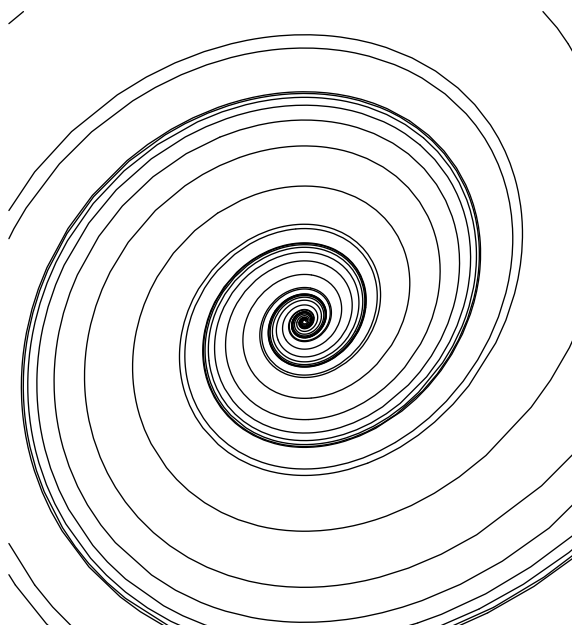


IFIPS S4

Université Paris XI

Equations Différentielles

Cours et Exercices



Jean-Luc Raimbault
raimbault@lptp.polytechnique.fr

– 2007 –

Dans ce petit cours sur les équations différentielles, on vous propose un point de vue complémentaire à celui qui vous a été présenté jusqu'à présent.

Dans les semestres précédents, l'accent a été mis sur le cas important des équations différentielles linéaires à coefficients constants. L'immense majorité des systèmes physiques étudiés conduit cependant à des équations différentielles non linéaires qui constituent l'objet principal du présent module. A la différence des équations linéaires, il n'existe pas de méthodes analytiques systématiques pour résoudre les équations différentielles non linéaires. La résolution quantitative de ces équations passe donc par une solution numérique, telle qu'on peut les mettre en œuvre avec des logiciels comme MatLab ou Mathematica, ou par des méthodes approchées qui nécessitent souvent de lourds calculs qui dépassent le niveau de ce cours. Si l'on se contente d'une information sur le comportement qualitatif des solutions, une autre voie, d'inspiration géométrique, peut être abordée avec peu d'outils.

On présente donc dans ce qui suit une introduction élémentaire aux idées sous-jacentes à ce qu'on appelle *la théorie qualitative des équations différentielles*. Avant d'aborder à proprement parler ces problèmes non-linéaires, on reconsidèrera en premier lieu le cas des équations différentielles linéaires qui vous sont familières, mais sous un angle plus géométrique. En particulier, on montrera qu'il existe un opérateur d'évolution (le propagateur ou résolvante), qui relie la solution du système à l'instant initial avec la solution du système à un instant (ultérieur ou antérieur) quelconque. Ce propagateur sera complètement caractérisé dans les cas très fréquents des équations différentielles du second ordre, et éclaire ce problème rebattu sous un jour nouveau. L'analyse qualitative des équations différentielles sera alors présentée sur un exemple simple, et les divers comportements possibles classifiés à l'aide de la notion de *points fixes*. On conclura par une brève étude de la *stabilité* des systèmes différentiels en dimension 2.

Pour ceux qui veulent aller plus loin, un des rares ouvrages en français sur ces sujets est l'excellent livre :

Équations différentielles et systèmes dynamiques,
par John Hubbard et Beverly West.
Traduit de l'anglais et adapté par Véronique Gautheron.
Editions Cassini.

Cet ouvrage est abordable à votre niveau d'études et contient de nombreuses illustrations graphiques qui le rend très attractif.

Chapitre 1

Introduction

Une équation différentielle est une équation mettant en jeu une fonction ainsi qu'un certain nombre de ses fonctions dérivées. La forme générale d'une équation différentielle d'ordre n s'écrit :

$$f(y, \dot{y}, \dots, y^{(n)}, t) = 0,$$

où y représente une fonction de la variable t , et $\dot{y}, \dots, y^{(n)}$ ses dérivées successives. D'un point de vue formel, le problème se pose donc de la même manière que pour les équations algébriques, mais avec la différence essentielle que l'inconnue n'est plus un nombre (réel ou complexe), mais une fonction, c'est à dire un être mathématique beaucoup plus compliqué.

L'usage des équations différentielles pour décrire le comportement des systèmes évoluant dans le temps est d'un usage universel dans toutes les sciences qui utilisent la modélisation mathématique. Cet outil commun à plusieurs disciplines ou sous-disciplines suggère bien souvent d'intéressantes analogies entre des domaines a priori sans relations. Dans ce chapitre, on commence par donner quelques exemples d'équations différentielles issues de différentes disciplines.

Mécanique.

La relation fondamentale de la mécanique, écrite à 1 dimension d'espace pour une particule ponctuelle, fournit une source intarissable d'équations différentielles. Dans un système d'unités adaptées, elle s'écrit

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}, t),$$

où x désigne la position de la particule, \dot{x} sa dérivée par rapport au temps (la vitesse), et où f représente les forces appliquées sur la particule. Cette équation, du second ordre en x , est généralement complétée par des *conditions initiales* qui spécifient la position et la vitesse à un instant origine : $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = v_0$.

Il est utile de remarquer que cette équation du second ordre est équivalente à un système différentiel de 2 équations du 1er ordre. En effet, introduisons la vitesse $v \equiv \dot{x}$, l'équation précédente s'écrit aussi :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v, \\ \dot{v} &= f(x, v, t). \end{aligned}$$

Le plan (x, v) est appelé, aussi bien en physique qu'en mathématique, plan ou plus généralement *espace des phases*.

Dans le cas particulier où f ne dépend pas de x : $f = f(v, t)$, par exemple, dans le cas des mouvement dominés par les frottements, l'équation d'évolution de la vitesse : $\dot{v} = f(v, t)$ peut être résolue indépendamment de x . On obtient ensuite x par intégration de l'équation $\dot{x} = v$.

Si, a contrario, f ne dépend que de x : $f = f(x)$, l'équation obtenue en divisant les 2 équations différentielles s'écrit

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dx} &= \frac{f(x)}{v}, \\ v(0) &= v_0.\end{aligned}$$

On obtient donc encore une équation différentielle du 1er ordre, l'inconnue étant la fonction $v(x)$. Cette équation qui est séparable dans les variables v et x conduit directement à l'existence d'un *invariant* (l'énergie)

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} v^2(x) + W(x) \right) = 0,$$

où on a posé $W(x) \equiv - \int^x f(x') dx'$.

Dynamique des Populations.

De nombreuses modélisations de dynamique des populations (espèces animales, diffusion des virus, substances radioactives ou chimiques) ont été proposées. Parmi les plus simples, on peut citer celle attribuée à Malthus (1798) qui traduit la conservation du nombre d'individus N d'une espèce sous l'effet des naissances b et des décès d :

$$\begin{aligned}\dot{N} &= bN - dN, \\ N(0) &= N_0.\end{aligned}$$

Lorsque $b = 0$, on reconnaît dans cette équation la loi de décroissance exponentielle des substances radioactives si d est interprétée comme une constante de désintégration. Dans le cas où $b > d$, rien ne vient limiter la croissance de la population, ce qui n'est pas très réaliste. Verhulst (1836) a proposé un modèle phénoménologique non linéaire (modèle logistique) qui s'écrit

$$\begin{aligned}\dot{N} &= \alpha N \left(1 - \frac{N}{N_1} \right), \\ N(0) &= N_0,\end{aligned}$$

où α et N_1 sont des constantes positives. Ce modèle a un comportement très différent du modèle linéaire de Malthus. On montrera qu'il n'existe plus de solutions qui conduisent à l'extinction de l'espèce (la solution $N = 0$ est instable), le terme non linéaire conduisant à une stabilisation de la population vers la valeur limite $N = N_1$.

Une classe de modèles plus sophistiqués met en jeu 2 populations : une de proies (ou d'exploités) et une de prédateurs (ou d'exploiteurs). Les hypothèses suivantes sont vraisemblables :

1. en l'absence de prédateurs, les proies se multiplient proportionnellement à leur effectif.
2. en l'absence de proies, les prédateurs meurent proportionnellement à leur effectif.
3. le nombre de rencontres entre les 2 populations est proportionnel au produit des 2 populations. Chaque rencontre augmente le nombre de prédateurs et diminue le nombre de proies.

Ces hypothèses sont modélisées par le système non linéaire dit de Lokta-Volterra, où x désigne le nombre de proies et y le nombre de prédateurs

$$\begin{aligned}\dot{x} &= +a x - b xy = +ax \left(1 - \frac{b}{a} y\right), \\ \dot{y} &= -c y + d xy = -cy \left(1 - \frac{d}{c} x\right),\end{aligned}$$

et où a, b, c et d sont des constantes positives. Les solutions constantes $(0, 0)$ et $(c/d, a/b)$

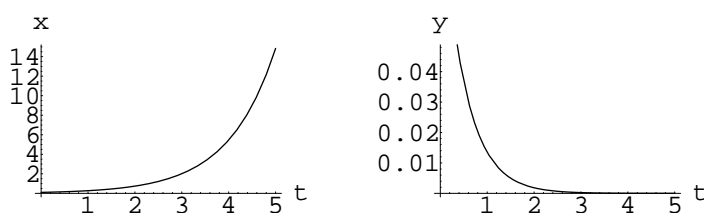


FIG. 1.1 – Solutions du Modèle Linéarisé de Lokta Volterra autour de $(0, 0)$.

sont manifestement des solutions du système. Les équations *linéarisées* autour de ces points particuliers ont un comportement très différent ainsi qu'il apparaît sur les figures (exponentiellement croissante ou décroissante autour de $(0, 0)$ et périodique autour de l'autre point). La solution au voisinage de $(0, 0)$ est manifestement instable, et nous

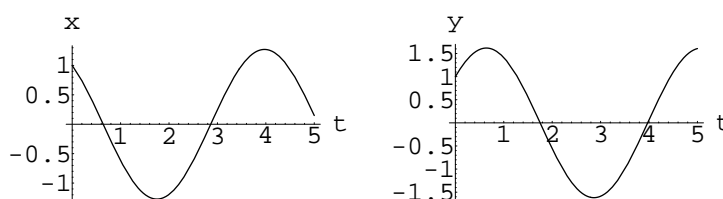


FIG. 1.2 – Solutions du Modèle Linéarisé de Lokta Volterra autour de $(c/d, a/b)$.

montrons que la solution périodique demeure stable pour le système non linéaire. Ce comportement est illustré sur les portraits de phase (représentation paramétrique des trajectoires) reportés sur la figure 1.3.

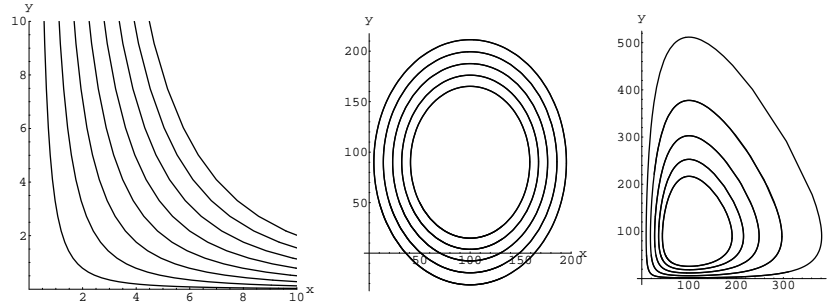


FIG. 1.3 – Portraits de Phase du Modèle de Lokta Volterra : cas linéarisé autour de $(0, 0)$ (à gauche), autour de $(c/d, a/b)$ (au centre) et cas non linéaire (à droite), pour différentes conditions initiales.

Equations aux Dérivées Partielles.

Mis à part les problèmes stationnaires à 1 dimension d'espace, la plupart des équations d'évolution ne sont pas des équations différentielles mais des *équations aux dérivées partielles*, c'est-à-dire des équations différentielles pour des fonctions de plusieurs variables. Il apparaît cependant que ces équations se ramènent à des équations différentielles lorsqu'on se limite à chercher des solutions sous une forme *séparable*.

Donnons deux exemples simples empruntés à l'électromagnétisme et à la mécanique quantique.

Les solutions de l'équation d'HelmHoltz ¹

$$\Delta\psi(x, y, z) + k^2\psi(x, y, z) = 0$$

cherchées sous la forme (séparable) : $\psi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$, conduisent au système d'équations différentielles (le vérifier) :

$$\begin{aligned} \frac{d^2X(x)}{dx^2} + l^2X(x) &= 0, \\ \frac{d^2Y(y)}{dy^2} + m^2Y(y) &= 0, \\ \frac{d^2Z(z)}{dz^2} + n^2Z(z) &= 0, \end{aligned}$$

où l, m, n sont des constantes telles que $l^2 + m^2 + n^2 = k^2$.

D'une façon comparable, cherchons les solutions de l'équation de Schrödinger à 1 dimension d'espace dépendant du temps

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2\psi(x, t)}{\partial x^2} + V(x) \psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial\psi(x, t)}{\partial t},$$

¹L'opérateur Laplacien est défini par $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

sous la forme (séparable) $\psi(x, t) = \phi(x)f(t)$. On obtient aussitôt les 2 équations différentielles (le vérifier)

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\phi(x)}{dx^2} + V(x)\phi(x) &= E\phi(x), \\ i\hbar f'(t) &= Ef(t). \end{aligned}$$

où E est une constante. La solution prend donc la forme bien connue $\psi(x, t) = \phi(x)e^{-iEt/\hbar}$.

Chapitre 2

Rappels sur les équations différentielles

Dans ce chapitre, on rappelle quelques résultats concernant les équations différentielles (linéaires et non linéaires). On insiste sur le fait que *toutes* les équations différentielles linéaires du 1er ordre, à coefficients constants ou pas, sont exactement intégrables. Ce résultat n'est malheureusement pas généralisable au cas des systèmes différentiels linéaires où l'on doit se contenter de résultats explicites lorsque le système est à coefficients constants. On montre également dans ce chapitre qu'un système différentiel quelconque *et* sa condition initiale peuvent être reformulés en une seule équation intégrale. La preuve de la convergence des itérations successives issues de cette formulation intégrale du problème, conduit au théorème de Cauchy-Lipschitz, qui garantit *localement* l'existence et l'unicité des solutions des systèmes différentiels linéaires sous des hypothèses assez faibles.

2.1 Terminologie

Un système différentiel linéaire d'ordre n est un système d'équations différentielles linéaires de la forme

$$\begin{aligned} \dot{y}_1(t) &= a_{11}(t)y_1(t) + \cdots + a_{1n}(t)y_n(t) + b_1(t), \\ &\dots \\ \dot{y}_n(t) &= a_{n1}(t)y_1(t) + \cdots + a_{nn}(t)y_n(t) + b_n(t), \end{aligned}$$

où $y_1 \cdots y_n$ sont les fonctions inconnues à déterminer, et où les a_{ij} et b_i sont supposées données.

Ce système différentiel peut manifestement s'écrire comme une seule équation différentielle dans \mathbb{R}^n :

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = A(t)\mathbf{y}(t) + \mathbf{b}(t),$$

où A est la matrice des coefficients a_{ij} , et où on a introduit les vecteurs de \mathbb{R}^n $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$, $\dot{\mathbf{y}} \equiv (\dot{y}_1, \dots, \dot{y}_n)$ et $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$. L'équation (ou le système) est dit *homogène* si $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, et *non homogène* lorsque $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$.

Toutes les autres formes pour \mathbf{f} correspondent aux cas des *équations différentielles non linéaires*. La majorité des équations différentielles non triviales rencontrées dans

les applications sont non linéaires. Nous expliquerons plus loin, comment la *linéarisation* de ces équations autour de certains points remarquables peut donner des informations, au moins locales, sur le comportement des solutions d'une équation non linéaire.

Lorsque f ne dépend pas explicitement du temps, mais seulement de $y(t)$, on dit que l'équation différentielle est *autonome*. Le système étudié est alors invariant par translation dans le temps : 2 particules partant d'un même point à des instants différents suivront la même trajectoire. Autrement dit, si $y(t)$ est solution d'une équation différentielle autonome, la solution décalée dans le temps de t_0 , $y(t - t_0)$, est également solution. Dans le cas général des équations *non autonomes*, la trajectoire suivie au cours du temps ne dépend pas seulement de la position initiale, mais également de l'instant de départ.

Il est possible d'associer une équation autonome dans \mathbb{R}^{n+1} à une équation non autonome dans \mathbb{R}^n

Théorème 2.1 *Toute équation non autonome d'ordre n , $\dot{y}(t) = f(y(t), t)$, peut être transformée en une équation autonome d'ordre $n + 1$ par adjonction d'une variable supplémentaire $\tau(t) \equiv t$.*

En effet, puisque $\tau = t$, l'équation $\dot{y}(t) = f(y(t), t)$ est équivalente à :

$$\begin{aligned}\dot{y}(t) &= f(y(t), \tau(t)), \\ \dot{\tau}(t) &= 1.\end{aligned}$$

qui constitue bien une équation différentielle d'ordre $n + 1$ pour les variables (y, τ) . □

Le prix à payer est donc une augmentation de la dimensionalité du système étudié, ce qui peut considérablement compliquer la représentation et la compréhension des solutions.

2.2 Quelques conséquences de la linéarité

Un premier résultat important, parfois appelé *principe de superposition* (mais c'est un théorème !), affirme que toute combinaison linéaire de solutions d'une équation différentielle linéaire homogène est aussi une solution. Plus précisément :

Théorème 2.2 *Soit $A(t)$ une matrice $n \times n$ fonction continue de t . Si $y_1(t)$ et $y_2(t)$ sont 2 solutions de l'équation différentielle linéaire homogène $\dot{y}(t) = A(t)y(t)$, alors toute combinaison linéaire des 2 solutions :*

$$C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t),$$

est aussi une solution.

Ce résultat évident est une conséquence directe de la linéarité (le vérifier).

Un autre résultat bien connu affirme que la solution générale d'une équation différentielle linéaire non homogène est obtenue comme la somme d'une solution particulière de l'équation non homogène et de la solution de l'équation homogène associée. Soit

Théorème 2.3 Soit $y_p(t)$ une solution particulière de l'équation non homogène

$$\dot{y}(t) = A(t)y(t) + \mathbf{b}(t)$$

$y(t)$ est solution générale de l'équation différentielle précédente si et seulement si l'on a

$$y(t) = y_p(t) + y_h(t),$$

où $y_h(t)$ est solution de l'équation homogène $\dot{y}(t) = A(t)y(t)$.

On a d'abord que

$$\dot{y}_p(t) + \dot{y}_h(t) = A(t)y_p(t) + \mathbf{b}(t) + A(t)y_h(t) = A(t)(\dot{y}_p(t) + \dot{y}_h(t)) + \mathbf{b}(t),$$

et réciproquement, si $y(t) = y_p(t) + y_h(t)$ est solution de l'équation non homogène, alors

$$\dot{y}(t) - \dot{y}_p(t) = A(t)y(t) + \mathbf{b}(t) - A(t)y_p(t) - \mathbf{b}(t) = A(t)(y(t) - y_p(t)),$$

est donc bien solution de l'équation homogène. \square

Ces 2 résultats très généraux ne donnent pas de moyens opérationnels pour déterminer de façon explicite les solutions des équations différentielles homogènes ou inhomogènes. Nous verrons au Chapitre 3 qu'il est possible, à l'aide d'outils d'algèbre linéaire, d'obtenir des solutions explicites mais seulement dans le cas plus simple où la matrice A ne dépend pas de la variable t .

2.3 Deux solutions explicites importantes

Dans cette section, on rappelle 2 exemples de solutions explicites fréquemment rencontrées dans les applications.

2.3.1 Equation différentielle linéaire du 1er ordre

Un premier cas très simple où le calcul explicite est possible correspond au cas de la dimension $n = 1$, c'est-à-dire au cas d'une seule équation différentielle linéaire que l'on écrira sous la forme

$$\dot{y}(t) = a(t)y(t) + b(t),$$

dont on cherche la solution avec pour condition initiale $y(0) = y_0$.

L'équation homogène est à variables séparables : $\frac{dy}{y} = a(t)dt$, et on en déduit que la solution générale de l'équation homogène est donnée par :

$$y_h(t) = y_0 e^{\int_0^t a(\tau) d\tau}.$$

Une façon élémentaire pour obtenir la solution de l'équation inhomogène consiste à utiliser la méthode dite de *la variation de la constante*. Autrement dit, on cherche la solution sous la forme $y(t) = C(t)e^{\int_0^t a(\tau) d\tau}$. En dérivant, on obtient $\dot{y}(t) = \dot{C}(t)e^{\int_0^t a(\tau) d\tau} + C(t)a(t)e^{\int_0^t a(\tau) d\tau}$. Comme on doit avoir par ailleurs $\dot{y}(t) = a(t)y(t) + b(t)$, on en déduit que la fonction $t \mapsto C(t)$ est déterminée par l'équation différentielle $\dot{C}(t) = b(t)e^{-\int_0^t a(\tau) d\tau}$ avec la condition initiale $C(0) = y_0$.

On est donc arrivé au résultat suivant :

Théorème 2.4 Soit $t \mapsto a(t)$ et $t \mapsto b(t)$ des fonctions continues, la solution générale de l'équation différentielle linéaire

$$\dot{y}(t) = a(t)y(t) + b(t),$$

est donnée par :

$$y(t) = g(t) \left[y_0 + \int_0^t \frac{b(\tau)}{g(\tau)} d\tau \right],$$

$$g(t) \equiv e^{\int_0^t a(\tau) d\tau}.$$

Ainsi toutes les équations différentielles linéaires du 1er ordre (homogènes ou inhomogènes) sont exactement intégrables.

Faisant le lien avec le résultat de la section précédente, on pourra remarquer que $g(t) \int_0^t b(\tau)/g(\tau) d\tau$ est une solution particulière explicite de l'équation non homogène (le vérifier), tandis que $y_0 g(t)$ est la solution générale de l'équation homogène. $g(t)$, solution de l'équation homogène pour la condition initiale particulière $g(0) = 1$, est appelée la *résolvante* de l'équation différentielle.

Exemple Considérons une particule soumise à la fois à un champ de forces sinusoïdales et à une force de frottement proportionnelle à la vitesse ; le principe fondamental de la dynamique s'écrit

$$m\dot{v} = -kv + F_0 + F_1 \cos(\omega t),$$

$$v(0) = v_0,$$

k, F_0, F_1 étant des constantes.

La fonction $g(t)$ étant $e^{-kt/m}$, la solution du problème s'écrit

$$v(t) = e^{-kt/m} \left[v_0 + \int_0^t e^{+k\tau/m} \left(\frac{F_0}{m} + \frac{F_1}{m} \cos(\omega\tau) \right) d\tau \right],$$

soit

$$v(t) = v_0 e^{-kt/m} + \frac{F_0}{k} (1 - e^{-kt/m}) + \frac{F_1}{k^2 + (m\omega)^2} (k \cos(\omega t) + m\omega \sin(\omega t) - k e^{-kt/m})$$

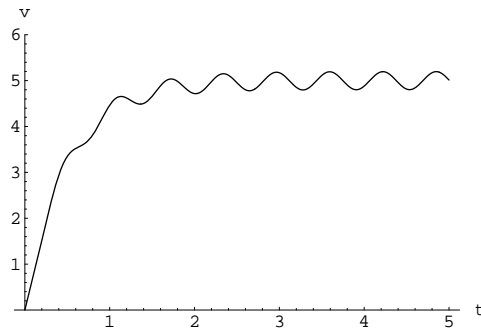
On voit donc que la solution oscille autour de la solution asymptotique $v = F_0/k$, tandis que les premières oscillations apparaissent pour un temps caractéristique de l'ordre de m/k . La position de la particule peut ensuite être obtenue par intégration de l'équation $\dot{x} = v$.

Exercice 2.1 N_i désignant la concentration d'un nucléide i et λ_i la constante de désintégration associée, le cas d'une filiation radioactive s'écrit

$$\dot{N}_1 = -\lambda_1 N_1,$$

$$\dot{N}_2 = +\lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2.$$

Les conditions initiales sont telles que $N_1(0) = N_0$ et $N_2(0) = 0$. Résoudre l'équation différentielle associée à N_1 . En déduire l'équation différentielle vérifiée par N_2 et la résoudre. On distinguera les cas $\lambda_1 = \lambda_2$ et $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

FIG. 2.1 – Solution de $\dot{v} = -2v + 10 - 2 \cos(10t)$, $v(0) = 0$.

2.3.2 Equations différentielles du second ordre à coefficients constants

Un autre cas intéressant par le nombre de ses applications est celui des *équations différentielles du second ordre à coefficients constants*. La mécanique et l'électromagnétisme fournissent, parmi d'autres domaines, des exemples incontournables de telles équations. On peut citer en particulier l'équation qui décrit le mouvement d'une masse m rappelée par un ressort linéaire de constante de raideur k , en présence de frottement d'amortissement constant α (*oscillateur harmonique amorti*); si $x(t)$ désigne le déplacement par rapport à la position d'équilibre, on a :

$$m\ddot{x}(t) + \alpha\dot{x}(t) + kx(t) = 0.$$

De même, la charge $q(t)$ circulant dans un circuit RLC série alimenté par un générateur fournissant une tension $E(t)$ s'écrit

$$L\ddot{q}(t) + R\dot{q}(t) + \frac{1}{C}q(t) = E(t).$$

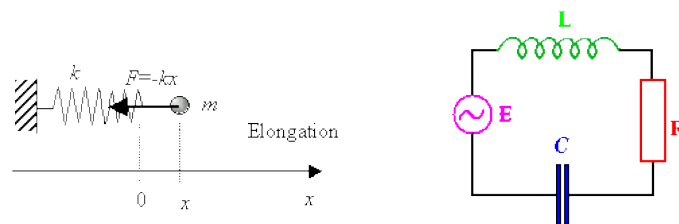


FIG. 2.2 – Oscillateurs mécaniques et électriques.

Rappelons la démarche habituellement suivie pour déterminer les solutions de ce type d'équation différentielle :

Théorème 2.5 Pour résoudre l'équation différentielle à coefficients constants :

$$y''(x) + a y'(x) + b y(x) = 0,$$

on cherche des solutions sous la forme $y(x) = e^{rx}$ ce qui conduit à l'équation caractéristique

$$r^2 + ar + b = 0.$$

3 cas sont ensuite à considérer :

1. L'équation caractéristique a 2 racines réelles r_1 et r_2 , et la solution générale s'écrit :

$$y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$$

2. L'équation caractéristique a 1 racine double r , et la solution générale s'écrit :

$$y(x) = e^{rx} (c_1 + c_2 x)$$

3. L'équation caractéristique a 2 racines complexes conjuguées $\alpha \pm i\beta$, et la solution générale s'écrit :

$$y(x) = e^{\alpha x} (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x).$$

Les constantes c_1 et c_2 dépendent du choix des conditions initiales.

Au vu de ces résultats, il est clair que la famille des exponentielles joue un rôle déterminant dans la solution des équations différentielles à coefficients constants. On peut déjà s'en rendre compte en étudiant les exemples très simples, mais fondamentaux, qui suivent.

Exemple Considérons pour commencer l'équation différentielle $\ddot{x}(t) = x(t)$. Quelles sont les fonctions qui ne sont pas modifiées lorsqu'on les dérive 2 fois ? Il s'agit précisément des fonctions exponentielles $e^{\pm t}$, et l'ensemble des solutions de cette équation différentielle peut s'écrire : $x(t) = A e^t + B e^{-t}$, où A et B sont des constantes arbitraires. Une solution équivalente est donnée par $x(t) = C \cosh t + D \sinh t$.

Quelles sont maintenant les fonctions qui changent de signe lorsqu'on les dérive 2 fois ? C'est-à-dire qui satisfont l'équation différentielle $\ddot{x}(t) = -x(t)$. Il s'agit encore de fonctions exponentielles, mais avec un argument imaginaire pur : $e^{\pm it}$. Les solutions générales s'écrivent donc : $x(t) = A e^{it} + B e^{-it}$, ou $x(t) = C \cos t + D \sin t$.

A la différence des 2 cas précédents, les fonctions qui s'annulent deux fois lorsqu'on les dérive : $\ddot{x}(t) = 0$, ne correspondent plus à des solutions de type exponentielle, mais à des fonctions linéaires : $x(t) = A + B t$.

Exercice 2.2 On considère l'équation différentielle : $\ddot{x} = 2\gamma\dot{x} - x$, avec $\gamma \in \mathbb{R}$.

- Quelle est la solution de cette équation pour $\gamma = -1$?
- Discuter le comportement des racines de l'équation caractéristique au voisinage de $\gamma = -1$ (on pourra poser $\gamma = -1 + \epsilon$, avec $|\epsilon| \ll 1$).

On propose de justifier la démarche du théorème 2.5 par une méthode qui n'utilise que la solution des équations différentielles homogènes ou non homogènes du 1er ordre :

Exercice 2.3 L'équation différentielle à coefficients constants $y''(x) + a y'(x) + b y(x) = 0$, peut s'écrire formellement sous la forme :

$$(D^2 + a D + b I) y = 0,$$

où on a introduit l'opérateur de dérivation $D = \frac{d}{dx}$ et l'identité I .

1. Etablir les égalités

$$y'' + a y' + b y = (D - r_1 I)(D - r_2 I) y = (D - r_2 I)(D - r_1 I) y,$$

où r_1 et r_2 sont des constantes, réelles ou complexes, que l'on déterminera.

2. Pour trouver les solutions générales y de l'équation différentielle, on pose $z = (D - r_2 I)y$. Les solutions sont donc obtenues par la résolution des équations différentielles du 1er ordre :

$$\begin{aligned} (D - r_1 I) z &= 0, \\ (D - r_2 I) y &= z. \end{aligned}$$

Intégrer successivement ces 2 équations différentielles et retrouver les solutions générales de l'équation différentielle annoncées plus haut.

La méthode proposée dans l'exercice précédent revient en fait à présenter l'équation différentielle initiale sous la forme d'un système différentiel dont la matrice est triangulaire. Elle peut être étendue sans difficulté à des équations d'ordre plus élevé avec ou sans second membre ainsi que le montrent les exemples suivants.

Exercice 2.4 Utilisez une démarche similaire à celle de l'exercice précédent pour montrer que l'équation différentielle :

$$\ddot{y}(t) - 3\dot{y}(t) + 2y(t) = 0,$$

a pour solution

$$y(t) = A e^{-2t} + B e^t + C t e^t,$$

où A, B et C sont des constantes arbitraires.

Exercice 2.5 Montrer que la solution générale de l'équation différentielle

$$\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 4y(t) = \sin 2t,$$

est donnée par

$$y(t) = A e^{-t} + e^{-t} (B \cos t + C \sin t) - \frac{1}{10} \sin 2t.$$

On pourra commencer par résoudre l'équation sans second membre puis on cherchera une solution particulière de l'équation avec second membre.

Exercice 2.6 Montrer que la solution générale de l'équation différentielle décrivant un oscillateur harmonique forcé

$$\ddot{y}(t) + a^2 y(t) = \sin bt, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

est donnée par

$$y(t) = A \cos at + B \sin at + \frac{1}{a^2 - b^2} \sin bt,$$

lorsque $b \neq a$, mais par

$$y(t) = A \cos at + B \sin at - \frac{t}{2a} \cos at,$$

à la résonance (i.e. lorsque $b = a$).

2.4 Système d'équations différentielles du 1er ordre

On a déjà souligné l'avantage qu'il pouvait y avoir à remplacer une équation différentielle d'ordre élevé par un système d'équations différentielles d'ordre plus bas. Cette procédure peut être rendue systématique, et simplifie, à la fois la démonstration des théorèmes et la détermination des solutions.

Considérons par exemple le cas bien connu du pendule placé dans un champ de gravité. L'équation différentielle non linéaire du second ordre décrivant le mouvement s'écrit dans un système d'unités ad hoc

$$\ddot{x} + \sin x = 0,$$

où x représente une variable angulaire. En mécanique, il est naturel d'introduire la variable conjuguée \dot{x} qui représente la vitesse angulaire, ce qui permet d'écrire l'équation précédente du 2ième ordre sous la forme d'un système de 2 équations différentielles du 1er ordre :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -\sin x. \end{aligned}$$

Plus généralement,

Théorème 2.6 Toute équation différentielle (explicite) d'ordre n ($n \geq 1$), linéaire ou non linéaire, peut être transformée en un système de n équations différentielles du 1er ordre.

Soit donc l'équation différentielle explicite d'ordre n :

$$y^{(n)} = f(y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)}, t).$$

Introduisons n nouvelles fonctions : $z_1 = y, z_2 = \dot{y}, \dots, z_n = y^{(n-1)}$; l'équation différentielle est alors équivalente au système différentiel (en général non linéaire) portant sur les nouvelles variables z_1, \dots, z_n .

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2, \\ &\dots, \\ \dot{z}_{n-1} &= z_n, \\ \dot{z}_n &= f(z_1, z_2, \dots, z_n, t). \end{aligned}$$

□

On notera que la réciproque n'est pas vérifiée : un système différentiel arbitraire de n équations différentielles du 1er ordre, ne peut pas, en général, être ramené à une seule équation différentielle d'ordre n .

Exemple L'équation différentielle linéaire :

$$y^{(n)}(t) = a_1(t)y(t) + a_2(t)\dot{y}(t) + \cdots + a_n(t)y^{(n-1)}(t),$$

peut s'écrire comme un système différentiel d'ordre n associé à la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ a_1(t) & a_2(t) & \cdots & a_{n-1}(t) & a_n(t) \end{pmatrix}$$

D'une façon plus systématique, on sera amené à étudier les systèmes de n équations différentielles du 1er ordre, que l'on définira par les équations

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= f_1(y_1, \cdots, y_n, t), \\ &\cdots \\ \dot{y}_n &= f_n(y_1, \cdots, y_n, t), \end{aligned}$$

complétées par les conditions initiales

$$y_1(0) = y_{01}, \cdots, y_n(0) = y_{0n}.$$

Introduisons les vecteurs de \mathbb{R}^n $\mathbf{y} = (y_1, \cdots, y_n)$, $\mathbf{y}_0 = (y_{01}, \cdots, y_{0n})$, et la fonction vectorielle $\mathbf{f} = (f_1, \cdots, f_n)$. Le système différentiel précédent peut être écrit sous la forme d'une seule équation différentielle dans \mathbb{R}^n

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{y}}(t) &= \mathbf{f}(\mathbf{y}(t), t), \\ \mathbf{y}(0) &= \mathbf{y}_0, \end{aligned}$$

où on retiendra que \mathbf{y} et \mathbf{y}_0 sont des éléments de \mathbb{R}^n .

Exercice 2.7 On considère le système différentiel :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +y(t) \\ -x(t) \end{pmatrix}$$

1. Montrer que x et y satisfont la même équation différentielle du second ordre, et donner sa solution générale en fonction de 2 constantes arbitraires.
2. Les conditions initiales du système différentiel sont $x(0) = x_0$ et $y(0) = y_0$. Avec quelles conditions initiales doivent être résolues les équations différentielles du second ordre en x et en y ?
3. Montrer que la solution du système différentiel peut s'écrire sous la forme

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \mathcal{R}(t) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix},$$

où $\mathcal{R}(t)$ est une matrice que l'on précisera.

2.5 Equation intégrale

Un formalisme encore plus compact réunit en une seule *équation intégrale* le système différentiel *et* sa condition initiale :

Théorème 2.7 Soit $\mathbf{f} : U \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue, définie sur le produit d'un ouvert U de \mathbb{R}^n et d'un intervalle I de \mathbb{R} . L'équation différentielle $\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{y}(t), t)$ qui passe par \mathbf{y}_0 à $t = 0$, est équivalente à l'équation intégrale¹

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_0 + \int_0^t \mathbf{f}(\mathbf{y}(\tau), \tau) d\tau.$$

La condition initiale est trivialement satisfaite et le système différentiel est retrouvé directement par dérivation (le vérifier). \square

Il est alors tentant de substituer l'expression de $\mathbf{y}(t)$ sous l'intégrale et de générer ainsi la suite des *approximations de Picard*. Partant d'une fonction d'essai $\mathbf{y}^{(0)}(t)$ (un choix courant consiste à prendre la condition initiale $\mathbf{y}^{(0)}(t) = \mathbf{y}_0$), l'itération d'ordre (p) est générée à partir de la précédente par la relation :

$$\mathbf{y}^{(p)}(t) = \mathbf{y}_0 + \int_0^t \mathbf{f}(\mathbf{y}^{(p-1)}(\tau), \tau) d\tau.$$

Le problème est évidemment de savoir si la suite ainsi générée converge vers une fonction solution du système différentiel étudié et si cette solution est unique.

Exemple Cherchons les premières approximations de Picard de l'équation différentielle

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= 1 + y^2(t), \\ y(0) &= 0 \end{aligned}$$

Partant de $y^{(0)}(t) = y(0) = 0$, on trouve successivement

$$\begin{aligned} y^{(1)}(t) &= \int_0^t (1 + 0^2) d\tau = t, \\ y^{(2)}(t) &= \int_0^t (1 + \tau^2) d\tau = t + \frac{t^3}{3}, \\ y^{(3)}(t) &= \int_0^t \left(1 + \left(\tau + \frac{\tau^3}{3} \right)^2 \right) d\tau = t + \frac{t^3}{3} + \frac{2t^5}{15} + \frac{t^7}{63}, \\ &\dots \end{aligned}$$

Cette équation différentielle peut être intégrée exactement (elle est à variables séparables). On reconnaît le début du développement de la solution $y(t) = \tan t$ dans les premières approximations reportées ci-dessus.

¹Plus précisément, il s'agit d'une équation intégrale non linéaire de Volterra.

2.6 Théorème d'existence et d'unicité

Dans cette section, on donne le théorème fondamental de Cauchy-Lipschitz qui garantit *localement* l'existence et l'unicité des solutions des équations différentielles, éventuellement non linéaires, dans des conditions peu contraignantes. La démonstration de ce résultat passe par la preuve de la convergence des itérations de Picard introduites auparavant. Nous en donnons la formulation dans le cas d'une seule équation différentielle.

Théorème 2.8 Soit $f : I \times U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, où U et I sont des intervalles bornés de \mathbb{R} qui contiennent respectivement les points $y = y_0$ et $t = 0$. On suppose en outre que f vérifie la condition dite de Lipschitz :

$$\forall t \in I, \forall x, y \in U, \quad |f(t, x) - f(t, y)| \leq \lambda |x - y|,$$

avec $\lambda > 0$.

Il existe un intervalle $J \subseteq I$ sur lequel est défini l'unique solution de l'équation différentielle $\dot{y}(t) = f(t, y(t))$ qui satisfait la condition initiale $y(0) = y_0$.

On admettra que ce théorème admet une généralisation au cas d'un système d'équations différentielles.

Hormis la continuité, la condition moins triviale imposée par le théorème est la condition de Lipschitz. Une condition plus parlante qui implique l'inégalité de Lipschitz, est que f et $\frac{\partial f}{\partial y}$ soient continues dans $I \times U$. En effet, les fonctions continues sur des intervalles bornés sont bornées. Puis par le théorème des accroissements finis, on a pour tout $(t, y_1), (t, y_2) \in I \times U$,

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| = \left| \frac{\partial f}{\partial y}(c) \right| |y_2 - y_1|,$$

où $c \in [y_1, y_2]$. La condition de Lipschitz résulte alors du caractère borné de la dérivée partielle.

Il est intéressant de constater que si la dérivée partielle n'est pas bornée, il peut exister plusieurs solutions, comme le montre l'exemple suivant

Exemple Considérons l'équation différentielle

$$\dot{y} = y^{1/3},$$

avec pour condition initiale $y(0) = 0$. La fonction $y \mapsto y^{1/3}$ est continue. En revanche sa dérivée n'est pas définie en 0. Les conditions du théorème ne sont donc pas remplies et on vérifiera que $y = 0$ et $y = \pm \sqrt[3]{8/27} t^{3/2}$ sont solutions de l'équation différentielle.

Commentaires Le théorème de Cauchy-Lipschitz garantit en particulier l'unicité des solutions des équations différentielles pour une condition initiale donnée. Autrement dit, à 2 conditions initiales différentes, correspondent 2 solutions différentes pour toutes les valeurs antérieures ou postérieures de t . En terme dynamique, 2 trajectoires partant de 2 points initiaux différents ne peuvent se couper ou même se toucher. Cette remarque nous permettra plus loin de représenter facilement sur un même

schéma, différentes solutions des équations différentielles non linéaires correspondant à différentes conditions initiales.

L'équation différentielle étant définie pour $t \in I$, le théorème de Cauchy-Lipschitz ne garantit l'existence de solutions (bornées), que dans un intervalle J plus petit que I . Le fait que les solutions n'existent dans le cas général que sur un intervalle plus petit que l'intervalle de définition de l'équation différentielle est associé au phénomène dit *d'explosion* en temps fini de la solution. Donnons un exemple de ce comportement.

Exemple On considère l'équation différentielle $\dot{y} = y^2$ définie pour toute valeur $t \in \mathbb{R}$, avec la condition initiale $y(0) = 25$. Cette équation différentielle non linéaire est à variables séparables et il est facile de trouver l'unique solution :

$$y(t) = \frac{1}{1/25 - t}.$$

Il est clair que la solution n'est pas définie pour $t = 1/25$. Le domaine d'existence de la solution est $J =] - \infty, 1/25[\subset \mathbb{R}$.

Ce phénomène d'explosion en temps fini des solutions est la signature d'un comportement non linéaire. On peut en effet démontrer que l'équation différentielle linéaire du type $\dot{y}(t) = a(t)y(t) + b(t)$ avec $y(0) = y_0$ où a et b sont des fonctions continues pour tout $t \in I$, admet une unique solution définie dans I tout entier.

Chapitre 3

Systemes Différentiels Linéaires

Les équations différentielles linéaires - au moins celles à coefficients constants - sont les seules équations différentielles pour lesquelles les solutions peuvent être formulées d'une façon systématique et explicite. Cette formulation s'appuie essentiellement sur des résultats d'algèbre linéaire que nous aurons ainsi l'occasion de retravailler. Une conséquence de l'existence et de l'unicité des solutions des systèmes différentiels exposée dans le chapitre précédent, est la possibilité, pour les équations linéaires, de relier la solution à l'instant origine, avec la solution à un instant t ultérieur, au moyen d'un opérateur d'évolution, appelé *propagateur*. Ce point de vue, à fort contenu géométrique, éclaire le problème de la résolution des équations différentielles sous un jour nouveau qui s'avèrera également utile pour l'interprétation des équations différentielles non linéaires.

3.1 Exponentielle de matrice

Dans cette section on donne quelques définitions et propriétés qui généralisent aux matrices des résultats bien connus pour les éléments de \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

Définition 3.1 Soit A une matrice $n \times n$. L'exponentielle de A est définie par

$$e^A \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \equiv I + A + \frac{A^2}{2!} + \dots$$

Soit α un nombre positif tel que $|a_{ij}| \leq \alpha$ pour tout i, j variant de 1 à n . Manifestement les éléments de A^2 qui s'écrivent $a_{i1}a_{1j} + \dots + a_{in}a_{nj}$ sont eux mêmes majorés par $n\alpha^2$, et plus généralement les éléments de A^k sont majorés par $n^{k-1}\alpha^k$. Ainsi chacun des éléments de e^A est tel que :

$$|(e^A)_{ij}| \leq 1 + \alpha + \frac{n\alpha^2}{2!} + \dots + \frac{n^{k-1}\alpha^k}{k!} + \dots \leq e^{n\alpha},$$

ce qui montre que tous les éléments d' e^A existent, et donc que e^A est définie. □

Démontrons maintenant 2 propriétés qui auront une importance capitale pour la suite.

Théorème 3.1 Soient A une matrice $n \times n$ à coefficients constants.

$$\begin{aligned} e^{(s+t)A} &= e^{sA} e^{tA}, \quad s, t \in \mathbb{R} \\ \frac{d}{dt} (e^{tA}) &= A e^{tA}, \quad t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

La première propriété est démontrée à l'aide de la formule du binôme :

$$\begin{aligned} e^{(s+t)A} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(s+t)^n A^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} \left[\sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)!k!} s^{n-k} t^k \right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{A^n s^{n-k} t^k}{(n-k)!k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^{m+k} s^m t^k}{m!k!} = e^{sA} e^{tA}. \end{aligned}$$

Pour démontrer la deuxième propriété, on écrit la définition de la dérivée

$$\frac{d}{dt} (e^{tA}) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{e^{(t+s)A} - e^{tA}}{s} = e^{tA} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{e^{sA} - 1}{s} = e^{tA} A$$

□

Le cas particulier $s = 1$ et $t = -1$ montre que l'inverse de e^A est la matrice e^{-A} . La première propriété ne doit pas être généralisée aux cas de matrices A et B qui ne commutent pas :

$$e^{A+B} \neq e^A e^B \neq e^B e^A, \text{ en général.}$$

Exercice 3.1 Montrer que si A est une matrice réelle antisymétrique (c'est à dire telle que $A^T = -A$), alors e^{tA} est une matrice orthogonale (c'est à dire que $e^{tA} (e^{tA})^T = I$).

Indication : calculer $\frac{d}{dt} [e^{tA} (e^{tA})^T]$.

3.2 Propagateur

Repartons de la suite des approximations de Picard et tirons partie du fait que A est indépendant de t . On a donc, formellement :

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t) &= \mathbf{y}_0 + \int_0^t A \mathbf{y}(\tau) d\tau \\ &= \left[I + A \left(\int_0^t dt_1 \right) + A^2 \int_0^t \left(\int_0^{t_1} dt_2 \right) dt_1 + \dots \right] \mathbf{y}_0 \\ &= \left[I + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \dots \right] \mathbf{y}_0 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^n}{n!} \mathbf{y}_0 = e^{tA} \mathbf{y}_0 \end{aligned}$$

Les propriétés mêmes de l'exponentielle d'un opérateur permettent de retrouver très aisément ce résultat.

Théorème 3.2 Soit A une matrice $n \times n$ à coefficients constants (indépendants de t), l'équation différentielle linéaire homogène

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{y}}(t) &= A\mathbf{y}(t), \\ \mathbf{y}(0) &= \mathbf{y}_0,\end{aligned}$$

admet pour unique solution

$$\mathbf{y}(t) = e^{tA}\mathbf{y}_0.$$

Résultat évident puisqu'on a manifestement $e^0 = I$ et $\dot{\mathbf{y}}(t) = Ae^{tA}\mathbf{y}_0 = A\mathbf{y}(t)$. L'unicité est garantie par le théorème de Cauchy-Lipschitz. \square

Ce résultat fondamental met donc en jeu un opérateur e^{tA} qui permet de passer de la position à l'instant initial \mathbf{y}_0 à la position à l'instant t ; pour cette raison e^{tA} est appelé *propagateur*.

La forme explicite de la solution dans le cas non homogène est donnée par le théorème suivant :

Théorème 3.3 Soient J un intervalle de \mathbb{R} qui contient le point $t = 0$, A une matrice $n \times n$ qui ne dépend pas de t et $t \mapsto \mathbf{b}(t)$ une fonction continue de $t \in J$, le système différentiel linéaire non homogène

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{y}}(t) &= A\mathbf{y}(t) + \mathbf{b}(t), \\ \mathbf{y}(0) &= \mathbf{y}_0,\end{aligned}$$

admet une solution unique pour tout $t \in J$.

Cette solution est donnée explicitement par

$$\mathbf{y}(t) = e^{tA}\mathbf{y}_0 + \int_0^t e^{(t-\tau)A}\mathbf{b}(\tau)d\tau.$$

Soit $G(t) = e^{tA}$ le propagateur associé au système homogène. La solution de l'équation non homogène est obtenue en cherchant une solution sous la forme $\mathbf{y}(t) = G(t)\mathbf{x}(t)$. On a d'une part

$$\dot{\mathbf{y}} = \dot{G}\mathbf{x} + G\dot{\mathbf{x}} = AG\mathbf{x} + G\dot{\mathbf{x}},$$

et d'autre part $\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y} + \mathbf{b} = AG\mathbf{x} + \mathbf{b}$. Il s'ensuit que \mathbf{x} satisfait

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= G^{-1}(t)\mathbf{b}(t), \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{y}_0,\end{aligned}$$

qui admet pour unique solution

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{y}_0 + \int_0^t G^{-1}(\tau)\mathbf{b}(\tau)d\tau.$$

\square

Ainsi la seule connaissance du propagateur permet donc de résoudre les systèmes différentiels linéaires avec ou sans second membre. Pour cette raison, le propagateur est également appelé *résolvante*.

3.3 Calcul pratique du propagateur

Les résultats précédents, pour concis qu'ils soient, ne nous dispensent cependant pas de calculer explicitement l'exponentielle d'un opérateur, ce qui peut être tout de même délicat, surtout en dimension élevée.

Si la matrice A est diagonalisable, les choses sont simples.

Théorème 3.4 *Soit A une matrice $n \times n$ diagonalisable. Le propagateur de l'équation différentielle homogène à coefficients constants : $\dot{\mathbf{y}}(t) = A\mathbf{y}(t)$ est donné par :*

$$e^{tA} = Pe^{tD}P^{-1},$$

où D est la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les valeurs propres de A , et où P est la matrice dont les colonnes sont les vecteurs propres de A .

En effet, si A est diagonalisable, on a $P^{-1}AP = D$. Comme $A^n = PD^nP^{-1}$, avec D^n diagonale, on en déduit que e^{tD} est elle-même diagonale, avec pour éléments $(e^{t\lambda_1}, \dots, e^{t\lambda_n})$, de sorte que $e^{tA} = Pe^{tD}P^{-1}$. \square

Dans le cas où A n'est pas diagonalisable, on peut s'appuyer sur le théorème suivant que nous ne démontrerons pas¹ :

Théorème 3.5 *Toute matrice A possède une décomposition unique $A = S + N$, où*

- S est diagonalisable,
- N est nilpotente (i.e. pour k suffisamment grand $N^k = 0$),
- S et N commutent.

Comme S et N commutent, on en déduit que $e^{tA} = e^{tS}e^{tN}$. S étant diagonalisable, e^{tS} se calcule comme expliqué ci-dessus, tandis que puisque N est nilpotente, on a, en appliquant la définition de l'exponentielle d'une matrice : $e^{tN} = I + tN + \dots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}N^{k-1}$.

3.4 Equations différentielles en dimension 2

3.4.1 Diagonalisation des matrices 2×2

Soit A une matrice 2×2 quelconque à coefficients réels. Lorsqu'il existe un vecteur $v \neq 0$ qui satisfait :

$$Av = \lambda v,$$

on dit que λ est la *valeur propre* de A correspondant au *vecteur propre* v . Géométriquement, l'opérateur linéaire associé à la matrice A contracte ou dilate ces vecteurs de l'espace dans leur propre direction.

Posons

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

¹ce théorème est une conséquence du théorème de réduction à la forme normale de Jordan.

Le système $Av = \lambda v$ est équivalent à la résolution du systèmes d'équations :

$$(A - \lambda I) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0,$$

qui n'admet de solutions non nulles, que si le déterminant est nul, soit :

$$\det(A - \lambda I) = (a - \lambda)(d - \lambda) - bc = 0.$$

En introduisant la trace de la matrice (somme des éléments diagonaux) et le déterminant de A , on montre aisément que les valeurs propres sont les racines du *pôlynome caractéristique* $P(\lambda)$ suivant :

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda \operatorname{tr} A + \det A = 0.$$

Les solutions s'écrivent

$$\lambda_{1,2} = \frac{\operatorname{tr} A \pm \sqrt{(\operatorname{tr} A)^2 - 4 \det A}}{2}$$

On peut noter que

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} A &= \lambda_1 + \lambda_2, \\ \det A &= \lambda_1 \lambda_2. \end{aligned}$$

Les vecteurs propres sont obtenus par résolution du système linéaire $(A - \lambda I)v = 0$.

3 cas sont donc possibles

1. $(\operatorname{tr} A)^2 - 4 \det A > 0$: 2 valeurs propres réelles distinctes.
2. $(\operatorname{tr} A)^2 - 4 \det A = 0$: 1 valeur propre réelle double.
3. $(\operatorname{tr} A)^2 - 4 \det A < 0$: 2 valeurs propres complexes conjuguées.

Exercice 3.2 *On considère le système différentiel*

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Montrer que x (ou y) satisfait l'équation différentielle du 2ième ordre : $P(D)x = 0$, où P représente le pôlynome caractéristique et D l'opérateur $\frac{d}{dx}$.

En déduire que x peut être obtenu par résolution du système auxiliaire :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad U = \begin{pmatrix} \lambda_2 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix},$$

où λ_1 et λ_2 sont les valeurs propres de A , et z une variable auxiliaire.

Résoudre le système précédent et en déduire les expressions de x (ou y) en fonction de λ_1 et λ_2 .

3.4.2 Forme explicite du propagateur en dimension 2

Dans cette section on utilise le fait que les puissances successives d'une matrice ne sont pas indépendantes pour donner une forme explicite compacte au propagateur e^{tA} . Le théorème de Cayley-Hamilton joue un rôle fondamental dans cette réduction. $P(X)$ désignant le pôleynome caractéristique évoqué plus haut, ce théorème affirme que $P(A) = 0$ (le vérifier), soit plus explicitement :

$$(A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I) = 0.$$

1. *Valeurs propres réelles distinctes* : $\lambda_1 \neq \lambda_2$. La matrice A peut s'écrire (le vérifier) :

$$A = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2,$$

où on a introduit les 2 opérateurs de projection

$$P_1 = \frac{A - \lambda_2 I}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad P_2 = \frac{A - \lambda_1 I}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

Exercice 3.3 Soient $P_1 = (A - \lambda_2 I)/(\lambda_1 - \lambda_2)$ et $P_2 = (A - \lambda_1 I)/(\lambda_2 - \lambda_1)$, montrer que

- P_1 (resp. P_2) projette tout vecteur \mathbf{v} du plan sur la direction du vecteur propre \mathbf{v}_1 (resp. \mathbf{v}_2) parallèlement à la direction de l'autre vecteur propre \mathbf{v}_2 (resp. \mathbf{v}_1).
- $P_1^n = P_1$ et $P_2^n = P_2$ pour tout $n \geq 1$

Ces 2 opérateurs vérifient en outre, l'égalité $P_1 + P_2 = I$ (par définition), ainsi que $P_1 P_2 = P_2 P_1 = 0$, par application du théorème de Cayley-Hamilton .

Comme P_1 et P_2 commutent, on a $e^{tA} = e^{t\lambda_1 P_1} e^{t\lambda_2 P_2}$, et en utilisant les propriétés des projecteurs énoncés plus haut, on trouve

$$e^{tA} = e^{\lambda_1 t} P_1 + e^{\lambda_2 t} P_2.$$

Exercice 3.4 Etablir la relation $e^{tA} = e^{\lambda_1 t} P_1 + e^{\lambda_2 t} P_2$.

On constate donc que l'action de l'opérateur sur le vecteur initial \mathbf{y}_0 , se ramène à une projection sur chacun des sous-espaces propres, accompagnée d'une dilation ou d'une contraction dans la direction de ces espaces propres.

2. *Valeurs propres complexes conjuguées* : $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$.

Le théorème de Cayley-Hamilton s'écrit :

$$(A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I) = 0 \Leftrightarrow (A - \alpha I)^2 = -\beta^2 I,$$

soit encore

$$A - \alpha I = \pm\beta J \quad \text{avec} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ +1 & 0 \end{pmatrix},$$

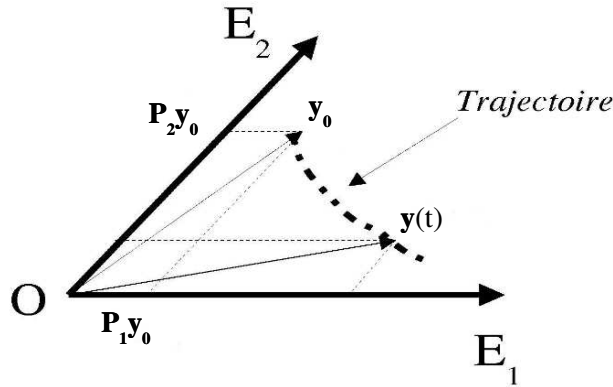


FIG. 3.1 – Action du propagateur sur le vecteur initial y_0 dans le cas de 2 valeurs propres réelles et distinctes. E_1 et E_2 désignent les sous-espaces propres engendrés par les vecteurs propres v_1 et v_2 . La figure est faite dans le cas $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 < 0$.

puisque $J^2 = -I$. Comme par ailleurs,

$$e^{tA} = e^{t\alpha I} e^{\pm t\beta J},$$

le propagateur s'écrit sous la forme

$$e^{tA} = e^{\alpha t} \mathcal{R}(\pm \beta t),$$

où $\mathcal{R}(x)$ est la matrice de rotation

$$\mathcal{R}(x) = \begin{pmatrix} +\cos x & -\sin x \\ +\sin x & +\cos x \end{pmatrix}.$$

L'action géométrique du propagateur dans cette situation se ramène donc à une rotation qui rapproche ou éloigne de l'origine selon le signe de α .

Exercice 3.5 Soit

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ +1 & 0 \end{pmatrix},$$

montrer que

$$e^{tJ} = \begin{pmatrix} +\cos t & -\sin t \\ +\sin t & +\cos t \end{pmatrix}.$$

Montrer que ce propagateur permet de résoudre l'équation différentielle $\ddot{y}(t) + y(t) = 0$.

3. Valeur propre double : $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$.

Le théorème de Cayley-Hamilton s'écrit dans ce cas particulier :

$$(A - \lambda I)^2 = 0.$$

En utilisant la décomposition $A = \lambda I + (A - \lambda I)$ et en remarquant que λI et $(A - \lambda I)$ commutent, on obtient aussitôt la forme réduite

$$e^{tA} = e^{\lambda t} [I + t(A - \lambda I)]$$

On a donc obtenu le résultat suivant

Théorème 3.6 Soit A une matrice 2×2 à coefficients constants, λ_1 et λ_2 les valeurs propres de A , l'équation différentielle linéaire homogène

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{y}}(t) &= A\mathbf{y}(t), \\ \mathbf{y}(0) &= \mathbf{y}_0,\end{aligned}$$

admet pour solution : $\mathbf{y}(t) = e^{tA}\mathbf{y}_0$, avec

1. $e^{tA} = [e^{\lambda_1 t} P_1 + e^{\lambda_2 t} P_2]$ si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ réelles,
2. $e^{tA} = e^{\lambda t} [I + t(A - \lambda I)]$ si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$,
3. $e^{tA} = e^{\alpha t} \mathcal{R}(\beta t)$ si $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$,

où P_1 (resp. P_2) est l'opérateur de projection sur la direction du vecteur propre \mathbf{v}_1 (resp. \mathbf{v}_2) parallèlement à la direction de l'autre vecteur propre \mathbf{v}_2 (resp. \mathbf{v}_1), et où $\mathcal{R}(\beta t)$ est l'opérateur de rotation de l'angle βt dans le sens trigonométrique.

Ces résultats peuvent être utilisés pour résoudre les exercices suivants.

Exemple On considère le système différentiel

$$\begin{aligned}\dot{x} &= +7x + 4y, \\ \dot{y} &= -8x - 5y.\end{aligned}$$

Comme $\text{tr}A = 2$ et $\det A = -3$, on a

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = -1, +3.$$

L'application de la formule correspondant aux cas des valeurs propres réelles et différentes donne immédiatement

$$e^{tA} = \frac{e^{+3t}}{4} \begin{pmatrix} +8 & +4 \\ -8 & -4 \end{pmatrix} + \frac{e^{-t}}{-4} \begin{pmatrix} +4 & +4 \\ -8 & -8 \end{pmatrix}$$

soit,

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} 2e^{3t} - e^{-t} & e^{3t} - e^{-t} \\ -2e^{3t} + 2e^{-t} & -e^{3t} + 2e^{-t} \end{pmatrix}$$

La solution pour des conditions initiales x_0, y_0 est donc :

$$\begin{aligned}x(t) &= (2e^{3t} - e^{-t})x_0 + (e^{3t} - e^{-t})y_0, \\ y(t) &= (-2e^{3t} + 2e^{-t})x_0 + (-e^{3t} + 2e^{-t})y_0\end{aligned}$$

Exercice 3.6 Déterminer le propagateur et les solutions du système différentiel

$$\begin{aligned}\dot{x} &= +2x + y, \\ \dot{y} &= +2y.\end{aligned}$$

L'exercice suivant, montre qu'à contrario, si l'on sait résoudre un système différentiel linéaire, on obtient immédiatement l'exponentielle de l'opérateur associé.

Exercice 3.7 On considère le système différentiel du 1er ordre suivant :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

où a, b et c sont des réels avec $c \neq 1$.

Résoudre ce système, équation par équation, en commençant par l'équation différentielle en z , et en déduire l'exponentielle de la matrice associée au système différentiel.

Dans le cas diagonalisable, on peut obtenir une généralisation facile en dimension quelconque.

Exercice 3.8 Soit A une matrice $n \times n$ diagonalisable. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ses valeurs propres et $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ les vecteurs propres associés. Vérifier que la solution de l'équation différentielle $\dot{\mathbf{y}}(t) = A\mathbf{y}(t)$ satisfaisant $\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$ est donnée par :

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{i=1}^n c_i e^{t\lambda_i} \mathbf{v}_i,$$

où les coefficients c_i sont les composantes de \mathbf{y}_0 dans la base des vecteurs propres : $\mathbf{y}_0 = \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{v}_i$.

Voici, enfin, un exercice relatif à une équation différentielle non homogène.

Exercice 3.9 La trajectoire d'une particule chargée en présence d'un champ magnétique statique et homogène et d'un champ électrique homogène mais dépendant du temps, peut être ramenée au système suivant :

$$\begin{aligned} \dot{v}_1(t) &= +\omega_c v_2(t) + \mathcal{E}_1(t), \\ \dot{v}_2(t) &= -\omega_c v_1(t) + \mathcal{E}_2(t), \end{aligned}$$

où v_1 et v_2 représentent les composantes cartésiennes de la vitesse dans le plan orthogonal au champ magnétique, ω_c une fréquence caractéristique (fréquence cyclotron), $\mathcal{E}_1(t)$ et $\mathcal{E}_2(t)$ les composantes convenablement normalisées du champ électrique orthogonal à la direction du champ magnétique.

Déterminer le propagateur et en déduire la solution du système différentiel.

Chapitre 4

Analyse qualitative des équations différentielles

On a donné au Chapitre 2 les théorèmes qui garantissent l'existence des solutions des équations différentielles sous des conditions pas trop contraignantes. En revanche, ces théorèmes ne donnent pas de moyen explicite pour exprimer ces solutions. En fait, dans le cas non linéaire, à l'exception de quelques cas accidentels, il n'existe pas de moyen systématique pour trouver les solutions.

On doit donc abandonner l'espoir d'une solution explicite qui permette une estimation quantitative, et se tourner vers des approches plus qualitatives. Ce point de vue qui peut apparaître plus limité de prime abord s'est en fait avéré extrêmement fécond, surtout lorsqu'il est appliqué à des systèmes d'ordre assez élevé. Au début du 20ème siècle, sous l'impulsion d'Henri Poincaré, cette démarche fut à l'origine du renouveau de l'étude des *systèmes dynamiques* et a donné naissance à *la théorie du chaos*.

4.1 Exemple

Limitons nous aux équations différentielles autonomes pour lesquelles la variable t n'intervient pas explicitement ; on considère donc

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{y}} &= \mathbf{f}(\mathbf{y}), \\ \mathbf{y}(0) &= \mathbf{y}_0.\end{aligned}$$

Les solutions $\bar{\mathbf{y}}$ de l'équation $\mathbf{f}(\mathbf{y}) = 0$ sont des points particuliers pour lesquels $\dot{\mathbf{y}} = 0$; les solutions qui passent par ces points n'évoluent pas avec t : on dit que ce sont les solutions d'équilibre. Les $\bar{\mathbf{y}}$ sont appelés *points critiques (ou fixes), (ou d'équilibre)*. L'importance de l'analyse locale des solutions au voisinage des points critiques tient au fait qu'elle permet une compréhension du comportement global des solutions dans les cas les plus simples.

Avant de développer ces idées d'un point de vue plus général, considérons un cas particulier en dimension 1, par exemple le modèle logistique évoqué dans l'introduction, pour des valeurs particulières des paramètres α et N_1 ($\alpha = N_1 = 1$) :

$$\begin{aligned}\dot{N} &= N(1 - N), \\ N(0) &= N_0.\end{aligned}$$

Les points fixes sont solutions de $N(1 - N) = 0$, soit $\bar{N} = 0$ et $\bar{N} = 1$. La représentation de $f(N) = N(1 - N)$ (cf. Fig 4.1) montre clairement que $f(N) > 0$

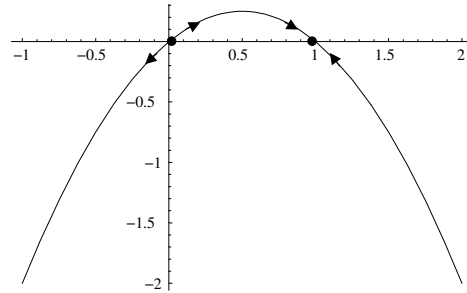


FIG. 4.1 – Application Logistique $f(N)=N(1-N)$

pour $0 < N < 1$; on en déduit que $\dot{y} > 0$ et donc que y est une fonction croissante dans ce même intervalle. On aboutit à la conclusion opposée dans les intervalles complémentaires. Les flèches reportées sur la figure indiquent le sens des variations de y . On dit que $\bar{N} = 0$ est un *point fixe instable*, puisque toute solution voisine de ce point fixe tend à s'en écarter; a contrario, le point fixe $\bar{N} = 1$ est dit *stable*. Comme on sait que les trajectoires correspondant à différentes valeurs initiales N_0 ne peuvent se couper, il est facile de tracer l'évolution qualitative des solutions correspondant à des valeurs initiales placées de part et d'autre des points fixes (cf. Fig 4.2). Ce type de représentation présentant un ensemble de solutions caractéristiques sur un

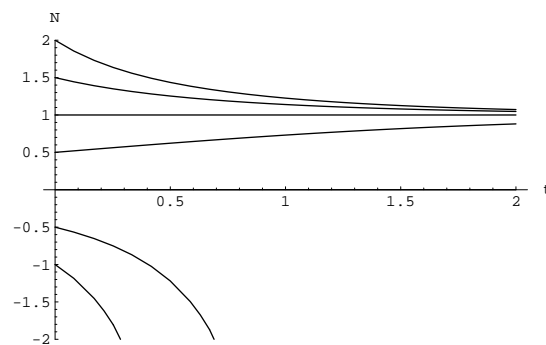


FIG. 4.2 – Solutions du Modèle Logistique

même schéma, permet de comprendre d'un coup d'oeil le comportement du système étudié. On voit que toutes les solutions telles que $N_0 < 0$ explosent en temps fini, tandis que toutes les solutions positives (les seules physiques puisque N représente une population) convergent vers la valeur limite $N_0 = 1$. On notera également que les

solutions stationnaires consistent des barrières infranchissables (d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, les solutions ne peuvent se croiser). Cet exemple montre clairement que l'analyse locale des points fixes suffit à une compréhension du comportement global de ce modèle.

4.2 Classification des points fixes (1 dimension)

La classification des points fixes à 1 dimension est très simple. Comme on va le voir on peut en distinguer 3 types qualifiés d'*attractifs* (ou *stables*), de *répulsifs* (ou *instables*) ou de *points selles* (ou *semistables*). Soit \bar{y} un point fixe, c'est à dire une des

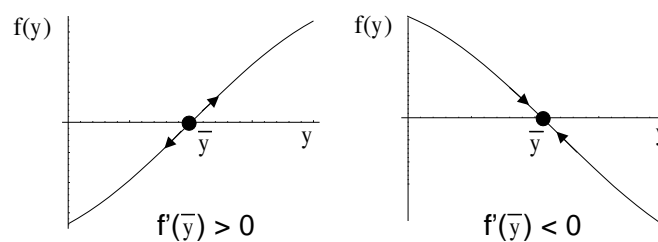


FIG. 4.3 – Points fixes stables (à droite) et instables (à gauche).

solutions de l'équation $f(\bar{y}) = 0$. Le comportement local de l'équation différentielle est donné par un développement de Taylor au voisinage de \bar{y} qui conduit à l'équation

$$\dot{y} = f'(\bar{y})(y - \bar{y}) + \mathcal{O}((y - \bar{y})^2),$$

où $f'(\bar{y})$ désigne la dérivée de f par rapport à y calculée en $y = \bar{y}$. Le développement de Taylor à cet ordre permet de discuter les cas où $f'(\bar{y}) \neq 0$ qui correspond aux cas des points stables et instables ; le sens de variation de y signalé sur la Figure 4.3 par des flèches est déterminé à partir du signe du produit $f'(\bar{y})(y - \bar{y})$. On remarquera que la situation rencontrée dans le modèle logistique correspond à un cas de raccordement des 2 cas représentés ci-dessus.

Lorsque $f'(\bar{y}) = 0$, c'est le signe de $f''(\bar{y})$ qui permet de discuter les différents cas de points selles ; les variations de y étant alors données par le signe de $f''(\bar{y})$ (développement de Taylor au 2ième ordre), voire par le signe de $f'''(\bar{y})(y - \bar{y})^3$ si $f''(\bar{y})$ est elle aussi nulle. Les différentes situations sont reportées sur la figure 4.4.

Les points selles présentent une autre particularité par rapport aux deux autres types de points fixes : ils sont *structurellement instables*. On entend par là que la moindre perturbation (toujours présente dans les systèmes physiques) peut faire disparaître le point selle au profit de l'apparition d'une paire de points fixes stable-instable. Lorsque cette transition est obtenue sous l'effet d'une variation d'un paramètre μ inhérent au modèle, on parle de *bifurcation*. La figure 4.5 illustre une telle bifurcation lorsque l'effet d'une variation du paramètre μ revient à traduire le schéma comprenant le point selle vers le bas. Un tel effet ne peut se produire dans le cas des points fixes stables ou instables qui sont dits par conséquent *structurellement stables*.

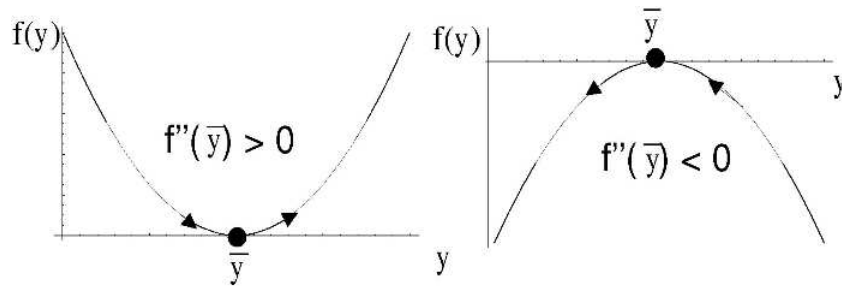


FIG. 4.4 – Exemples de Points Selles

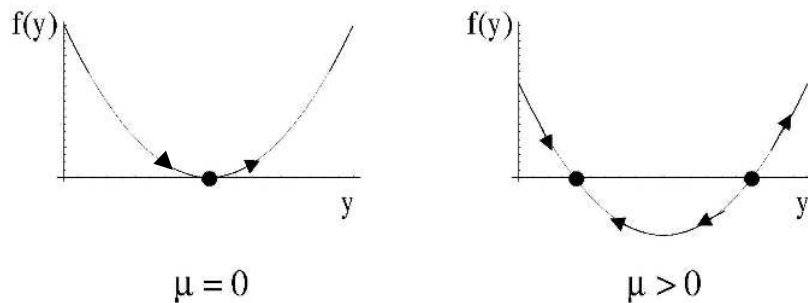


FIG. 4.5 – Exemple de Bifurcation

Exercice 4.1 La décroissance d'une population suite à des collisions à 2 corps peut être modélisée par l'équation différentielle

$$\dot{N}(t) = -kN^2,$$

où $N(t)$ représente le nombre d'individus de la population à l'instant t , et où k est une constante positive. On notera N_0 le nombre d'individus à l'instant $t = 0$.

- Quel est le type de cette équation différentielle ?
- Après avoir déterminé les points critiques, tracer l'allure qualitative des solutions sans aucun calcul.
- Intégrer l'équation différentielle et donner la forme explicite des solutions.
- Mettre en évidence que la solution diverge en un temps fini.

Exercice 4.2 On considère l'équation

$$\begin{aligned} \dot{v} &= -g - k v|v|, \\ v(0) &= v_0, \end{aligned}$$

où g représente l'accélération de la pesanteur, v la vitesse et k une constante positive.

- Donner une interprétation physique simple de cette équation.
- Montrer que ce système n'a qu'un seul point fixe stable, et utiliser cette information pour représenter les solutions dans les cas suivants : $v_0 > 0$, $v_0 = 0$, $-(g/k)^{1/2} < v_0 < 0$, $v_0 < -(g/k)^{1/2}$.

Exercice 4.3 On considère la réaction chimique $A + B \rightarrow C$. Les réactifs A et B sont en concentration initiale $A(0) = A_0$ et $B(0) = B_0$. La vitesse de production du produit obéit à l'équation différentielle

$$\dot{C}(t) = \alpha (C(t) - A_0) (C(t) - B_0),$$

où α est la constante (positive) de réaction.

On veut étudier comment la concentration du produit C au cours du temps dépend - qualitativement et quantitativement - de sa concentration initiale $C(0) = C_0$.

- Déterminer les points critiques et représenter qualitativement l'allure des solutions. On distinguera les 2 cas : $A_0 = B_0$ et $A_0 \neq B_0$.

Chapitre 5

Stabilité des systèmes différentiels

L'étude de la stabilité des systèmes est évidemment déterminante pour les applications (le système peut-il exister au voisinage d'un point de fonctionnement particulier en présence de perturbations ?), mais également intéressante du point de vue des différents types de comportements globaux que le système peut présenter. Cette approche a été développée en dimension 1 dans le chapitre précédent, et s'appuie sur une classification des points critiques. La classification des points critiques en dimension quelconque est un problème mathématique ardu qui se rattache à *la théorie des singularités des fonctions différentiables*.

Bien que l'on puisse imaginer toute sorte de matrices définissant un système différentiel linéaire, on verra qu'il n'y a qu'un nombre limité de comportements asymptotiques (i.e aux temps longs) pour les systèmes différentiels linéaires, qui ne dépendent que des valeurs propres de la matrice associée. On montre également qu'une première approche de la stabilité (locale) des systèmes différentiels non linéaires peut être obtenue en *linéarisant* le système étudié au voisinage de ses points critiques.

5.1 Stabilité des systèmes différentiels linéaires

L'origine joue un rôle particulier pour les systèmes linéaires. Le point $y = 0$ est en effet le seul point stationnaire ($\dot{y} = 0$) de l'équation différentielle $\dot{y} = Ay$.

Définition 5.1 *L'origine est dite asymptotiquement stable si toute solution y du système linéaire satisfait*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0.$$

On dispose alors du résultat suivant (valable en dimension quelconque) connu sous le nom de *Critère de Routh* :

Théorème 5.1 *L'origine est asymptotiquement stable si et seulement si toutes les valeurs propres de A sont de partie réelle strictement négative.*

Cela résulte directement en dimension 2 du théorème 3.6. □

Dans le cas de la dimension 2, comme $\lambda_1 \lambda_2 = \det A$ et $\lambda_1 + \lambda_2 = \operatorname{tr} A$, on peut également dire que l'origine est asymptotiquement stable si $\det A > 0$ et $\operatorname{tr} A < 0$.

5.1.1 Portraits de phase en dimension 2

Introduisons un peu de terminologie et discutons qualitativement le comportement des solutions selon le signe des valeurs propres.

1. Si λ_1 et λ_2 sont toutes 2 négatives et différentes, on parle de *nœud* (asymptotiquement stable), ou de *puits*.
2. Si λ_1 et λ_2 sont toutes 2 positives et différentes, on parle aussi de *nœud* (instable), ou de *source*.

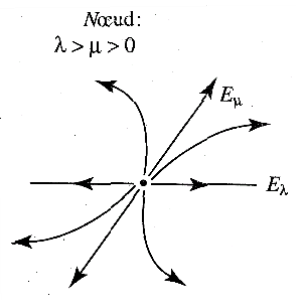


FIG. 5.1 – Source.

3. Si une des valeurs propres est positive et l'autre négative, il existe au moins une direction instable et on parle de *point selle* ou de *col*.

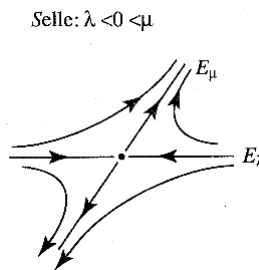


FIG. 5.2 – Point Selle.

4. Dans le cas de valeurs propres identiques, il n'y a qu'un seul vecteur propre¹ et on parle de *nœud impropre* (stable ou instable).
5. Dans le cas des valeurs propres conjuguées, les trajectoires sont des spirales logarithmiques lorsque la partie réelle des valeurs propres $\alpha \neq 0$ et on parle de *foyers* (stable ou instable). Dans le cas où $\alpha = 0$, les trajectoires sont périodiques, il s'agit de *centres*.

En dimension 2, l'ensemble des comportements peut être représenté dans le plan $\det A - \text{tr}A$, ce que montre la figure 5.5.

¹sauf si la matrice est de la forme λI , auquel cas, tout vecteur est vecteur propre.

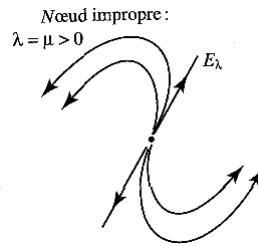


FIG. 5.3 – Nœud Impropre Instable.

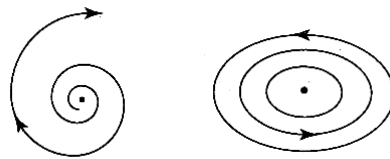


FIG. 5.4 – Foyer instable (à gauche), et Centres (à droite).

5.2 Stabilité des systèmes différentiels non linéaires

Dans cette section, on se contentera d'aborder brièvement la stabilité locale des systèmes différentiels non linéaires en dimension 2 par la méthode de linéarisation.

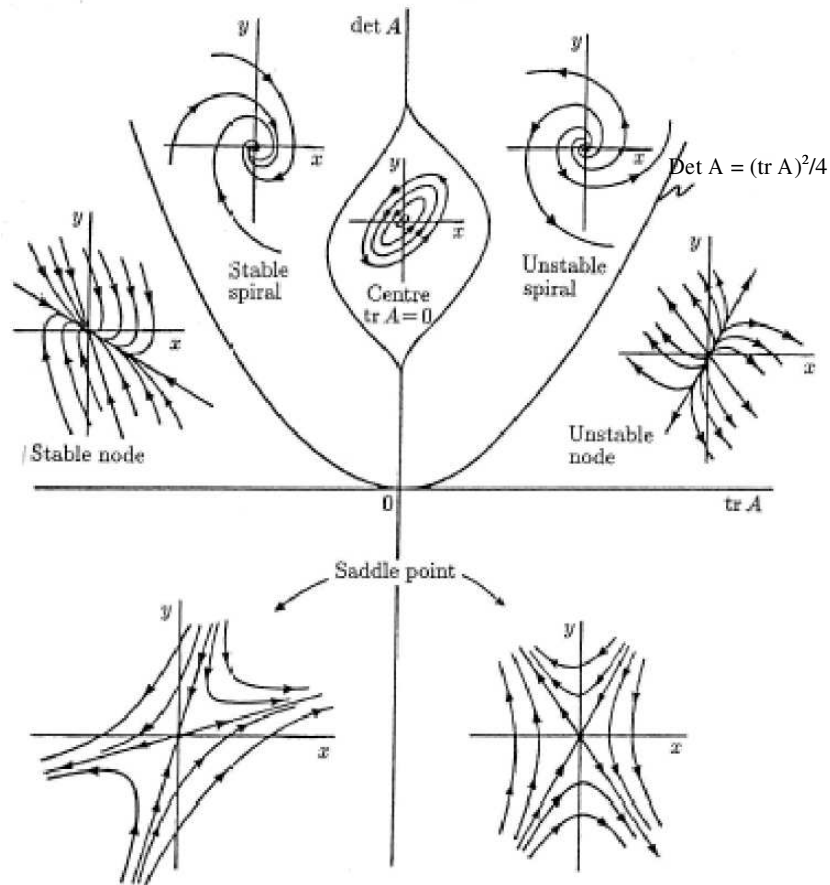
5.2.1 Linéarisation

Le cas général des systèmes différentiels en dimension 2 peut s'écrire

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2)\end{aligned}$$

Soit (\bar{x}_1, \bar{x}_2) un point fixe du système. On peut procéder à une *linéarisation* du système autour de ce point fixe par le changement de variables $x_1 = \bar{x}_1 + \delta x_1, x_2 = \bar{x}_2 + \delta x_2$. δx_1 et δx_2 décrivent de petites fluctuations autour du point fixe. En utilisant le fait que $f_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = f_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = 0$, les fonctions f_1 et f_2 peuvent être décrites localement par leurs approximations linéaires :

$$\begin{aligned}f_1^{\text{lin}}(x_1, x_2) &= \delta x_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + \delta x_2 \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2), \\ f_2^{\text{lin}}(x_1, x_2) &= \delta x_1 \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + \delta x_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2).\end{aligned}$$

FIG. 5.5 – Portraits de Phases dans le plan $\det A - \text{tr} A$

Comme on a bien sûr $\delta \dot{x}_1 = \dot{x}_1$ et $\delta \dot{x}_2 = \dot{x}_2$, on doit étudier le système différentiel à coefficients constants suivant

$$\begin{pmatrix} \delta \dot{x}_1 \\ \delta \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} \Big|_{(\bar{x}_1, \bar{x}_2)} \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{pmatrix}$$

On est donc ramené à l'étude de la stabilité d'un système à coefficients constants ; cela permet d'apprécier si les fluctuations tendent à croître avec le temps, rendant ainsi le système instable autour du point critique étudié, ou si ces fluctuations régressent au cours du temps, ce qui correspond à la situation stable.

– **Remarque** – La question se pose bien entendu de savoir dans quelle mesure l'étude de la stabilité linéaire nous renseigne sur la stabilité du système lorsque les termes non-linéaires sont pris en compte. Lorsque les 2 valeurs propres ont une partie réelle strictement négative, la stabilité linéaire implique la stabilité non-linéaire. Dans le cas des systèmes instables et lorsque les 2 valeurs propres sont de parties

réelles strictement positives, un système qui est instable par stabilité linéaire le demeure lorsque les contributions non-linéaires sont pris en compte. En revanche, lorsqu'au moins une des parties réelles des valeurs propres est nulle, c'est-à-dire dans le cas des centres, la prise en compte des termes non-linéaires peut conduire à des résultats différents de ceux obtenus par linéarisation.

– **Exemple** – On considère le système différentiel

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -2y - \sin x.\end{aligned}$$

On veut étudier la stabilité du système au voisinage du point critique $(0, 0)$. La matrice des dérivées premières s'écrit

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos x & -2 \end{pmatrix},$$

qui vaut en $(0, 0)$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Comme $\text{tr}A = -2 < 0$ et $\det A = +1 > 0$, on en déduit que le point critique $(0, 0)$ est asymptotiquement stable. \square

Exercice 5.1 *Le modèle de Lokta-Volterra s'écrit*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= +a x - b xy, \\ \dot{y} &= -c y + d xy.\end{aligned}$$

où a, b, c, d sont des constantes positives.

1. Déterminer les points critiques du modèle.
2. Déterminer et résoudre les systèmes différentiels linéarisés autour de ces points fixes. En déduire la nature de ces points fixes.

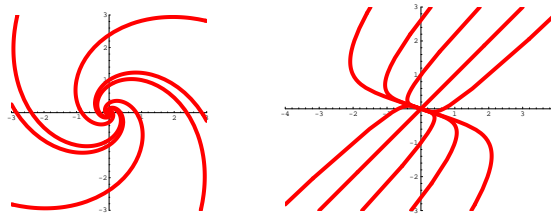
Exercice 5.2 *L'équation de Newton d'un pendule avec frottements s'écrit*

$$\ddot{\theta}(t) = -\omega^2 \sin \theta(t) - \rho \dot{\theta}(t),$$

où ρ est une constante positive.

Les portraits de phase des systèmes linéarisés autour du point critique $(0, 0)$ sont représentés sur la figure suivante pour différentes valeurs de ω et ρ .

Effectuer les calculs que vous jugez nécessaires pour une compréhension au moins qualitative de ces différents comportements.

FIG. 5.6 – $0 < \rho < 2\omega$ (à gauche), $\rho > 2\omega$ (à droite)

5.2.2 Cycles limites

On a déjà discuté le comportement des systèmes différentiels linéaires aux temps longs en dimension 2. Parmi les solutions présentant une certaine forme de stabilité, rappelons que nous avons distingué en particulier les solutions asymptotiquement stables (puits et foyers stables) et les solutions périodiques (centres).

Les systèmes différentiels non linéaires peuvent également admettre des solutions asymptotiquement stables, mais possèdent un autre type de comportement générique connu sous le nom de *cycles limites*. A la différence des centres où à chaque condition initiale correspondait une orbite différente, les cycles limites se comportent comme des *attracteurs* pour toutes les conditions initiales dans un certain voisinage (on parle de *bassin d'attraction*) du cycle limite.

Un exemple caractéristique de système non linéaire présentant un cycle limite est fourni par l'*oscillateur non linéaire de Van der Pol* qui trouve de nombreuses applications en électricité et en mécanique. L'équation associée s'écrit :

$$\ddot{x} + (x^2 - 1)\dot{x} + x = 0.$$

Cette équation décrit une oscillation harmonique perturbée par un terme de frottement, positif si $|x| > 1$, et négatif pour $|x| < 1$. Si la condition initiale est telle que $|x| < 1$, le mouvement se trouve amplifié par le terme de frottement, cette amplification diminuant lorsque l'amplitude tend vers la valeur $|x| = 1$. A contrario, pour de fortes amplitudes, c'est-à-dire si la condition initiale est telle que $|x| > 1$, l'oscillateur est dissipatif et ramène donc la solution vers des amplitudes plus faibles. La figure suivante présente le plan de phase de l'oscillateur de Van der Pol pour plusieurs conditions initiales.

Il n'est pas facile de prévoir le nombre et la position des cycles limites, même en dimension 2. L'exercice suivant, où un calcul explicite est possible, permet de mieux comprendre ce comportement caractéristique des systèmes non linéaires.

Exercice 5.3 On considère le système dynamique suivant :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= +x_2 + \mu x_1 (1 - x_1^2 - x_2^2), \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + \mu x_2 (1 - x_1^2 - x_2^2),\end{aligned}$$

où μ est un paramètre réel.

1. Montrer que le système linéarisé est associé à la matrice

$$\begin{pmatrix} \mu & +1 \\ -1 & \mu \end{pmatrix}$$

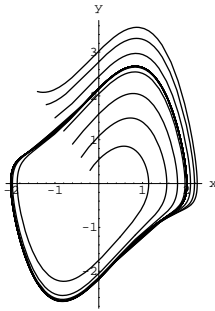


FIG. 5.7 – Cycle Limite de l’Oscillateur de Van der Pol

Diagonaliser cette matrice et discuter la stabilité du système en fonction des valeurs du paramètre μ .

2. *Montrer que le changement de variable $x_1 = r \cos \theta$ et $x_2 = r \sin \theta$ permet de réécrire le système différentiel non linéaire sous la forme*

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \mu r(1 - r^2), \\ \dot{\theta} &= -1\end{aligned}$$

Intégrer ce système avec les conditions initiales $r = r_0, \theta = \theta_0$ et montrer qu’il admet la solution

$$\begin{aligned}r^2(t) &= \frac{r_0^2}{r_0^2 + (1 - r_0^2) e^{-2\mu t}}, \\ \theta(t) &= \theta_0 - t\end{aligned}$$

3. *Discuter la limite de $r(t)$ lorsque $t \rightarrow \infty$ dans les 2 cas $\mu > 0$ et $\mu < 0$. On distinguera les cas $r_0 = 0$ et $r_0 \neq 0$. Commenter les résultats obtenus.*

Le changement de comportement qualitatif observé lorsque le paramètre μ passe des valeurs négatives aux valeurs positives est un exemple de bifurcation dite de Hopf.

Table des matières

1	Introduction	3
2	Rappels sur les équations différentielles	9
2.1	Terminologie	9
2.2	Quelques conséquences de la linéarité	10
2.3	Deux solutions explicites importantes	11
2.3.1	Equation différentielle linéaire du 1er ordre	11
2.3.2	Equations différentielles du second ordre à coefficients constants	13
2.4	Système d'équations différentielles du 1er ordre	16
2.5	Equation intégrale	18
2.6	Théorème d'existence et d'unicité	19
3	Systèmes Différentiels Linéaires	21
3.1	Exponentielle de matrice	21
3.2	Propagateur	22
3.3	Calcul pratique du propagateur	24
3.4	Equations différentielles en dimension 2	24
3.4.1	Diagonalisation des matrices 2×2	24
3.4.2	Forme explicite du propagateur en dimension 2	26
4	Analyse qualitative des équations différentielles	31
4.1	Exemple	31
4.2	Classification des points fixes (1 dimension)	33
5	Stabilité des systèmes différentiels	37
5.1	Stabilité des systèmes différentiels linéaires	37
5.1.1	Portraits de phase en dimension 2	38
5.2	Stabilité des systèmes différentiels non linéaires	39
5.2.1	Linéarisation	39
5.2.2	Cycles limites	42