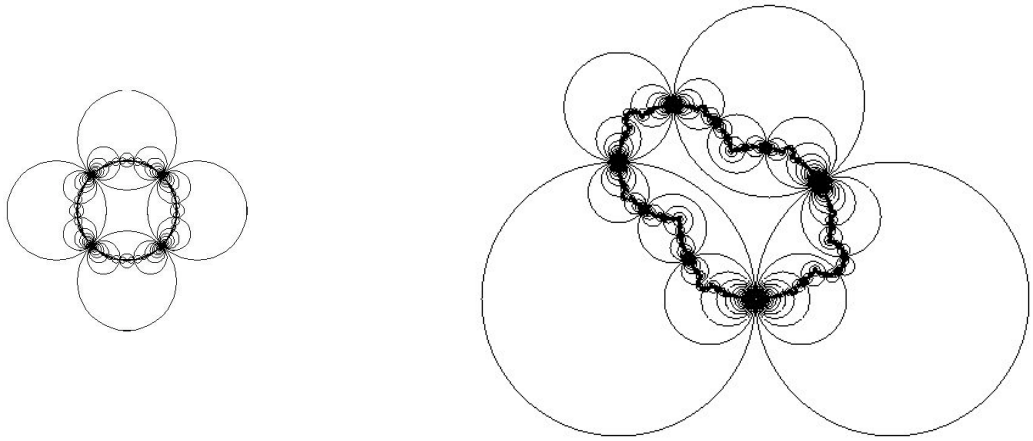
En d'autres termes, un groupe se représente d'au plus une façon comme sous-groupe discret et co-compact du groupe des isométries de l'espace de Lobatchevskii. Le problème plus général d'étudier les représentations d'un groupe discret donné dans divers groupes de Lie présente un mélange intéressant de rigidité et de flexibilité. Le cas des groupes de surfaces est particulièrement riche, car les espaces de modules obtenus sont des objets centraux dans les théories quantiques des champs conformes. Ils portent des structures géométriques rares. On commence seulement à comprendre les propriétés individuelles des représentations qui composent ces espaces de modules.

Une variété munie d'une métrique à courbure constante négative est *modelée* sur l'espace de Lobatchevskii : à petite échelle, on se croit dans cet espace, on dispose donc de cartes à valeurs dans cet espace, et les changements de cartes sont isométriques. La question de rigidité, dans ce cas, devient de savoir si une variété modelée sur un espace *homogène* (i.e. un espace avec une action transitive d'un groupe de Lie) est forcément un quotient de cet espace (ou d'un ouvert de cet espace), i.e. attachée à un sous-groupe discret d'un groupe de Lie. La réponse est facilement oui pour la géométrie hyperbolique, et plus généralement, pour les modèles munis d'une distance homogène. Le problème devient passionnant lorsque le modèle est, par exemple, pseudo-riemannien, ou bien pseudo-riemannien conforme.

Les structures invariantes (métrique, volume, connexion,...) portées par un espace homogène existent sur toutes les variétés modelées sur lui. Réciproquement, une variété qui porte ce type de structure est-elle nécessairement modelée sur un espace homogène ? On peut l'espérer, lorsque la structure est holomorphe, ou bien invariante par un gros groupe de transformations.

La géométrie actuelle explore ainsi une hiérarchie de classes d'espaces de plus en plus larges. Là où l'on s'attendrait à rencontrer surtout de la topologie, les idées empruntées aux systèmes dynamiques jouent un rôle croissant.



Exemple de représentation flexible d'un groupe de surface : deux façons de paver par réflexions, à l'aide d'un quadrilatère idéal, un ouvert de la 2-sphère conforme (dans la vignette, le complémentaire d'un cercle ; dans la figure, le complémentaire d'une courbe fractale). Crédit photo : Curt McMullen