Cohomologie L^p : invariance sous quasiisométries

P. Pansu

August 30, 2004

RESUME : On donne une définition de la cohomologie L^p d'un espace métrique, on prouve son invariance sous quasiisométries. On la relie à la cohomologie L^p au sens de de Rham pour une variété riemannienne. On obtient ainsi une notion de cohomologie L^p pour un groupe discret de type fini.

ABSTRACT: L^p cohomology is defined for a metric space, and shown to be a quasiisometry invariant. This boils down to usual de Rham L^p cohomology of manifolds. This yields L^p cohomology of discrete finitely generated groups too.

1 Introduction

Soit M une variété riemannienne de dimension n, k un entier compris entre 0 et n, p un réel supérieur à 1. L'espace de *cohomologie* $L^pH^k(M)$ est l'espace des classes de k-formes fermées α sur M telles que $|\alpha| \in L^p$ modulo les différentielles de $(k-1)$-formes β telles que $|\beta| \in L^p$ et $|d\beta| \in L^p$.

Par définition, la cohomologie L^p est conservée par les difféomorphismes bilipschitziens : s'il existe un difféomorphisme $f : M \to N$ tel que, pour tout vecteur $X \in TM$,

$$\text{const.}^{-1}|X| \leq |f_*X| \leq \text{ const. } |X|,$$

alors $L^pH^k(M)$ est isomorphe à $L^pH^k(N)$ pour tous p et k. Par exemple, si V est une variété compacte, alors les espaces $L^pH^k(\tilde{V})$ sont des invariants différentiables de V. Dans [D1], J. Dodziuk montre que la cohomologie L^2 du revêtement universel est un invariant homotopique des variétés compactes. Ce résultat a été étendu à L^p, $p \neq 2$, par V. Gol'dshtein, V. Kuz'minov et I. Shvedov, [GKS1].

On est conduit à se demander si la cohomologie L^p ne dépendrait pas seulement du groupe fondamental. C'est vrai en degré un, [Pa], pas exactement en degré supérieur (la formule de Künneth et la suite de Mayer-Vietoris, valables en cohomologie L^p, montrent les limites de ce que l'on peut attendre comme invariance).

Pourtant, il y a une cohomologie L^p simpliciale pour tout groupe π dont le $K(\pi, 1)$ est fini en chaque dimension, et d'après [D1], celle-ci ne dépend que du groupe. Suivant une voie indiquée par M. Gromov, [Gr2], [Gr3], nous plaçons cette question dans un contexte plus vaste : le groupe fondamental $\pi_1(V)$ est un espace métrique discret, quasiisométrique au revêtement universel $\tilde{V}$. Peut-on parler de cohomologie pour un espace métrique, et montrer son invariance sous quasiisométrie ?

Nous nous proposons

1. de définir une cohomologie L^p "asymptotique" pour un espace métrique muni d'une mesure, qui soit invariante par quasiisométrie ;
2. dans le cas d'un groupe π, de la relier à la cohomologie L^p d'un complexe simplicial ayant π pour groupe fondamental ;
3. dans le cas d'une variété riemannienne à géométrie bornée, de la relier à la cohomologie L^p ordinaire.

1.1 Définitions

Soit M un espace métrique muni d'une mesure dx. Fixons un $p \in [1, +\infty]$ et un rayon $t > 0$.

Définissons un complexe simplicial X_t dont les sommets sont les points de M, et les k-simplexes les $k+1$-uplet de points de M de diamètre strictement inférieur à t.

On a une mesure sur l'espace des k-simplexes :

$$d\Delta = dx_0 \cdots dx_k.$$

On appelle *complexe d'Alexander-Spanier de taille t sur M* le complexe des cochaînes simpliciales

réelles de X_t.

On définit la norme L^p d'une k-cochaîne :

$$\| \kappa \|_p^p = \int_{\{\Delta \in M^{k+1} | diam(\Delta) < t\}} |\kappa(\Delta)|^p \, d\Delta.$$

Lorsque $p = \infty$, la norme $\| \kappa \|_\infty$ est simplement la borne supérieure des valeurs de κ sur les simplexes de diamètre $\leq t$. Pour $p \in [1, +\infty]$, on note $L^p AS_t^k(M)$ l'espace de Banach des k-cochaînes d'Alexander-Spanier sur M, de taille t, muni de la norme L^p.

La cohomologie L^p de taille t de degré k est le quotient

$$L^p H_t^k(M) = (Ker\, d) \cap L^p AS_t^k(M) / d(L^p AS_t^{k-1}(M)).$$

La restriction des cochaînes de taille t' aux simplexes de diamètre $t < t'$ induit un opérateur borné

$$L^p AS_{t'}^k(M) \to L^p AS_t^k(M)$$

et la limite inverse

$$L^p AS_{lim}^k(M) = \lim_{\leftarrow} L^p AS_t^k(M)$$

s'appelle le *complexe L^p asymptotique*. C'est un espace de Fréchet. Sa cohomologie s'appelle *cohomologie L^p asymptotique* et est notée $L^p H_{lim}^*(M)$. Soit π un groupe discret de type fini.

Chaque choix d'un système générateur fini de π détermine une distance invariante à gauche δ_S sur π. On utilise, pour définir les normes L^p, la mesure de comptage évidente.

1.2 Définition

La cohomologie L^p d'un groupe discret π de type fini est par définition la cohomologie L^p asymptotique de l'espace métrique (π, δ_S), i.e.,

$$L^p H^*(\pi) := L^p H_{lim}^*(\pi, \delta_S).$$

Un autre choix de système générateur produit une distance quasiisométrique à la première. La proposition suivante montre que la définition est sans ambiguïté.

1.3 Résultats

Une quasiisométrie entre des espaces métriques M et N est la donnée de deux applications $f : M \to N$ et $g : N \to M$ telles que

- pour toute boule B de M, $f(B)$ et $f^{-1}(B)$ sont contenues dans des boules dont le rayon ne dépend que de celui de B ;
- $g \circ f$ et $f \circ g$ sont à distance bornée de l'identité.

La cohomologie L^∞ asymptotique est par construction même un invariant de quasiisométrie. Pour p fini, $p \geq 1$, c'est vrai moyennant une hypothèse sur la mesure dx.

Proposition 1 *La cohomologie L^p asymptotique est un invariant de quasiisométrie pour la classe des espaces métriques M munis d'une mesure telle que*

1. $\inf\{vol\, B(x,r) \mid x \in M\}$ *est positif pour tout r,*

2. $\sup\{vol\, B(x,r) \mid x \in M\}$ *est fini pour tout r.*

Il reste à relier $L^pH^*(\pi)$ à la cohomologie L^p du revêtement universel d'une variété ou d'un complexe simplicial dont π est le groupe fondamental.

Il y a une application tautologique $L^pH^* \to H^*$ de la cohomologie L^p vers la cohomologie ordinaire ; on appelle *cohomologie exacte* et on note $EL^pH^*(M)$ le noyau de cette application. Remarquer que la cohomologie asymptotique ne donne accès, au mieux, qu'à ce noyau. En effet, un cocycle κ de taille t, restreint à la boule $B(x,t)$ est automatiquement exact : si on pose $\lambda(x_1,\ldots,x_k) = \kappa(x,x_1,\ldots,x_k)$, alors $\kappa = d\lambda$.

Inversement, on peut comparer cohomologie L^p asymptotique et cohomologie L^p en degré k lorsque la cohomologie ordinaire de M s'annule en degrés $\leq k$. On dit que $H^k(M,\mathbf{R}) = 0$ *uniformément* si, pour toute boule B, il existe une boule concentrique B', dont le rayon ne dépend que de celui de B, telle que la restriction $H^k(B',\mathbf{R}) \to H^k(B,\mathbf{R})$ s'annule. Par exemple, si M est un revêtement d'un espace compact, cette condition est vérifiée dès que $H^k(M,\mathbf{R}) = 0$.

Théorème 1 *Soit p un réel,* $1 \leq p \leq \infty$.

1. *Soit π un groupe discret de présentation finie. Soit K un complexe simplicial fini dont le groupe fondamental est π. Si $\pi_i(K) = 0$ for $i = 2,\ldots,k$, alors la cohomologie L^p exacte de $\tilde{K}$ - définie simplicialement - coïncide avec la cohomologie L^p de π jusqu'en degré $k+1$. En particulier, sans conditions sur K, les espaces $L^pH^1(\tilde{K})$ et $EL^pH^2(\tilde{K})$ ne dépendent que de $\pi_1(K)$.*

2. *Soit M une variété riemannienne connexe à géométrie bornée. On suppose que, pour $1 \leq j \leq k$, $H^j(M,\mathbf{R}) = 0$ uniformément. Alors*
$$L^pH^{k+1}_{lim}(M) \simeq EL^pH^{k+1}(M).$$

Précisions

On obtient en réalité un résultat plus précis. Par exemple, si M est une variété riemannienne qui satisfait aux hypothèses du théorème 1, on montre que, pour tout $t > t' > 0$, la restriction des grandes cochaînes aux petits simplexes induit une équivalence d'homotopie entre les complexes d'Alexander-Spanier $L^pAS^*_t$ et $L^pAS^*_{t'}$ au sens suivant : il existe des opérateurs bornés $f : L^pAS^*_t \to L^pAS^*_{t'}$, $g : L^pAS^*_{t'} \to L^pAS^*_t$ commutant avec les différentielles, $B : L^pAS^*_t \to L^pAS^{*-1}_t$ $B' : L^pAS^*_{t'} \to L^pAS^{*-1}_{t'}$ tels que
$$g \circ f = dB + Bd \quad \text{et} \quad f \circ g = dB' + B'd.$$
De même, pour t petit, le complexe $L^pAS^*_t(M)$ est homotope au complexe de de Rham (resp. simplicial) et enfin, une quasiisométrie $M \to M'$ induit une équivalence d'homotopie entre les complexes $L^pAS^*_t(M)$ et $L^pAS^*_t(M')$ pour t assez grand.

En particulier, la cohomologie L^p avec sa semi-norme quotient est invariante. Il y a donc des isomorphismes induits sur la cohomologie et sur la cohomologie réduite (définie au moyen de l'adhérence de l'image de d). On peut aller plus loin. La classe d'équivalence de la presque cohomologie (near-cohomology) au sens de M. Gromov et M. Shubin est un invariant de quasiisométrie, voir [GS]. La presque cohomologie d'un complexe $d : E \to E$ est la famille de cônes $C_\lambda = \{\eta \in \mathrm{Im}\, d \mid \| \eta \| \leq \lambda \| d^{-1}\eta \|\}$ où $\lambda \in \mathbf{R}$ et on a noté abusivement $\| d^{-1}\eta \| = \inf\{\| \theta \| \mid \theta \in E \text{ et } d\theta = \eta\}$.

Lorsque $p = 2$, la cohomologie L^2 et la presque cohomologie sont directement reliées au Laplacien L^2. Le théorème 1 se traduit par

Corollaire 2 *Sous les hypothèses du théorème 1 (2),*

- *le noyau du Laplacien sur les $k+1$-formes L^2 exactes,*
- *la présence d'un trou dans le spectre du Laplacien sur $dL^2\Omega^k$ (i.e. d'un intervalle ouvert $]0,\epsilon[$ disjoint du spectre),*

sont des quantités ou propriétés conservées par quasiisométrie.

1.4 Avertissement

Lorsque $p=+\infty$, on risque de confondre la cohomologie L^∞ et la *cohomologie grossière* (coarse cohomology) de J. Roe, [R]. Notons $AS^k_{t,c}(M)$ l'espace des k-cochaînes d'Alexander-Spanier de taille t *à support relativement compact* comme fonctions sur M^{k+1}. Le complexe de J. Roe est la limite inverse des $AS^*_{t,c}(M)$ lorsque t tend vers $+\infty$. Il est aussi invariant sous quasiisométries.

La cohomologie bornée d'un groupe discret π est définie à partir des cochaînes L^∞ et π-invariantes du complexe simplicial complet (sans restriction de diamètre) dont les sommets sont les éléments de π, voir [Gr1]. Je ne sais pas s'il est invariant sous quasiisométries.

1.5 Organisation du texte

La section 2 contient la preuve de la proposition 1.

Dans la section 3, on montre que la cohomologie L^p d'une variété riemannienne à géométrie bornée peut se calculer indifféremment au moyen de formes différentielles, d'une triangulation, d'un recouvrement ouvert, ou de cochaînes d'Alexander-Spanier de petite taille. Il s'agit de contrôler des normes L^p dans le théorème de de Rham. Comme corollaire immédiat, on obtient le fait que les applications uniformément continues agissent sur la cohomologie L^p, et, par conséquent, l'invariance homotopique de la cohomologie L^p des revêtements, [D1], [D2], [GKS1] ainsi que des invariants de Novikov-Shubin [NS], prouvée dans [E], [GS].

Le point essentiel dans le théorème 1 est le fait que l'espace de cohomologie à la Alexander-Spanier $L^pH^k_t(M)$ est indépendant de t. Il s'agit d'étendre une petite cochaîne aux grands simplexes. Nous proposons deux procédés. Le premier, qui s'applique aux variétés d'Hadamard (i.e., simplement connexes à courbure négative ou nulle) consiste à subdiviser les simplexes. En effet, dans une variété d'Hadamard, le diamètre diminue lors d'une subdivision. C'est l'objet de la section 5. On trouve des considérations voisines dans [H], [R].

Sous les hypothèses plus générales du théorème 1, on doit utiliser un autre procédé. Il s'agit de montrer que le complexe simplicial X_t a même cohomologie que M. Une approximation de X_t est obtenue en considérant le nerf N_T du recouvrements de M par les boules de rayon $T>t$ centrées sur les points d'un ϵ-réseau de M. Si N_T était acyclique, on aurait immédiatement $H^*(M)=H^*(N_T)$. L'hypothèse du théorème 1 donne seulement que N_T est acyclique dans $N_{T'}$ pour un T' ne dépendant que de T. Néanmoins, cela suffit à conclure dans la section 6.

Enfin, on a rassemblé quelques exemples dans la section 7.

2 Quasiisométries

Dans cette section, p est un réel fini, $p\geq 1$. Soit $f:M\to N$ une quasiisométrie. On a envie de définir son action sur les cochaînes κ par $f^*\kappa(\Delta)=\kappa(f\Delta)$. Il vient

$$\| f^*\kappa \|_p^p = \int |\kappa(\Delta_N)|^p\, f_*(d\Delta_M)(\Delta_N).$$

On ne sait pas comparer directement les mesures $f_*d\Delta_M$ et $d\Delta_N$, mais on le pourra après avoir *étalé* les simplexes.

2.1 Etalement des simplexes

Un *noyau* est une fonction positive ϕ sur $M \times M$ telle que

1. ϕ est bornée ;
2. pour tout $x \in M$,
$$\int_M \phi(x,y)\,dy = 1 \;;$$
3. ϕ est nulle en dehors d'un voisinage borné de la diagonale.

Si le volume des boules de rayon r est borné inférieurement sur M, on construit aisément un noyau : $\phi(x,y) = (vol\,B(x,R))^{-1}$ si $d(x,y) < r$, 0 sinon. Etant donné un noyau ϕ sur $M \times M$, on construit un noyau $\phi(\Delta, \Delta')$ sur les simplexes en posant

$$\phi(x_0, \ldots, x_k; x'_0, \ldots, x'_k) = \prod_{i=0}^{k} \phi(x_i, x'_i).$$

Etant donné un simplexe Δ, son *étalement* est la chaîne réelle

$$\Delta * \phi = \int \Delta' \phi(\Delta, \Delta')\, d\Delta'.$$

Lemme 3 *L'étalement est une équivalence de complexes : on a*

$$\partial(\Delta * \phi) = (\partial\Delta) * \phi,$$

et il existe un opérateur B sur les chaînes tel que

$$\Delta * \phi - \Delta = \partial(B\Delta) + B(\partial\Delta).$$

On vérifie aisément que, pour tout j,

$$\partial_j(\Delta * \phi) = (\partial_j\Delta) * \phi.$$

On construit le *prisme* $b(\Delta, \Delta')$ de bases Δ et Δ'. Il s'agit de trianguler le produit d'un simplexe et d'un intervalle, cela donne

$$b(x_0, \ldots, x_k; x'_0, \ldots, x'_k) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i (x_0, \ldots, x_{i-1}, x_i, x'_i, x'_{i+1}, \ldots, x'_k)$$

et on a

$$\partial b(\Delta, \Delta') = \Delta' - \Delta - \sum_{j=0}^{k} (-1)^j b(\partial_j\Delta, \partial_j\Delta').$$

On pose

$$B(\Delta) = \int b(\Delta, \Delta')\phi(\Delta, \Delta')\, d\Delta'.$$

Comme

$$\begin{aligned} \int b(\partial_j\Delta, \partial_j\Delta')\phi(\Delta, \Delta')\, d\Delta' &= \int b(\partial_j\Delta, \Delta_{k-1})\phi(\partial_j\Delta, \Delta^{k-1})\phi(x_j, x'_j)\, d\Delta^{k-1}\, dx'_j \\ &= B(\partial_j\Delta), \end{aligned}$$

on a bien, en prolongeant B linéairement aux chaînes,

$$\Delta * \phi - \Delta = (\partial B + B\partial)\Delta. \;\blacksquare$$

Nous arrivons à la preuve de la proposition 1.

Proposition 4 *Soit f, g une quasiisométrie de M sur N. On suppose que le volume des boules est borné inférieurement et supérieurement dans M et N. Fixons $t > 0$ et des noyaux ϕ et ϕ' sur M et N. Il existe des réels T et T' tels que les applications*

$$f^* : L^pAS^k_{T'}(N) \to L^pAS^k_T(M), \qquad g^* : L^pAS^k_T(M) \to L^pAS^k_t(N)$$
$$f^*\kappa(\Delta) = \kappa((f\Delta) * \phi), \qquad g^*\kappa(\Delta) = \kappa((g\Delta) * \phi')$$

induisent des opérateurs bornés en cohomologie. Alors l'opérateur

$$g^*f^* : L^pH^k_{T'}(M) \to L^pH^k_t(M)$$

coincide avec la restriction.

Si $T = \sup\{diam\, f(\Delta_M) \mid diam\, \Delta_M < t\}$, f^* envoie les cochaînes de taille T sur des cochaînes de taille t. On calcule

$$|f^*\kappa(\Delta_M)|^p \leq \int |\kappa(\Delta_N)|^p \phi(f\Delta_M, \Delta_N)\, d\Delta_N$$

puis

$$\| f^*\kappa \|_p^p = \int |\kappa(\Delta)|^p \psi(\Delta)\, d\Delta$$

où

$$\psi(\Delta_N) = \int_{\{diam\, \Delta_M < t\}} \phi(f\Delta_M, \Delta_N)\, d\Delta_M.$$

On vérifie que ψ est bornée et s'annule pour des simplexes trop grands, et on conclut que f^* est borné.

On calcule ensuite g^*f^* : pour un simplexe Δ dans M,

$$\begin{aligned} g((f\Delta) * \phi) * \phi' &= \int \Delta_M\, \phi(f\Delta, \Delta_N)\phi'(g\Delta_N, \Delta_M)\, d\Delta_N\, d\Delta_M \\ &= \Delta * \phi'' \end{aligned}$$

où

$$\phi''(\Delta, \Delta') = \int \phi(f\Delta, \Delta_N)\phi'(g\Delta_N, \Delta'')\, d\Delta_N.$$

On voit que la fonction ϕ'' sur les simplexes est issue d'un noyau. On a donc

$$1 - g^*f^* = dA + Ad$$

où 1 désigne en fait la restriction des grandes cochaînes aux petits simplexes, et $A\kappa(\Delta) = \kappa(B_{\phi''}\Delta)$. On vérifie aisément que A est borné, ce qui achève la preuve. ∎

2.2 Remarque

Combinée avec la proposition 11, ce résultat montre que, dans certaines condition, le complexe L^p en tant que complexe d'espaces de Banach (et pas seulement de Fréchet) est un invariant de quasiisométrie.

3 Généralités

Dans cette section, on reproduit en introduisant des normes L^p quelques principes de théorie des faisceaux (voir par exemple [Go]). Un point à ne pas négliger est le fait est qu'un complexe d'espaces de Banach, a équivalence d'homotopie près, contient plus d'information que sa seule cohomologie.

3.1 Complexes et bicomplexes d'espaces de Banach

Soients

$$0 \xrightarrow{d} E^{-1} \xrightarrow{d} E^0 \xrightarrow{d} E^1 \xrightarrow{d} \cdots \quad \text{et} \quad 0 \xrightarrow{d'} F^{-1} \xrightarrow{d'} F^0 \xrightarrow{d'} F^1 \xrightarrow{d'} \cdots$$

deux complexes d'espaces de Banach. On dit que E^* et F^* sont *homotopes jusqu'en degré* k s'il existe pour tout $j \leq k$ des opérateurs bornés $f_j : E^j \to F^j$, $g_j : F^j \to E^j$, $h_j : E^j \to E^{j-1}$ et $h'_j : F^j \to F^{j-1}$ tels que, pour $j < k$,

$$d'f_j = f_{j+1}d, \quad dg_j = g_{j+1}d' \ ;$$

$$1 - g_j \circ f_j = dh_j + h_{j+1}d, \quad 1 - f_j \circ g_j = d'h'_j + h'_{j+1}d' \ ;$$

et, pour $j = k$,

$$1 - g_k \circ f_k = dh_k \quad \text{sur} \quad \ker d, \quad 1 - f_k \circ g_k = d'h'_k \quad \text{sur} \quad \ker d'.$$

On dit que le complexe E^* est *complémenté* jusqu'en degré k s'il est homotope jusqu'en degré k à un complexe dont la différentielle est nulle. Autrement dit, s'il existe des opérateurs bornés $r_j : E^j \to E^j$, $h_j : E^j \to E^{j-1}$ pour $j \leq k-1$ et $r_k : E^k \cap \ker d \to E^k$, $h_k : E^k \cap \ker d \to E^{k-1}$ tels que $rd = dr = 0$, $1 - r = hd + dh$ sur E^j, $j \leq k-1$ et $1 - r = dh$ sur $E^k \cap \ker d$. Cela revient à dire que $\operatorname{im} d$ est un facteur direct dans $\ker d$. En particulier, si E^* est un espace de Hilbert, cela signifie simplement que l'image $d(E^{*\leq k})$ est fermée.

Enfin, on dit que le complexe E^* est *acyclique* jusqu'en degré k s'il est complémenté avec $r = 0$.

Lemme 5 *Soit $(C^{k,\ell}, d', d'')$, $k \geq 0$, $\ell \geq 0$, un bicomplexe d'espaces de Banach, i.e., le degré de $C^{k,\ell}$ est $k + \ell$ et $d' \circ d' = d'' \circ d'' = (d' + d'') \circ (d' + d'') = 0$. On suppose les complexes $(C^{*,\ell}, d')$ acycliques jusqu'en degré k, i.e., il existe, pour $j \leq k$ et tout $\ell \geq 0$ un opérateur borné $h' : C^{j,\ell} \to C^{j-1,\ell}$ tel que $1 = d'h' + h'd'$ (resp. $1 = d'h'$ sur $C^{k,\ell} \cap \ker d'$). Alors l'inclusion $(C^{0,*} \cap \ker d', d'') \to (C^{*,*}, d' + d'')$ induit une équivalence d'homotopie jusqu'en degré k.*

La preuve est élémentaire. On se ramène à un complexe acyclique en tous degrés en remplaçant $C^{i,j}$ par $C^{i,j} \cap \ker d'$ lorsque $i + j = k$, et par 0 lorsque $i + j > k$.

Puis on vérifie que

$$(d' + d'')h' + h'(d' + d'') = 1 - b \quad \text{où} \quad b = -d''h' - h'd''.$$

L'opérateur borné b induit donc une équivalence d'homotopie du complexe $(C^{*\leq k,*}, d' + d'')$ sur le sous-complexe $(C^{*\leq k-1,*}, d' + d'')$. En itérant $k+1$ fois, on obtient une équivalence d'homotopie de $(C^{*\leq k,*}, d' + d'')$ sur $(C^{-1,*\leq k} \cap \ker d', d'')$. ∎

Ce lemme va servir à comparer deux manières de calculer la cohomologie d'un faisceau : au moyen d'une résolution, ou au moyen d'un recouvrement acyclique. Cela nécessite quelques définitions. Les espaces métriques considérés sont des variétés riemanniennes (non nécessairement complètes) ou des complexes simpliciaux localement finis (un complexe simplicial est toujours muni de la métrique de longueur pour laquelle chaque simplexe est isométrique au simplexe euclidien standard).

3.2 Faisceaux d'espaces de Banach

On entend par là la donnée d'un faisceau $\mathcal{F}$ et, pour chaque ouvert U d'une norme $|\cdot|_U$ sur l'espace, noté $\Gamma(U, F)$, des sections de $\mathcal{F}$ sur U. On fait les hypothèses suivantes :

- si $U \subset V$ et $f \in \Gamma(V, \mathcal{F})$, alors
$$|f_{|U}|_U \leq |f|_V \ ;$$
- si $f \in \Gamma(U \cup V, \mathcal{F})$, alors
$$|f|_{U \cup V} \leq const. \, (|f_{|U}|_U + |f_{|V}|_V).$$

3.3 Recouvrements uniformes

On dit que le recouvrement $\mathcal{U}$ de M est *uniforme* si

1. pour un $\epsilon > 0$, les ouverts
$$\tilde{U}_\alpha^\epsilon = \{x \in U_\alpha \mid d(x, M \setminus U_\alpha) > \epsilon\}$$
recouvrent encore M ;
2. chaque ouvert U_α ne rencontre qu'un nombre borné d'ouverts $U_{\alpha'}$;
3. le diamètre des U_α est borné.

On dit qu'un complexe simplicial X est "à géométrie bornée" si chaque simplexe ne rencontre qu'un nombre borné d'autres simplexes. Le recouvrement $U_\alpha = st(\alpha), \alpha \in X^0$ formé des étoiles des sommets est uniforme.

On dit qu'une variété riemannienne est "à géométrie bornée" si elle est complète et si sa courbure sectionnelle et son rayon d'injectivité sont bornés. Dans ce cas il existe des recouvrements uniformes par des boules de même rayon.

3.4 Norme L^p

Pour chaque recouvrement uniforme $\mathcal{U}$ de M, on définit une norme L^p pour les sections globales de $\mathcal{F}$. Si $p < \infty$,
$$\| f \|_{p,\mathcal{U}} = \left(\sum_{\alpha \in I} |f_{|U_\alpha}|_{U_\alpha}^p \right)^{1/p}.$$
Si $p = \infty$,
$$\| f \|_{\infty,\mathcal{U}} = \sup_{\alpha \in I} |f_{|U_\alpha}|_{U_\alpha}.$$
On vérifie aisément que, si M est une variété riemannienne à géométrie bornée, deux recouvrements uniformes donnent des normes équivalentes, si bien qu'on ne fera plus apparaître le recouvrement dans la notation. On note $L^p\Gamma(M, \mathcal{F})$ l'espace des sections globales L^p de $\mathcal{F}$ muni de la norme L^p.

Soit
$$0 \xrightarrow{d} \mathcal{R}^{-1} \xrightarrow{d} \mathcal{R}^0 \xrightarrow{d} \mathcal{R}^1 \xrightarrow{d} \cdots$$
un complexe de faisceaux d'espaces de Banach sur M, i.e., d est borné et $d \circ d = 0$. Sa cohomologie est notée
$$L^pH^k(M, \mathcal{R}^*) = (Ker\, d) \cap L^p\Gamma(M, \mathcal{R}^k)/d\, L^p\Gamma(M, \mathcal{R}^{k-1}).$$

3.5 Cohomologie de Čech

Soit $\mathcal{U} = (U_\alpha)_{\alpha \in I}$ un recouvrement ouvert de M. Pour $k \geq -1$, on note I^k l'ensemble des $k+1$-uplets d'indices $\beta = (\alpha_0, \ldots, \alpha_k)$ tels que l'intersection $U_\beta = U_{\alpha_0} \cap \cdots \cap U_{\alpha_k}$ soit non vide. Ainsi, l'ensemble I devient un complexe simplicial (le *nerf* du recouvrement $\mathcal{U}$). Si $\mathcal{F}$ est un

faisceau d'espaces de Banach sur M, une k-cochaîne de Čech à valeurs dans $\mathcal{F}$ est une fonction antisymétrique c_β où, pour $\beta = (\alpha_0, \ldots, \alpha_k) \in I^k$,
$$c_\beta \in \mathcal{F}(U_\beta) = \mathcal{F}(U_{\alpha_0} \cap \cdots \cap U_{\alpha_k}).$$
On note $L^p\check{C}^k(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ l'espace des k-cochaînes de Čech à valeurs dans $\mathcal{F}$, muni de la norme L^p suivante :
$$\| c \|_p^p = \sum_{\beta \in I^k} |c_\beta|_{U_\beta}^p,$$

si $p < \infty$, et

$$\| c \|_\infty = \sup_{\beta \in I^k} |c_\beta|_{U_\beta},$$

si $p = \infty$.

Le cobord

$$(\delta c)_\beta = c_{\partial\beta}$$

est un opérateur borné de $L^p\check{C}^k(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ dans $L^p\check{C}^{k+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$.

On complète le complexe δ en créant un

$$L^p\check{C}^{-1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = L^p\Gamma(M, \mathcal{F}),$$

et, pour une section globale f de $\mathcal{F}$, δf est la 0-cochaîne

$$(\delta f)_\alpha = f_{|U_\alpha}.$$

Si le recouvrement $\mathcal{U}$ est uniforme, δ est un opérateur borné. La cohomologie de Čech (réduite) du recouvrement $\mathcal{U}$, à valeurs dans $\mathcal{F}$, notée $L^p\check{H}^*(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, est la cohomologie du complexe

$$0 \to L^p\check{C}^{-1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta} L^p\check{C}^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta} \cdots$$

Lorsqu'on oublie la contrainte de norme L^p finie, on retrouve le complexe de Čech ordinaire ; on a donc une application

$$L^p\check{H}^*(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to \check{H}^*(\mathcal{U}, \mathcal{F}).$$

On appelle *cohomologie exacte* de $\mathcal{U}$ à valeurs dans $\mathcal{F}$, et on note $EL^p\check{H}^*(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, le noyau de cette application.

3.6 Cohomologie simpliciale

Soit M un complexe simplicial à géométrie bornée. Une cochaîne simpliciale réelle de degré k est une fonction σ sur les k-simplexes orientés Δ de M. La norme L^p

$$\| \sigma \|_p^p = \sum_\Delta |\sigma(\Delta)|^p.$$

donne lieu à une cohomologie L^p notée $L^pH^*_{simpl}(M)$.

On voit que le complexe des cochaînes simpliciales réelles sur M n'est rien d'autre que le complexe de Čech associé au recouvrement canonique par les étoiles des sommets, et au faisceau constant $\mathbf{R}$. Inversement, la cohomologie de Čech d'un recouvrement $\mathcal{U}$ est la cohomologie simpliciale du nerf de $\mathcal{U}$.

3.7 Finesse

Un faisceau sur une variété est *fin* si on peut multiplier ses sections par des fonctions de classe C^∞. La cohomologie de Čech d'un faisceau fin est automatiquement nulle. En effet, soit $\mathcal{U}$ un recouvrement et χ_α une partition de l'unité subordonnée à $\mathcal{U}$; la formule

$$(\eta c)_\beta = \sum_{\alpha \in I} \chi_\alpha c_{\beta\alpha}$$

définit une homotopie

$$\eta : L^p\check{C}^k(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to L^p\check{C}^{k-1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}).$$

Pour que l'opérateur η soit borné, il faut faire l'hypothèse que l'action des fonctions C^∞ soit continue (c'est une condition sur le faisceau $\mathcal{F}$) et que les normes C^∞ des fonctions χ_α soient uniformément bornées (c'est une condition sur le recouvrement $\mathcal{U}$). Si le recouvrement $\mathcal{U}$ est uniforme, une partition de l'unité bornée existe, et on conclut que la cohomologie de Čech L^p d'un faisceau fin est nulle.

3.8 Définition

Etant donné un complexe de faisceaux $\mathcal{R}^*$ sur M, on dit que le recouvrement $\mathcal{U}$ est *uniformément acyclique* (resp. *uniformément complémenté*) en degrés $\leq k$ si, d'une part, il est uniforme au sens du paragraphe 3.3, d'autre part, si sur chaque intersection U_β, le complexe $L^p\Gamma(U_\beta, \mathcal{R}^*)$ est acyclique (resp. complémenté) en degrés $\leq k$ avec des normes $\| r_{\beta,j} \|_p$, $\| h_{\beta,j} \|_p$ bornées uniformément.

Proposition 6 *Soit M une variété riemannienne (resp. un complexe simplicial à géométrie bornée), $d : \mathcal{R}^* \to \mathcal{R}^*$ un complexe de faisceaux d'espaces de Banach tel que $\mathcal{R}^k$ est fin pour $k \geq 0$. Soit $\mathcal{U}$ un recouvrement de M.*

1. *On suppose que $\mathcal{U}$ est uniformément acyclique pour le complexe $\mathcal{R}^*$ en degrés $\leq k$. Alors il existe une équivalence d'homotopie définie en degrés $\leq k$ du complexe de Čech $L^p\check{C}^*(\mathcal{U}, \mathcal{R}^{-1})$ vers le complexe $L^p\check{C}^{-1}(\mathcal{U}, \mathcal{R}^*) = L^p\Gamma(M, \mathcal{R}^*)$ des sections globales de $\mathcal{R}*$.*

2. *On suppose de plus le recouvrement $\mathcal{U}$ complémenté pour le complexe $\mathcal{R}^*$ en degrés $\leq k+1$.*

Alors la cohomologie exacte $EL^p\check{H}^{k+1}(\mathcal{U}, \mathcal{R}^{-1})$ est isomorphe à $EL^pH^{k+1}(M, \mathcal{R}^*)$.

Les hypothèses sont résumées dans le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & L^p\check{C}^{-1}(\mathcal{U}, \mathcal{R}^{-1}) & \stackrel{\delta}{\to} & L^p\check{C}^{0}(\mathcal{U}, \mathcal{R}^{-1}) & \stackrel{\delta}{\to} & L^p\check{C}^{1}(\mathcal{U}, \mathcal{R}^{-1}) & \stackrel{\delta}{\to} & \dots \\
 & & \downarrow d & & h \uparrow\downarrow d & & h \uparrow\downarrow d & & \\
0 & \to & L^p\check{C}^{-1}(\mathcal{U}, \mathcal{R}^{0}) & \stackrel{\eta,\delta}{\rightleftharpoons} & L^p\check{C}^{0}(\mathcal{U}, \mathcal{R}^{0}) & \stackrel{\eta,\delta}{\rightleftharpoons} & L^p\check{C}^{1}(\mathcal{U}, \mathcal{R}^{0}) & \stackrel{\eta,\delta}{\rightleftharpoons} & \dots \\
 & & \downarrow d & & h \uparrow\downarrow d & & h \uparrow\downarrow d & & \\
0 & \to & L^p\check{C}^{-1}(\mathcal{U}, \mathcal{R}^{1}) & \stackrel{\eta,\delta}{\rightleftharpoons} & L^p\check{C}^{0}(\mathcal{U}, \mathcal{R}^{1}) & \stackrel{\eta,\delta}{\rightleftharpoons} & L^p\check{C}^{1}(\mathcal{U}, \mathcal{R}^{1}) & \stackrel{\eta,\delta}{\rightleftharpoons} & \dots \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}$$

où l'on a les relations

$$\delta d = d\delta, \quad 1 = dh + hd, \quad 1 = \eta\delta + \delta\eta.$$

sur $L^p\check{C}^i(\mathcal{U}, \mathcal{R}^j)$ pour $i \geq 0$ et $j \geq 0$, ainsi que $1 = \eta\delta$ pour $i = -1$, $j \geq 0$ et $1 = h\delta$ pour $j = -1$, $i \geq 0$.

Définissons le bicomplexe $C^{i,j} = L^p\check{C}^i(\mathcal{U}, \mathcal{R}^j)$ si $i \geq 1$ et $j \geq 1$, $C^{0,j} = L^p\check{C}^0(\mathcal{U}, \mathcal{R}^j) \cap \ker \delta$ et $C^{i,0} = L^p\check{C}^i(\mathcal{U}, \mathcal{R}^0) \cap \ker d$. On applique deux fois le lemme 5, d'abord avec $d' = d$, $d'' = (-1)^{k+\ell}\delta$, ensuite en échangeant les rôles de d et δ. On obtient l'équivalence d'homotopie annoncée.

Sous l'hypothèse (ii), on élargit l'espace $C^{i,j}$ simplement en oubliant la condition L^p si $(i,j) \neq (0, k+1)$ ou $(k+1, 0)$, et en plus en se restreignant aux élements exacts si $(i,j) = (0, k+1)$ ou $(k+1, 0)$. Le mécanisme du lemme 5 fonctionne en degré $k+1$. En effet, une seule des relations ci-dessus a changé : sur $L^p\check{C}^0(\mathcal{U}, \mathcal{R}^{k+1}) \cap \ker d$, on a maintenant $1 - r = dh$ mais $rd = 0$, r est nul sur les éléments exacts donc sur $C^{0,k+1}$ on a $1 = dh$. ∎

3.9 Résolutions

Une résolution d'un faisceau d'espaces de Banach $\mathcal{F}$ est un complexe

$$0 \to \mathcal{R}^{-1} = \mathcal{F} \stackrel{d}{\to} \mathcal{R}^0 \stackrel{d}{\to} \mathcal{R}^1 \stackrel{d}{\to} \dots$$

qui est "uniformément exact" au sens suivant : il existe des $\epsilon > \epsilon' > 0$ tels que, pour tout ouvert U qui est l'intersection d'un nombre fini de boules de rayon inférieur à ϵ, et contient une boule de rayon ϵ', le complexe $L^p\Gamma(U, \mathcal{R}^*)$ est acyclique avec une norme $\| h_U \|_p$ indépendante de U.

Par construction, un recouvrement uniforme par des boules assez petites est uniformément acyclique pour toute résolution. On en déduit que la cohomologie L^p d'un faisceau d'espaces de Banach ne dépend pas du choix de résolution fine.

Pour montrer que la cohomologie L^p ne dépend pas du choix de recouvrement uniforme, il reste à exhiber au moins une résolution fine. Dans les deux prochaînes sections, on vérifiera que les formes différentielles d'une part, et les cochaînes d'Alexander-Spanier de taille assez petite d'autre part, constituent une résolution fine du faisceau constant $\mathbf{R}$.

Corollaire 7 *La cohomologie L^p à coefficients constants $\mathbf{R}$ peut être calculée indifféremment au moyen d'un recouvrement uniforme, d'une triangulation ou d'une résolution (formes différentielles ou cochaînes d'Alexander-Spanier de taille assez petite).*

4 Formes différentielles

Dans cette section, on vérifie que les formes différentielles constituent une résolution du faisceau constant. Soit M une variété riemannienne (non nécessairement complète). On note $L^p\Omega^k(U)$

l'espace de Banach des formes différentielles de degré k, muni de la norme

$$\| \omega \|_p^p = \int_U |\omega|^p \, dx + \int_U |d\omega|^p \, dx.$$

(resp. $\sup_{x\in U} |\omega(x)| + |d\omega(x)|$ si $p = \infty$. C'est un faisceau d'espaces de Banach.

La différentielle extérieure est un opérateur borné

$$d : L^p\Omega^k(U) \to L^p\Omega^{k+1}(U).$$

On complète le complexe d en posant $L^p\Omega^{-1} = \mathbf{R}$, le faisceau des fonctions localement constantes (muni de la norme L^p), et $d : L^p\Omega^{-1} \to L^p\Omega^0$ consiste simplement à considérer une fonction localement constante comme une fonction dans $W^{1,p}_{loc}$. On obtient un résolution fine du faisceau constant $\mathbf{R}$:

$$0 \to \mathbf{R} = L^p\Omega^{-1} \xrightarrow{d} L^p\Omega^0 \xrightarrow{d} L^p\Omega^1 \xrightarrow{d} \cdots .$$

Lemme 8 (H. Poincaré) *Soit p un réel, $1 \le p \le +\infty$. Soit B^n la boule unité de $\mathbf{R}^n$. Le complexe $L^p\Omega^*(B^n)$ est acyclique.*

On utilise la formule d'homotopie de H. Poincaré : pour chaque point $x \in B^n$, on a une homotopie linéaire de l'identité à la constante x

$$\phi_x(t, y) = ty + (1-t)x$$

Notons τ_s la translation de s sur $[0, 1] \times B^n$. Pour $\omega \in \Omega^k(B)$, $k \ge 1$, on pose

$$\chi_x(\omega) = \int_0^1 i_{\partial/\partial t}\tau_s^*\phi_x^*\omega \, ds,$$

où i désigne la contraction par un champ de vecteurs. Alors

$$\begin{aligned}(d\chi_x + \chi_x d)(\omega) &= \int_0^1 (di_{\partial/\partial t} + i_{\partial/\partial t}d)\tau_s^*\phi_x^*\omega \, ds \\ &= \int_0^1 \mathcal{L}_{\partial/\partial t}\tau_s^*\phi_x^*\omega \, ds \\ &= \omega.\end{aligned}$$

On pose enfin

$$h(\omega) = \frac{1}{vol(B^n)} \int_{B^n} \chi_x(\omega)_{|\{0\}\times M} \, dx.$$

Par exemple, lorsque $k = 1$, $\chi_x\omega(y)$ est l'intégrale curviligne de la 1-forme ω sur le segment $[x, y]$.

On calcule
$$h(\omega)(y) = \frac{1}{vol(B^n)} \int_{B^n} \int_0^1 i_{y-x}\omega(sx + (1-s)y)\, ds\, dx \ ;$$
posant $u(z) = |\omega|(z)$ pour $z \in B^n$, $u(z) = 0$ sinon, il vient, à une constante près,
$$\begin{aligned} vol(B^n)|h(\omega)(y)| &\leq \int_{|x|<1, \quad 0<s<1} |y-x|u(sx+(1-s)y)\, ds\, dx \\ &\leq \int_{|z-y|<2} |z-y|u(z)s^{-n-1}\, ds\, dz \\ &\leq \int_{|z-y|<2} |z-y|^{1-n}u(z)\, dz \end{aligned}$$
puis, avec l'inégalité de Hölder,
$$vol(B^n)^p|h(\omega)(y)|^p \leq (2^{n/p}\, n\, vol(\partial B^n))^{p-1} \int_{|z-y|<2} u^p(z)\, dz$$
et enfin
$$\| h(\omega) \|_p \leq \text{const.}\,(n,p) \ \| \omega \|_p \ .$$
Comme $dh = 1 - hd$, on conclut que h est borné sur $L^p\Omega^k(B^n)$ pour $k \geq 1$.

Lorsque $\omega = df$ est la différentielle d'une fonction, on constate que
$$hdf = f - \frac{1}{vol(B^n)} \int_{B^n} f,$$
ce qui conduit à définir $h : L^p\Omega^0(B^n) \to L^p\Omega^{-1}(B^n)$ par
$$hf = \frac{1}{vol(B^n)} \int_{B^n} f,$$
qui est clairement borné sur L^p. L'identité $hd = 1$ est aussi satisfaite sur l'espace $L^p\Omega^{-1}(B^n)$. ∎

Corollaire 9 *Le complexe des formes différentielles $L^p\Omega^*$ est une résolution du faisceau localement constant* $\mathbf{R}$.

En effet, dans une variété à géométrie bornée, toute intersection de boules de rayon $\geq \epsilon$ contenant une boule de rayon $\geq \epsilon'$ diffère de la boule unité par un difféomorphisme de dérivée bornée, qui transporte l'homotopie construite sur B^n en une homotopie bornée.

Remarque. Si M est une variété simplement connexe à courbure strictement négative, la formule de Poincaré peut être utilisée pour montrer que la cohomologie L^p est nulle en degré ≥ 2 pour p assez grand.

5 Cochaînes "à la Alexander-Spanier"

Dans cette section, on vérifie que les cochaînes à la Alexander-Spanier constituent une résolution du faisceau constant. Soit M un espace métrique muni d'une mesure dx. On a défini en 1.1 l'espace $L^pAS_t^k(M)$ cochaînes de taille t sur M, muni de la norme L^p. Pour chaque ouvert U de M, on a un espace $L^pAS_t^k(U)$ des k-cochaînes sur U, de taille t, muni de la norme L^p. Les $L^pAS_t^k$ ne forment pas exactement un faisceau, mais les raisonnements des paragraphes 3.5 à 6 s'étendent et on peut suivre le paramètre t. De nouveau, on complète le complexe d. Notant $L^pAS_t^{-1} = \mathbf{R}$ le faisceau constant (muni de la norme L^p), on a un complexe
$$0 \to L^pAS_t^{-1} \xrightarrow{d} L^pAS_t^0 \xrightarrow{d} \cdots$$
où $d : L^pAS_t^{-1} \to L^pAS_t^0$ consiste simplement à considérer une fonction localement constante comme une fonction sur les 0-simplexes.

5.1 Finesse

Si $\kappa \in L^p AS^k_t(U)$, $k \geq 0$, et χ est une fonction bornée, on peut multiplier κ par χ selon la formule

$$\chi\kappa(x_0, \dots, x_k) = \left(\frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^{k} \chi(x_i) \right) \kappa(x_0, \dots, x_k).$$

Pour un recouvrement $\mathcal{U}$ ϵ-uniforme, on obtient une homotopie

$$\eta : L^p \check{C}^j(\mathcal{U}, L^p AS^k_t) \to L^p \check{C}^{j-1}(\mathcal{U}, L^p AS^k_{\min(t,\epsilon)}).$$

Lemme 10 *Dans la boule unité B^n, il existe pour chaque $k \geq 0$ une équivalence d'homotopie de complexes*

$$E : L^p AS^k_t(B^n) \to L^p AS^k_2(B^n).$$

D'autre part, le complexe $L^p AS^*_2(B^n)$ est acyclique. Par conséquent, le complexe $L^p AS^*_t(B^n)$, $t > 0$ l'est aussi.

Sur $L^p AS^k_2(B^n)$, on construit un opérateur h comme suit

$$(h\kappa)(\Delta) = \kappa(c_0\Delta)$$

où $c_0\Delta$, le "cône de sommet 0 sur Δ", est le simplexe dont le premier sommet est l'origine et la première face Δ. Comme

$$1 = \partial c_0 + c_0 \partial,$$

h satisfait $1 = hd + dh$. L'équivalence de complexes

$$E : L^p AS^*_t(B^n) \to L^p AS^*_2(B^n)$$

est obtenue en subdivisant les simplexes en simplexes plus petits.

Choisissons, pour chaque simplexe δ de B^n, un point $s(\Delta) \in B^n$. On définit par récurrence un opérateur $\sigma = \sigma_s$ sur les chaînes comme suit. Sur les 0-chaînes, σ est l'identité. Ensuite, on pose

$$\sigma(\Delta) = c_{s(\Delta)}\sigma(\partial\Delta).$$

Notant $\tilde{b}$ l'opérateur sur les chaînes donné, sur un simplexe Δ, par

$$\tilde{b}(\Delta) = c_{s(\Delta)}(\Delta),$$

on vérifie aisément par récurrence les relations

$$\partial\sigma\partial = 0$$

puis

$$\sigma\partial = \partial\sigma$$

et

$$(1 - \sigma)(\Delta) = (\partial\tilde{b} + \tilde{b}\partial)(\Delta) - \partial c_{s(\Delta)}\tilde{b}(\partial\Delta).$$

On définit un opérateur $b = b_s$ sur les chaînes par sa valeur sur les simplexes :

$$b(\Delta) = \tilde{b}(\Delta) - c_{s(\Delta)}\tilde{b}(\partial\Delta),$$

et alors

$$1 - \sigma = \partial b + b\partial.$$

Pour chaque simplexe Δ de B^n, choisissons une mesure de probabilité μ_Δ sur B^n. La mesure produit, sur l'espace des applications $s : \Delta \mapsto s(\Delta) \in B^n$, est notée ds. On pose

$$\Sigma = \int \sigma_s \, ds.$$

Notant $B = \int b_s \, ds$, on a encore

$$\partial\Sigma = \Sigma\partial$$

et

$$1 - \Sigma = \partial B + B\partial.$$

Par dualité, on obtient des opérateurs $E = {}^t\Sigma$ et $A = {}^tB$ sur les cochaînes qui satisfont $Ed = dE$ et $1 - E = dA + Ad$.

On vérifie que E et A sont bornés en norme L^p dès que, pour tout simplexe Δ,

$$d\mu_\Delta(x) \leq const.\, dx.$$

Lorsque, pour chaque Δ, μ_Δ est la masse de Dirac concentrée au barycentre de Δ, l'opérateur Σ consiste à remplacer Δ par la somme des simplexes résultant de la première subdivision barycentrique de Δ. Chacun de ces simplexes a donc un diamètre inférieur à $(1-\lambda)\, diam(\Delta)$ où $\lambda > 0$. Fixant $\lambda' < \lambda$, on choisit pour μ_Δ la mesure de probabilité uniforme portée par la boule centrée au barycentre et de rayon $\lambda' \max(t, diam(\Delta))$. Alors, pour presque tout s, les simplexes intervenant dans $\sigma_s(\Delta)$ ont un diamètre inférieur à $(1-\lambda') \max(t, diam(\Delta))$, donc, pour tout $t' \geq (1-\lambda')^{-1}t$, E envoie $L^pAS^k_{(1-\lambda')t'}(B^n)$ dans $L^pAS^k_{t'}(B^n)$. Quitte à prendre une puissance de E (et à modifier A), on peut supposer que E envoie $L^pAS^k_t(B^n)$ dans $L^pAS^k_2(B^n)$. ∎

5.2 Espaces à courbure négative ou nulle

La preuve ci-dessus repose sur la propriété géométrique suivante de la boule euclidienne : si Δ' est l'un des simplexes de la subdivision barycentrique d'un k-simplexe Δ, alors

$$\mathrm{diam}\, \Delta' \leq \frac{k}{k+1} \mathrm{diam}\, \Delta.$$

Cette propriété s'étend aux variétés riemanniennes simplement connexes à courbure négative ou nulle, et plus généralement encore, aux espaces satisfaisant la condition CAT(0) d'Alexandrov, voir [BH]. Par conséquent, on obtient une preuve du théorème 1 pour ces espaces.

6 Preuve du théorème 1

Proposition 11 *Soit M une variété riemannienne (resp. un complexe simplicial) à géométrie bornée. On suppose que, pour $1 \leq j \leq k$, la cohomologie $H^j(M, \mathbf{R})$ s'annule "uniformément", i.e., pour toute boule B, il existe une boule concentrique dont le rayon ne dépend que de celui de B telle que la restriction*

$$H^j(B', \mathbf{R}) \to H^j(B, \mathbf{R})$$

soit nulle.

Alors, pour tout $t > 0$, la cohomologie L^p en degré k (exacte en degré $k+1$) du complexe d'Alexander-Spanier est indépendante de la taille t : pour $t < t'$, la restriction

$$L^pAS^*_{t'}(M) \to L^pAS^*_t(M)$$

induit une équivalence d'homotopie de complexes en degrés $\leq k$ et un isomorphisme

$$EL^pH^{k+1}_{t'}(M) \simeq EL^pH^*_t(M).$$

6.1 Preuve

On discrétise d'abord M. Si M est une variété riemannienne à géométrie bornée, on choisit un recouvrement uniforme et on remplace M par le nerf de ce recouvrement. On est ramené au cas d'un complexe simplicial. On note X le 0-squelette.

D'après le corollaire 7, les cochaînes de taille 1 pour l'espace discret X calculent la cohomologie L^p de de Rham ou simpliciale de M. On ne perd donc pas de généralité en supposant $t \geq 1$. Fixons $t' > 1$. Une cochaînes de taille t' est en gros une cochaîne du recouvrement de X par les boules de rayon t'. Pour prolonger une cochaîne de taille $t = 1$ en une cochaîne de taille t', on va utiliser le même mécanisme que celui de la proposition 6.

On construit un double complexe $C_s^{k,\ell}$ comme suit. Soit $s > 1$. Un élément de $C_s^{k,\ell}$ est une fonction de $k+1+\ell+1$ variables $x'_0, \ldots, x'_k, x''_0, \ldots, x''_\ell$ où les distances sont limitées,

$$d(x'_i, x'_j) \leq t, \quad d(x'_i, x''_j) \leq s, \quad d(x''_i, x''_j) \leq t'.$$

La norme L^p s'obtient en intégrant (sommant puisque X est discret) par rapport à toutes les variables. On dispose de deux différentielles d' (à la Alexander-Spanier sur les variables x'_i seulement) et d'' (agit sur les variables x''_j seulement, vaut $(-1)^k$ fois la différentielle d'Alexander-Spanier) formant un bicomplexe. Les complexes $(C_s^{*,\ell}, d')$ sont complémentés en tout degré. En effet, lorsqu'on gèle les variables x''_j, on obtient un complexe de dimension finie bornée $AS_t(\cap_{j=0}^{\ell} B(x''_j, s))$, et, lorsque les x''_j varient, on ne rencontre qu'un nombre fini d'opérateurs d' différents. On dispose donc d'opérateurs $r' : C_s^{k,\ell} \to C_s^{k,\ell}$, $h' : C_s^{k,\ell} \to C_s^{k-1,\ell}$ tels que $1 - r' = d'h' + h'd'$, et dont la norme L^p est bornée en fonction de s seulement.

Présentons d'abord informellement la preuve.

Etant donné un cocycle $c \in C_s^{k+1,-1}$, L^p et exact, on veut lui faire correspondre un cocycle $Fc \in C_s^{-1,k+1}$. C'est un cocycle d'Alexander-Spanier de taille s, on montre que sa restriction aux simplexes de taille de t satisfait $c - Fc \in dL^p$.

Le candidat pour Fc est $h'b^{k+1}d''c$ où $b = -h'd'' - d''h'$. Relisons la preuve du lemme 5. b est une équivalence d'homotopie $b = -h'd'' - d''h'$ de $C_s^{*\leq k+1,*} \to C_s^{*\leq k,*}$. A l'origine de l'homotopie $1 - b = (d' + d'')hc$, il y a la relation $1 = h'd' + d'h'$. Or celle-ci est satisfaite sur $d''c$ car $d''c$ est d'-exact, donc $r'd''c = 0$. Elle n'est pas satisfaite a priori sur $bd''c$, car celui-ci est d''-exact, $d' + d''$-exact, mais pas d'-exact en général.

Toutefois, si on gèle les variables x''_0 et x''_1, $bd''c \in AS_t(B(x''_0, s) \cap B(x''_1))$ est défini sur toute la boule $B(x''_0, s - t')$. Si on a choisi s suffisamment grand, la restriction de $bd''c$ à la boule $B(x''_0, s_k)$ est d'-exacte, où, en vertu de l'hypothèse d'annulation uniforme de cohomologie, $s = s_{k+1}$ ne dépend que de s_k. Par conséquent, si on accepte de voir la taille des cochaînes diminuer, on peut copier le lemme 5.

Pour rendre la construction rigoureuse, il suffit de construire la suite s_0, s_1,..., s_{k+1} par récurrence. On pose $s_0 = t'$ et on peut prendre $s_1 = s_0 + t' = 2t'$ car les boules sont connexes, $H^0(B(x, R), \mathbf{R}) = \mathbf{R}$. Soit $j \geq 1$. D'après l'hypothèse d'annulation uniforme de $H^j(M, \mathbf{R})$, il existe $R > s_j$ tel que pour tout $x \in X$, la restriction $H^j(B(x, R), \mathbf{R}) \to H^j(B(x, s_j), \mathbf{R})$ soit nulle. On choisit $s_{j+1} = R + t'$.

On pose $C^{k,\ell} = C_{s_k}^{k,\ell}$ et $\tilde{b} : C^{k,\ell} \to C^{k-1,\ell+1}$ vaut $-h'd'' - d''h'$ suivi de la restriction $C_{s_k}^{k-1,\ell+1} \to C_{s_{k-1}}^{k-1,\ell+1}$. Sur les cocycles d'-exacts, on a la relation $1 - \tilde{b} = (d' + d'')h'$ et $\tilde{b}$ envoie cocycles exacts sur cocycles exacts. En itérant $\tilde{b}$ $k+1$-fois, on obtient, pour $c \in C^{k+1,-1}$ exact,

$$d''c - \tilde{b}^{k+1}d''c = (d' + d'')Hd''c \quad \text{où} \quad H = h' \sum_{j=0}^{k} \tilde{b}^j.$$

Il s'agit maintenant de transformer cette identité en $c - Fc = d\tilde{H}c$ où $Fc = h'\tilde{b}^{k+1}d''c$. On va utiliser pour cela l'expression du cup-produit en cohomologie simpliciale. Si Z est un complexe simplicial et $C^*(Z)$ le complexe des cochaînes simpliciales réelles, le cup-produit est une application $\smile : C^k \otimes C^\ell \to C^{k+\ell}$ qui a les propriétés suivantes

- Si k ou ℓ vaut 0, alors $\smile$ est l'identité ;
- $d(a \smile b) = da \smile b + (-1)^k a \smile db$ modulo l'image de d.

Il est donné par la formule

$$a \smile b\,(x_0, \ldots, x_{k+\ell}) = a(x_0, \ldots, x_k) b(x_k, \ldots, x_{k+\ell}).$$

Pour notre bicomplexe $C^{*,*}$, la même formule donne une application $\smile : C^{j,\ell} \to C^{j+\ell,-1}$ ayant les propriétés suivantes

- $\smile$ est l'identité sur $C^{k+1,-1}$, et sur $C^{-1,k+1}$, c'est la restriction $AS_{t'}^{k+1} \to AS_{t'}^{k+1}$;
- $\smile \circ d''$ est l'identité sur $C^{k+1,-1}$;
- $\smile \circ (d' + d'') = d \circ \smile$.

En appliquant $\smile$ à l'équation (*), il vient, pour $c \in C^{k+1,-1}$ exact,

$$c - \smile \tilde{b}^{k+1} d'' c = d \smile H d'' c,$$

i.e., quitte à restreindre Fc aux simplexes de taille t, $c - Fc = d\tilde{H}c$ où $H = \smile H d''$ est borné sur L^p.

Notons $R_{t',t}$ la restriction $R_{t,t'} : L^p AS_{t'}^*(M) \to L^p AS_t^*(M)$. On a construit un inverse $F = F_{t,t'} : L^p AS_t^*(M) \to L^p AS_{t'}^*(M)$ et montré que $F_{t,t'} R_{t',t} = 1$ en cohomologie. En fait, on obtient simultanément l'identité $R_{t',t} F_{t,t'} = 1$. En effet, comme l'opérateur $F_{t,t'} = F_{t'}$ ne dépend que du paramètre t' et non de t, si c est une cochaîne de taille t', alors $F_{t,t'} R_{t',t} c = F_{t',t'} c = F_{t',t'} R_{t',t'} c$. D'autre part, au niveau de la cohomologie, $F_{t',t'} R_{t',t'} = 1$ (cas particulier $t = t'$ du résultat précédent). Ceci achève la preuve de la proposition 11 et donc du théorème 1. ∎

7 Exemples

7.1 L'espace hyperbolique

Cet exemple est riche, à la fois en cohomologie L^p et en quasiisométries. La cohomologie L^p et les quasiisométries peuvent être décrites assez explicitement. Soit M l'espace hyperbolique de dimension n. On a $L^\infty H^0(M) = \mathbf{R}$ et $L^p H^0(M) = 0$ pour p fini. L'espace $L^\infty H^1(M)$ est non nul mais difficile à décrire. Il n'est pas séparé.

En revanche, $L^p H^1(M) = 0$ pour $1 \leq p \leq n-1$.

Pour $n - 1 < p < +\infty$, l'espace $L^p H^1(M)$ est non nul, il s'identifie à l'espace des 1-formes fermées sur le bord à l'infini ∂M (une sphère S^{n-1}) dont les coefficients sont dans l'espace de Besov $B^a_{p,p}$ où $a = \frac{n-1}{p} - 1$ (en gros cela signifie qu'elles ont a dérivées dans L^p). Cet espace fonctionnel est assez gros (il contient toutes les 1-formes fermées L^p de ∂M). Une quasiisométrie f de M se prolonge en un homéomorphisme ∂f de la sphère à l'infini, de sorte que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} L^p H^1(M) & \to & B^a_{p,p}(\partial M) \\ \downarrow f^* & & \downarrow \partial f^* \\ L^p H^1(M) & \to & B^a_{p,p}(\partial M) \end{array}$$

commute, voir [Pa]. Inversement, un homéomorphisme de ∂M qui préserve l'espace $B^a_{p,p}(\partial M)$ pour un $p > n-1$ est quasiconforme, et se prolonge en une quasiisométrie de M. C'est particulièrement évident si $p = n$, car on peut utiliser l'invariance conforme de la cohomologie réduite $L^n \overline{H}^1$ en dimension n. Si $2 \leq k \leq n-1$, on a $L^\infty H^k(M) = 0$ et $L^p H^k(M) = 0$ pour $p \geq \frac{n-1}{k-1}$ et pour

$1 \leq p \leq \frac{n-1}{k}$. Si $p = \frac{n-1}{k-1}$, l'espace $L^p H^k(M)$ n'est pas séparé, voir [GKS2].

Lorsque $\frac{n-1}{k} < p < \frac{n-1}{k-1}$, on peut à nouveau identifier l'espace de cohomologie L^p en degré k à un espace de Besov de k-formes fermées sur la sphère à l'infini ∂M, de façon compatible avec le produit extérieur. On voit alors que le cup-produit en cohomologie L^p est non nul en général. Pour l'action des quasiisométries, il y a certainement un diagramme commutatif comme lorsque $p = 1$, mais je ne sais pas encore le montrer.

Enfin, si $k = n$, $L^p H^n(M) = 0$ pour tout p, $1 < p \leq +\infty$ mais $L^1 H^n(M) \neq 0$. En général, pour une variété riemannienne complète de dimension n, l'intégrale des formes L^1, $\int : L^1 H^n(M) \to \mathbf{R}$ combinée avec le cup-produit permet de définir une dualité de Poincaré en cohomologie réduite. C'est un difféomorphisme de $L^p \overline{H}^k(M)$ sur $L^{p'} \overline{H}^{k'}(M)$ où $k + k' = n$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Dans le cas de l'espace hyperbolique, on obtient une transformation intéressante entre formes sur le bord. Lorsque $n = p = p' = 2$, $k = k' = 1$, il s'agit de la transformation de Hilbert.

L'opérateur $\int$ (et par conséquent la dualité de Poincaré) est certainement invariant par les quasiisométries qui préservent l'orientation à grande échelle, mais je ne sais pas encore le montrer.

7.2 Groupes quasiisométriques

Si deux groupes discrets apparaissent comme groupes cocompacts d'isométries d'un même espace, ils sont quasiisométriques. Mais il y a des exemples moins triviaux.

S. Gersten a remarqué que si Γ est une extension centrale cyclique de Γ' définie par un 2-cocycle *borné* de Γ' (au sens de la cohomologie bornée, voir 1.4), alors Γ est quasiisométrique à l'extension triviale $\Gamma \times \mathbf{Z}$. Lorsque Γ' est un groupe de surface, on trouve ainsi d'innombrables exemples. D'aprés le théorème 1, ces groupes ont tous la même cohomologie L^p, donnée par le théorème de Künneth de [GKS3].

7.3 Groupes libres

P. Papasoglu a montré que tous les arbres homogènes de valence ≥ 3 sont deux à deux bilipschitz (i.e. il existe une bijection bilipschitzienne entre les 0-squelettes). Notre proposition 1 ne semble donc pas d'une grande utilité pour les arbres. Ce n'est pas vrai : il existe des quasiisométries entre arbres qui ne sont pas proches de bijections bilipschitziennes.

8 Addendum (août 2004)

L'invariance par quasiisométries de la cohomologie L^p pour les espaces *uniformément contractiles* est due à M. Gromov, [Gr3]. Des versions grossières de la cohomologie L^p, et donc des variantes du théorème 1, ont été développées indépendamment par G. Elek [1] et P. Fan [2].

En présence d'un groupe cocompact d'isométries, on peut, en utilisant la dimension de Von Neumann, définir des nombres de Betti L^2. Bien qu'invariants par équivalence mesurable à proportionalité près, [3], ces nombres ne sont pas des invariants de quasiisométrie.

On peut aussi définir la fonction densité du spectre du laplacien, et celle-ci est déterminée par la presque cohomologie. L'invariant de Novikov-Shubin [NS], est le degré de décroissance polynomiale de la densité du spectre au voisinage de 0. Les invariants de Novikov-Shubin des groupes moyennables sont des invariants de quasiisométrie, [4], s'inspirant d'idées de [5]. La cas général (groupes non moyennables) est ouvert.

References

[BH] M. BRIDSON, A. HAEFLIGER, *Metric spaces of nonpositive curvature.* Grundlehren **319**, Springer Verlag, Berlin (1999).

[D1] J. DODZIUK, *De Rham-Hodge Theory for L^2-cohomology of infinite coverings.* Topology **16**, 157 − 165 (1977).

[D2] J. DODZIUK, *Sobolev spaces of differential forms and the de Rham-Hodge isomorphism.* J. Diff. Geom. **16**, 63 − −73(1981).

[E] A.V. EFREMOV, *Combinatorial and analytic Novikov-Shubin invariants.* Preprint (1991).

[Go] R. GODEMENT, *Topologie algébrique et théorie des faisceaux* Hermann, Paris (1964).

[GKS1] V. GOL'DSHTEIN, V. KUZ'MINOV, I. SHVEDOV, *De Rham isomorphism of the L_p-cohomology of noncompact riemannian manifolds.* Sib. Mat. Zh. **29**, 34 − 44 (1988), traduction anglaise : 190 − 197 (1988).

[GKS2] V. GOL'DSHTEIN, V. KUZ'MINOV, I. SHVEDOV, *L_p-cohomology of warped products.* Sib. Mat. Zh. **31**, 55 − 64 (1990).

[GKS3] V. GOL'DSHTEIN, V. KUZ'MINOV, I. SHVEDOV, *Künneth formula for L_p-cohomology.* Sib. Mat. Zh. **32**, (1991).

[Gr1] M. GROMOV, *Volume and bounded cohomology.* Publ. Math. I.H.E.S. **56**, 1 − 99 (1982).

[Gr2] M. GROMOV, *Infinite groups as geometric objects.* Proc. I.C.M., Warsawa, Vol. 1, 385−391 (1984).

[Gr3] M. GROMOV, *Asymptotic invariants of infinite groups.* Geometric group theory. Volume 2: Proceedings of the symposium held at the Sussex University, Brighton, 1991. London Math. Soc. Lecture Note Series. **182**. Cambridge University Press. (1993).

[GS] M. GROMOV, M. A. SHUBIN, *Near-cohomology of Hilbert complexes and topology of non-simply connected manifolds.* Astérisque **210**, 283 − 294 (1992).

[H] J.-C. HAUSMANN, *On the Vietoris-Rips complexes and a cohomology theory for metric spaces.* Quinn, Frank (ed.), Prospects in topology. Proceedings of a conference in honor of William Browder, Princeton, March 1994. Princeton University Press. Ann. Math. Stud. **138**, 175 − 188 (1995).

[NS] S.P. NOVIKOV, M.A. SHUBIN, *Morse theory and Neumann invariants of non-simply connected manifolds.* Usp. Mat. Nauk **41**, 222 − 223 (1986).

[Pa] P. PANSU, *Cohomologie L^p des variétés à courbure négative, cas du degré un.* in "Partial Differential equations and Geometry", Torino 1988, Rend. Sem. Mat. Torino, fasc. spez., 95−120 (1988).

[P] P. PAPASOGLU, *Homogeneous trees are bilipschitz equivalent.* Geom. Dedic. **54**, 301 − 306 (1995).

[R] J. ROE, *Coarse cohomology and index theory.* Mem. Amer. Math. Soc. **104**, n^0 497, 1 − 90 (1993).

[1] G. ELEK, *Coarse cohomology and l_p-cohomology.* K-Theory **13**, 1 − 22 (1998).

[2] P. FAN, *Coarse l_p-geometric invariants.* PhD thesis, University of Chicago, (1994).

[3] D. GABORIAU, *Invariants ℓ^2 de relations d'équivalence et de groupes.* Publ. Math. Inst. Hautes Étud. Sci. **95**, 93 − 150 (2002).

[4] R. SAUER, *Quasi-Isometry Invariance of Novikov-Shubin Invariants for Amenable Groups.* Preprint, arxiv math.AT/0312129.

[5] Y. Shalom, *Harmonic analysis, cohomology, and the large scale geometry of amenable groups.* Preprint Hebrew University (2003).

Pierre Pansu
Laboratoire de Mathématique d'Orsay
UMR 8628 du C.N.R.S.
Bâtiment 425
Université Paris-Sud - 91405 Orsay (France)
Pierre.Pansu@math.u-psud.fr
http://www.math.u-psud.fr/∼pansu