds du réseau réciproque se trouve donc modulée par un sinus cardinal. On notera cependant que ces sinus cardinaux ne se recouvrent pas puisque $L \gg a \Rightarrow 1/L \ll 1/a$.

3.4 Equations de convolution

Définition 3.4.1 Une équation de convolution est une équation de la forme :

$$A \star T = B,$$

où A et B sont des distributions données et T une distribution inconnue.

De nombreux problèmes peuvent prendre la forme d'une équation de convolution. Considérons à titre d'exemple, l'équation de circuit RC série, représenté par l'équation différentielle :

$$V' + \frac{V}{RC} = \frac{U}{RC}$$

Comme $\delta' \star V = V'$ et $\delta \star V = V$, cette équation peut s'écrire sous la forme

$$A \star V = \frac{U}{RC},$$

avec $A = \delta' + (RC)^{-1} \delta$ la distribution caractérisant l'oscillateur.

En général, la solution d'une équation de convolution n'est pas unique. On peut néanmoins montrer que l'unicité des solutions est garantie si on se restreint aux distributions appartenant à l'ensemble $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ des distributions dont le support² est contenu dans $[0, +\infty[$. Cette restriction revient, grosso modo, à considérer le signal nul avant un temps origine (le début de la mesure, par exemple), ce qui ne pose guère de problème.

□ **Méthode de Green**

Les équations de convolution peuvent se résoudre par la méthode de Green (ou méthode de la réponse impulsionnelle).

Supposons que l'on sache résoudre l'équation de convolution particulière :

$$A \star E = E \star A = \delta$$

pour A donnée. La solution, E , de cette équation est *la réponse impulsionnelle* (ou solution élémentaire, ou inverse de convolution) de l'équation étudiée. Cette solution particulière suffit à résoudre l'équation générale $A \star T = B$ pour une sollicitation B quelconque sous la forme

$$T = E \star B$$

En effet, $E \star B = E \star (A \star T) = (E \star A) \star T = \delta \star T = T$, où l'utilisation des propriétés de commutativité et d'associativité sont légitimes puisque toutes les distributions sont dans $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$.

La résolution de l'équation $A \star E = \delta$ est aisée par transformée de Fourier puisqu'on trouve aussitôt par application du théorème de convolution : $FE = 1/FA$. On obtient ensuite E par transformée de Fourier inverse (ce qui peut être délicat), puis la solution générale T par $T = E \star B$.

Cette méthode ne permet pas d'obtenir *toutes* les solutions d'une équation de convolution, mais seulement celle qui est dans $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ et qui admet une TF (cf. exercices).

◇ **Exemple**

Dans le cas du circuit RC pour lequel $A = \delta' + (RC)^{-1} \delta$, la transformée de Fourier de l'équation $A \star E = \delta$, conduit au résultat,

$$FE(q) = \frac{1}{(RC)^{-1} + i2\pi q}$$

La solution élémentaire est donc la distribution régulière associée à la fonction $t \mapsto E(t) = H(t) e^{-t/RC}$. Une solution de l'équation $A \star V = U/RC$ est donc donnée par le résultat :

$$V = H(t) e^{-t/RC} \star \frac{U(t)}{RC}$$

On remarquera qu'il faut ajouter $V(0) e^{-t/RC}$ pour obtenir la *solution générale* de l'équation différentielle.

²Rappel : le support d'une distribution T est le plus petit ensemble fermé en dehors duquel T est nulle. Une distribution T est nulle dans un ouvert Ω de \mathbb{R} , si $\langle T, \varphi \rangle = 0$, pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ ayant son support dans Ω .

3.5 Exercices

Exercice 3.1 Montrer que la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ est une fonction de \mathcal{S} .

Pour quelle raison la fonction $x \mapsto e^{-x^2} \sin e^{x^2}$ n'est-elle pas à décroissance rapide ?

Montrer que la fonction $x \mapsto e^{x^2}$ définit une distribution régulière qui n'est pas tempérée, et en déduire que le produit d'une distribution tempérée par une fonction C^∞ n'est pas toujours tempéré.

Exercice 3.2 Etablir par un calcul direct que les distributions x^n ($n \geq 0$), $\ln|x|$ et $\text{vp} \frac{1}{x}$ sont des distributions tempérées.

Exercice 3.3 Calculer directement les TF des distributions, δ' , $\delta^{(n)}$ et δ_a .

Exercice 3.4 Utiliser le peigne de Dirac pour établir la formule, dite formule sommatoire de Poisson :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \varphi(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{\varphi}(n), \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}$$

Exercice 3.5 Etablir les résultats suivants :

$$\begin{aligned} \widehat{\text{vp} \frac{1}{x}}(u) &= -i\pi \operatorname{sgn} u, \\ \hat{H}(u) &= \frac{1}{2i\pi} \text{vp} \frac{1}{u} + \frac{\delta}{2}, \\ \widehat{\operatorname{sgn} x}(u) &= \frac{1}{i\pi} \text{vp} \frac{1}{u} \end{aligned}$$

On utilisera l'équation $x \text{vp} \frac{1}{x} = 1$ et le fait que la distribution $\text{vp} \frac{1}{x}$ est impaire.

Exercice 3.6 Utiliser les FT pour démontrer les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \delta \star T &= T \star \delta = T, \\ \delta_a \star T &= T \star \delta_a = \tau_a T, \\ \delta_a \star \delta_b &= \delta_b \star \delta_a = \delta_{a+b}, \\ \delta^{(n)} \star T &= T \star \delta^{(n)} = T^{(n)} \\ (S \star T)^{(n)} &= S \star T^{(n)} = S^{(n)} \star T \end{aligned}$$

Exercice 3.7 On cherche la solution de l'équation différentielle

$$T'' + a^2 T = \delta',$$

dans \mathcal{D}'_+ .

1. Ecrire l'équation différentielle comme une équation de convolution.

2. Vérifier que la distribution $H(x) \sin(ax)/a$ est la réponse impulsionnelle de l'équation étudiée.
3. Déterminer la solution de l'équation différentielle.
4. Vérifier le résultat par dérivation.

Exercice 3.8 1. Quel est l'inverse de convolution associé à l'opérateur différentiel

$$\frac{d}{dx} - \lambda I$$

où λ est un réel et I l'opérateur identité ?

2. En déduire l'unique solution dans \mathcal{D}'_+ de l'équation différentielle :

$$X' - \lambda X = F,$$

où $F \in \mathcal{D}'_+$.

Exercice 3.9 1. Représenter schématiquement la distribution porte Π et sa dérivée Π' .

2. Exprimer Π' à l'aide de distributions de Dirac.
3. En déduire la transformée de Fourier $\hat{\Pi}$ de la distribution porte.