

2

UNIVERSITE PARIS VII

T H E S E

présentée
pour obtenir

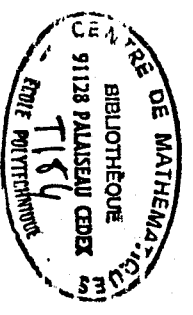
le titre de Docteur 3ème cycle
spécialité : Mathématiques Pures

par
Pierre PANSU

Sujet : GEOMETRIE DU GROUPE D'HEISENBERG

Soutenu le 24 Juin 1982 devant la Commission d'Examen

Mme.	J. FERRAND	Présidente
MM.	M. BERGER	} Examinateurs
	A. DOUADY	
	M. GROMOV	



SOMMAIRE

	page
Introduction	1
Chapitre 1 : Convergence de groupes nilpotents, croissance des boules et des géodésiques fermées.	11
A. Généralités	11
B. Précisions sur le théorème 1	15
C. Construction de la norme	20
D. Métriques de Carnot-Carathéodory	23
E. Convergence de métriques sur les groupes nilpotents	25
F. Volume des boules	36
G. Géodésiques périodiques	37
Appendice A : Torsion dans un groupe nilpotent de type fini	42
Appendice B : Volume Asymptotique en dimension 3	44
Chapitre 2 : Inégalités isopérimétriques	49
A. Flot géodésique	52
B. Sections canoniques	55
C. Une autre inégalité	56
D. Application à l'analyse : Inégalités de Sobolev	58
E. Application à l'analyse : Laplacien de Kohn	60
F. Groupes de dimension supérieure	63
G. Propriétés conformes des groupes nilpotents	68
H. Une propriété combinatoire des groupes discrets nilpotents	68

A. Dimension de Hausdorff	70
B. Equation des surfaces minimales	75
C. Existence de sections minimales de bord donné	85
D. Unicité de la section minimale de bord donné	88
E. Propriété de minimum	90
F. Estimée a priori	93
G. Existence de surfaces réglées lisses de bord donné	95

Bibliographie

101

INTRODUCTION

Les groupes nilpotents ont été abordés récemment avec des points de vue très divers : théorie des représentations, équations aux dérivées partielles, analyse complexe, et enfin, géométrie riemannienne. Pour le géomètre, les groupes nilpotents, muni de leurs métriques invariantes à gauche, sont une source d'exemples et de contre-exemples. (Voir [23], [16]).

Dans ce travail, nous illustrons deux idées dégagées par M. Gromov dans [10] : la notion de convergence au sens de Hausdorff, et le lien entre transformations conformes et inégalités isopérimétriques. Le cadre en est le groupe de Heisenberg de dimension 3, et ses métriques invariantes à gauche, que nous allons décrire d'abord.

Le groupe de Heisenberg de dimension 3 :

C'est le groupe de Lie simplement connexe, de dimension 3, nilpotent. Son algèbre de Lie admet des bases X, Y, Z satisfaisant aux relations suivantes :

$$[X, Z] = [Y, Z] = 0, \quad [X, Y] = Z.$$

Autrement dit, ce groupe G a un centre de dimension 1, dont la direction est donnée par le vecteur Z .

Le groupe d'automorphismes de G est un peu plus petit que celui de \mathbb{R}^3 , puisqu'il préserve le centre. Dans la base X, Y, Z , les automorphismes ont une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ b & c \det A \end{pmatrix}$$

où $b, c \in \mathbb{R}$, $A \in GL(2, \mathbb{R})$.

Fixons une base X, Y, Z de l'algèbre de Lie. Le groupe d'automorphismes est suffisamment vaste pour que toute métrique riemannienne invariante à gauche soit, à automorphisme près, équivalente à l'une des métriques \mathcal{E}_t : \mathcal{E}_t est donnée par la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t^2 \end{pmatrix}$$

Utilisons les coordonnées exponentielles $(x, y, z) \rightarrow \exp(\alpha x + \beta y + \gamma z)$

Posons $\omega = dz + \frac{1}{2}(y dx - x dy)$; alors la métrique g_t s'écrit

$$g_t = dx^2 + dy^2 + t^2 \omega^2 .$$

Les métriques g_t , pour t tendant vers 0 , apparaissent dans la

théorie des variétés presque plates (voir P. Buser, H. Karcher,

Gromov's almost flat manifolds, chap. 1 et 7) ; en effet, toutes

passent au quotient par le sous-groupe discret cocompact

$$\Gamma = \{ x, y, z \in \mathbb{Z} \} ,$$

donc induisent une famille de métriques sur la nilvariété compacte

$\Gamma \backslash G$, de diamètre borné et de courbure tendant vers 0 .

En revanche, que se passe-t-il lorsque t tend vers $+\infty$?

La métrique de Carnot-Carathéodory :

Notons H le champ de plans invariant à gauche sur G , obtenu en

translatant le plan X, Y . Remarquons que les g_t induisent toutes

la même norme sur ce sous-fibré ; la longueur d'une courbe horizontale,

i. e. , presque partout tangente à H , est donc indépendante de t .

Définition : Soient x, y deux points de G . La distance Carnot-

Carathéodory $d_\infty(x, y)$ est la borne inférieure des longueurs des courbes horizontales reliant x à y dans G .

Montrons que cette distance est toujours finie. Notons π la projec-

tion de G sur le groupe abélien $\mathbb{R}^2 = G/[G, G]$. Pour une métrique

euclidienne bien choisie sur \mathbb{R}^2 , π est une submersion riemannienne

relativement à toutes les g_t . La submersion π est aussi une fibra-

tion principale de groupe \mathbb{R} , de forme de connexion ω ; la relation

$$d\omega = -\pi^* dx \wedge dy$$

exprime le fait que la courbure de ce fibré est la forme volume de \mathbb{R}^2 .

Ces propriétés de π entraînent que toute courbe lisse dans \mathbb{R}^2

admet, modulo le choix d'un relèvement de l'origine, un relèvement

horizontal unique dans G . De plus, si c est une courbe fermée

dans \mathbb{R}^2 , si c' est son relèvement horizontal d'origine x dans

G , l'extrémité de c' est un point x' dans la même fibre ; la

hauteur entre x et x' , i. e. , l'intégrale de ω sur le segment

de fibre (x, x') , est égale à l'aire orientée enfermée par la courbe

c dans \mathbb{R}^2 . Ceci se voit aussi élémentairement : le relèvement

horizontal s'obtient, en coordonnées, en résolvant l'équation

$$\left(\frac{dc}{dt} \right) = 0, \text{ i.e., } \frac{dz'}{dt} = \frac{1}{2} \left(x(t) \frac{dy}{dt} - y(t) \frac{dx}{dt} \right) .$$

Clairement, si $x, y \in G$, en choisissant bien la courbe c dans

\mathbb{R}^2 , reliant $\pi(x)$ à $\pi(y)$, le relèvement horizontal c' relie x

à y . Ceci prouve que $d_\infty(x, y)$ est fini.

Dilatations : Les matrices $\begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t^2 \end{pmatrix}$ déterminent des automorphi-

smes δ_t du groupe G . Alors δ_t est une homothétie de rapport t

pour la distance d_∞ . Cela donne une idée de la forme des petites

boules pour d_∞ : elles sont plus aplaties dans la direction du centre,

que les boules riemanniennes.

Dimension de Hausdorff :

Précisément (Lemme 3.7), une boule relative à g_1 , de rayon r pe-

tit, est recouverte par $1/r$ boules de rayon r relatives à d_∞ , et

pas moins. Un ouvert de G , qui est recouvert par $1/r^3$ boules rié-

manniennes de rayon r , ne pourra être recouvert que par au moins

$1/r^4$ boules relatives à d_∞ . Cela s'énonce : la dimension de Hausdorff

(définition 3.1) d'un ouvert de G , muni de la distance d_∞ , est égale

à 4 .

Plus généralement, une sous-variété de dimension p de G , si elle

n'est pas horizontale, aura, pour la distance induite d_∞ , une dimen-

sion de Hausdorff égale à $p+1$ (§ 3.4, 3.5).

A la distance de Carnot-Carathéodory sont associées des mesures de

Hausdorff p-dimensionnelles \mathcal{M}^p . La mesure \mathcal{M}^p est invariante par

les isométries de d_∞ , et homogène de degré p sous les homothéties

δ_t . Par exemple, la mesure 3-dimensionnelle \mathcal{M}^3 sur une surface V de

classe C^2 est absolument continue par rapport à la mesure induite

par la métrique riemannienne g_1 , et la densité est donnée par 3.6 :

$$d\mathcal{M}^3 / d \text{ aire} = |\omega| = \sup_{u \in TV} \omega(u) / |u|,$$

où les normes sont prises relativement à g_1 .

La non-intégrabilité du champ de plans H se manifeste de nouveau

par le fait que, inversement, l'aire riemannienne est absolument

continue par rapport à \mathcal{M}^3 (3.12).

Géodésiques : les géodésiques relatives à la métrique de Carnot-Carathéodory, i.e., les courbes qui réalisent la distance entre deux de

leurs points pourvu qu'ils soient assez proches, ont été déterminées

par B. Gaveau ([7]). Elles sont de deux types :

- les droites, i.e., les relèvements horizontaux des droites de \mathbb{R}^2 ; elles minimisent sur toute leur longueur.
- les relèvements horizontaux des cercles de \mathbb{R}^2 ; elles ne minimisent que sur un tour. En coordonnées exponentielles, ce sont des hélices.

Dans [9] et [11], M. Gromov a introduit une notion de conver-

gence de variétés riemanniennes, nettement plus faible que les notions antérieurement utilisées. Elle permet de construire des limites dans des situations très générales, c'est là son intérêt : Gromov l'a prouvée dans [11], en montrant qu'un groupe discret, à croissance polynomiale, est presque nilpotent.

L'objet du chapitre 1 est de montrer qu'une telle convergence existe pour les métriques g_t , et d'en tirer des informations géomé-

triques sur ces métriques riemanniennes, en se basant sur les propriétés connues de la métrique de Carnot-Carathéodory.

Théorème principal (1.29) : les espaces métriques (G, g_t) convergent au sens de Hausdorff vers l'espace métrique (G, d_∞) , quand $t \rightarrow +\infty$.

Remarquons que $g_t = \frac{1}{t} g_t^*$, donc (G, g_t) est isométrique à

l'espace homothétique $\frac{1}{t} (G, g_1)$. En fait, le théorème principal est

équivalent à l'énoncé analogue, où G est remplacé par un sous-groupe

discret cocompact Γ , muni des distances homothétiques $\frac{1}{t} d_1$, où d_1

est la distance, invariante à gauche, induite par g_1 sur Γ .

Plus généralement, toute métrique riemannienne sur la nilvariété

compacte $\Gamma \backslash G$ induit sur Γ une distance d invariante à gauche,

et on a encore convergence, lorsque t tend vers l'infini, des homothétiques $(\Gamma, \frac{1}{t} d)$ vers une distance de Carnot-Carathéodory d_∞ sur

G. Seulement, la norme sur le champ de plan H n'est plus euclidienne,

elle reste invariante à gauche. On l'obtient comme suit (1.C) : Le plan

H à l'origine s'identifie à l'espace vectoriel $H_1(\Gamma \backslash G, \mathbb{R})$, lequel

est muni de la norme masse (voir [5]) induite par la métrique riemannienne g.

Volume des boules

Bien que cela ne découle pas formellement de la définition de la convergence de Hausdorff, si (G, \tilde{g}) est le relèvement universel rieman-

nien de la nilvariété compacte (M, g) , $M = \Gamma \backslash G$, le volume des boules

de $(G, \frac{1}{t} \tilde{g})$ converge vers le volume des boules Carnot-Carathéodory,

Théorème (1.1) : Le volume d'une boule de rayon R dans (G, \tilde{g}) est

équivalent à $\text{const.} \cdot R^4$, où la constante, le volume asymptotique,

ne dépend que de la métrique g.

Grâce au lemme de Besicovitch ([13]), on peut comparer le volume

asymptotique de (M, g) à d'autres grandeurs riemanniennes : 1.12.

Géodésiques fermées :

Appelons nombre topologique de géodésiques fermées dans (M, g) le nombre $N(R)$ de classes de conjugaison dans $\Gamma = \pi_1(M, m)$ qui contiennent une courbe fermée de longueur inférieure à R . Alors ce nombre "converge" aussi vers le nombre obtenu pour la métrique d'_∞ .

Théorème (2, G) : Le nombre topologique de géodésiques fermées dans la nilvariété de dimension 3 (M, g) est équivalent à $\text{const. } R^2$.

En effet, dans le cas de la métrique d_∞ , une géodésique fermée c de $\Gamma \setminus G$ se relève en une géodésique \tilde{c} de G , invariante par un élément γ de Γ . Si \tilde{c} est du type droite, alors c est le relèvement horizontal d'une géodésique fermée du tore plat $\mathbb{R}^2/\pi(\Gamma)$, lesquelles sont en nombre $\text{const. } R^2$ (1.38).

Si \tilde{c} est du type hélice, sa projection sur \mathbb{R}^2 est bornée, donc nécessairement, γ est dans le centre de Γ ; ces géodésiques sont encore en nombre $\text{const. } R^2$ (1.37).

Généralisation :

La démonstration du théorème principal se passe essentiellement en dimension 1 : on ne manipule que des courbes, on n'utilise que de l'analyse élémentaire, théorème d'Ascoli, différentiation des fonctions d'une variable. Elle se généralise donc immédiatement aux groupes possédant des dilatations, puis, avec la notion de gradué associé (1.11), à tous les groupes discrets à croissance polynomiale.

Le chapitre 2 est consacré à la démonstration d'une inégalité isopérimétrique, et au développement de ses conséquences formelles.

Théorème (2.2) : Fixons une métrique riemannienne invariante à gauche sur G . Pour tout domaine relativement compact D , à bord lisse, $\text{vol}(D) \ll (12/\pi)^{1/3} (\text{aire}(\partial D))^{4/3}$

Remarque que cette inégalité est plus forte, pour les grands domaines, que celle de l'espace euclidien \mathbb{R}^3 .

Elle est équivalente à l'inégalité limite suivante, relative à la métrique de Carnot-Carathéodory :

$$(21) \quad \mathcal{V}^4(D) \ll (12/\pi)^{1/3} (\mathcal{V}^3(\partial D))^{4/3},$$

cette nouvelle inégalité est invariante par les dilatations δ_t ; sa démonstration se déroule essentiellement en dimension 2.

Oubliant les géodésiques du type hélice, on construit, à l'aide des droites, un flot géodésique sur le fibré unitaire horizontal UH .

Celui-ci préserve la forme volume naturelle sur UH , il en résulte une formule pour le volume d'un domaine, au moyen d'une intégrale sur le bord :

$$2\pi \text{vol}(D) = \int_{\partial D} \left(\int_0^{2\pi} r \cos \theta \, d\theta \right) d\mathcal{V}^3.$$

Après une symétrisation, il vient

$$\text{vol}(D) \ll \int_{\partial D} \mathcal{V}^3(D \cap \Sigma_x) \, d\mathcal{V}^3(x),$$

où la section canonique Σ_x est la réunion des droites passant par x . On termine en invoquant une propriété de minimum : la surface à bord $D \cap \Sigma_x$ a une mesure minimum parmi toutes les surfaces de même bord (en particulier, les deux composantes de $D \cap \Sigma_x$).

Application à l'analyse :

L'inégalité (21) est non triviale même pour les petits domaines. Grâce à la méthode de symétrisation de Faber-Krahn ([32], [37]), il en découle une inégalité de Sobolev, qui permet de majorer une fonction au moyen de la composante horizontale seulement de son gradient. (2.16). Ce résultat améliore le théorème de plongement de Folland-Stein ([34], § 20).

D'un théorème de plongement compact, il résulte que le Laplacien de Kohn $\Delta = -X^2 - Y^2$ a un spectre discret pour problème de Dirichlet dans un ouvert borné quelconque de G . Pour la première valeur propre

λ_1 , nous obtenons la minoration à la Faber-Krahn : (2.20)

$$\lambda_1(D) \geq \left(\frac{4}{3}\pi \text{vol}(D)\right)^{-1/2}.$$

Application aux transformations conformes :

Corollaire 2.29 : Il n'y a pas d'applications quasiconformes de l'espace euclidien \mathbb{R}^3 dans le groupe G muni d'une métrique riemannienne invariante à gauche.

Ce corollaire est à comparer au théorèmes classiques de Liouville et Picard : il n'y a pas d'application holomorphe de C dans un disque ou dans le complémentaire de 2 points, qui ne soit constante.

Plus généralement, Gromov a montré que l'existence d'une inégalité isopérimétrique plus forte que celle de \mathbb{R}^n dans la variété riemannienne complète (M, g) interdisait toute application quasirégulière de \mathbb{R}^n dans M . Voir [10], chap. 6.

Grâce à un autre théorème de Gromov sur les inégalités isopérimétriques, dont nous avons inclus la démonstration (2.20), le corollaire 2.29 se généralise à tous les groupes nilpotents non abéliens.

Signification combinatoire :

Enfin, lorsque qu'une variété riemannienne (M, g) admet un groupe discret cocompact d'isométries Γ , une inégalité isopérimétrique dans (M, g) se reflète en une propriété combinatoire du groupe Γ . ([10], théorème 6.18).

Le théorème 2.2 exprime donc aussi une propriété du groupe $\Gamma \subset G$. En particulier, il se prolonge à tout revêtement universel (\tilde{M}, \tilde{g}) d'une variété compacte M dont le groupe fondamental est isomorphe à Γ .

Au chapitre 3, nous avons rassemblé quelques propriétés de la mesure 3-dimensionnelle \mathcal{H}^3 , la plus remarquable étant la propriété de minimum des sections minimales.

Théorème 3.31 : Soit c une courbe fermée, plongée dans G , telle sa projection $\pi(c)$ dans \mathbb{R}^2 soit encore plongée. Alors la borne inférieure des mesures des surfaces de bord c est toujours positive, elle est atteinte pour une et une seule surface : c'est une section de π , de classe de Sobolev $W^{1,1}$.

L'existence de la section de mesure minimum, de bord c , est obtenue par une méthode directe du calcul des variations (3.23), qui n'a rien d'original. Nous ne savons pas prouver la régularité de cette surface. Le problème de régularité des sections minimales est certainement ardu : D'après 3.44, il existe un ouvert (pour la topologie C^1) de courbes c pour lesquelles la section minimale n'est pas de classe C^3 , et il existe des exemples de courbes lisses pour lesquelles la section minimale est lipschitzienne, mais non de classe C^1 (3.26).

Devant l'échec de l'analyse, pour produire des surfaces minimales lisses, nous proposons une méthode géométrique : les surfaces minimales de classe $C^{1,1}$ sont réglées, i.e., réunions de segments de droites (3.14). En 3.G, nous montrons qu'une courbe générique dans G est, en un sens faible, le bord d'une surface lisse réglée, du type topologique d'un disque ou d'une bande de Möbius. Malheureusement, les surfaces obtenues ne sont même pas immergées en général.

Conformément à la philosophie du chapitre 1, nous espérons que l'étude de des sections minimale. Carnot-Carathéodory permettra de comprendre les grandes surfaces minimales riemanniennes : par exemple (3.36), la propriété de minimum est vraie asymptotiquement pour les sections riemanniennes au-dessus d'une grande boule. Il serait plaisant de pou-

voir montrer, par exemple, qu'une "grande" section minimale riemannienne est, en un certain sens, approximativement réglée.

Chapitre 2 : Inégalités isopérimétriques

La motivation première dans ce chapitre est le résultat suivant :
Un groupe nilpotent de dimension n , muni d'une métrique riemannienne invariante à gauche, n'est quasiconformément équivalent à l'espace euclidien \mathbb{R}^n que s'il est abélien (et donc isométrique à \mathbb{R}^n).

1. Rappelons quelques faits relatifs aux applications quasirégulières.

Définition : Soit (M, g) une variété riemannienne (non nécessairement compacte ni complète). On dit que g a une dimension isopérimétrique au moins égale à p si il existe une constante C telle que, pour tout ouvert relativement compact D de M et tout réel t ,
$$\text{vol}(D) \geq t \text{ entraîne } \text{vol}(\partial D) \geq C t^{p-1/p}.$$

Exemples : La dimension isopérimétrique de l'espace euclidien \mathbb{R}^n est égale à n . La dimension isopérimétrique de l'espace hyperbolique \mathbb{H}^n est infinie. La dimension isopérimétrique du plan \mathbb{C} privé de deux points, muni de la métrique euclidienne, est infinie.

A l'aide d'un lemme d'Ahlfors, M. Gromov a démontré la généralisation suivante des théorèmes de Liouville et Picard sur les fonctions entières d'une variable complexe ([10] § 6.11) :

Théorème : Supposons qu'il existe une application quasi régulière de l'espace euclidien \mathbb{R}^n dans la variété riemannienne (M, g) . Alors la dimension isopérimétrique de g est au plus égale à n .

Nous allons montrer que, si g est une métrique riemannienne invariante à gauche sur un groupe de Lie nilpotent non abélien, de dimension n , sa dimension isopérimétrique est supérieure à n . Il en résultera qu'il n'y a aucune application quasirégulière (et donc quasiconforme)

de \mathbb{R}^n dans le groupe. En fait, il suffit de le faire pour le groupe de dimension 3 .

2. Théorème : Munissons le groupe de Lie nilpotent simplement connexe de dimension 3 (le groupe d'Heisenberg) d'une métrique riemannienne g invariante à gauche. Pour tout ouvert relativement compact D , on a l'inégalité

$$\text{vol}(D) \leq (12/\pi)^{1/3} (\text{vol}D)^{4/3} \cdot \text{Const}(g)$$

L'exposant $4/3$ est optimal, autrement dit, la dimension isopérimétrique du groupe de Heisenberg est égale à 4 . La constante $(12/\pi)^{1/3}$ n'est certainement pas optimale.

3. Suivant la philosophie du chapitre 1, le théorème 2 est une conséquence d'un énoncé analogue relatif à la métrique de Carnot-Carathéodory associée à g . Pour définir le volume des ouverts et des surfaces, nous utilisons la notion de mesure de Hausdorff. Rappelons que ces mesures ne sont définies qu'à un facteur près, d'où la nécessité d'une normalisation.

Fixons des notations. L'algèbre de Lie \mathfrak{g} du groupe de Heisenberg G a un centre \mathfrak{g}^2 de dimension 1. Fixons un vecteur unitaire (pour la métrique donnée g) Z de \mathfrak{g}^2 . Dans le plan H orthogonal à \mathfrak{g}^2 , choisissons une base orthonormée (X, Y) , orientée de façon que le crochet $[X, Y] = tZ$, avec t positif. Ce réel positif t caractérise $g = g_t$ à isométrie près. Notons δ_t l'automorphisme de G dont la matrice dans la base (X, Y, Z) est

$$\begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t^2 \end{pmatrix}$$

Alors $g_t = \frac{1}{t} \delta_t^* g_1$, et les δ_t sont des homothéties pour la distance de Carnot-Carathéodory d_∞ associée au champ de plans invariant à gauche H , muni de la norme g . La distance d_∞ ne dépend pas de t .

Notons $\pi : G \rightarrow G/G^2 = \mathbb{R}^2$; c'est une submersion riemannienne sur

le plan euclidien \mathbb{R}^2 , dont H est la distribution horizontale. Notons dx, dy et w les formes invariantes à gauche sur G , duales des vecteurs X, Y et Z . La forme volume riemannienne attachée à g s'écrit

$$\text{vol} = dx \wedge dy \wedge w .$$

Notons aire la mesure riemannienne induite par g sur les surfaces de classe C^1 dans G ; pour une telle surface S , la norme, relative à la métrique induite par g , de la 1-forme $w|_S$, est une fonction mesurable, bornée par 1, sur S . La formule

$$d\mathcal{H}^3 = |w|_S| \, d \text{aire}$$

définit donc une mesure sur les surfaces de classe C^1 .

4. Au chapitre 3, nous démontrerons la proposition suivante :

Proposition (3.9) La mesure vol est une version de la mesure de Hausdorff 4-dimensionnelle induite par la distance d_∞ . Si S est une surface de classe C^2 dans G , la mesure \mathcal{H}^3 est une version de la mesure de Hausdorff sphérique 3-dimensionnelle induite par la distance d_∞ . Les normalisations choisies satisfont à la formule de la coaire :

Si f est une fonction lipschitzienne, et u une fonction mesurable positive sur G , alors

$$\int_G u \, d \text{vol} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{f=t} u/|hf| \, d\mathcal{H}^3 \right) dt ,$$

où hf désigne la composante horizontale du gradient riemannien de f .

5. La mesure p -dimensionnelle étant, par définition, homogène de degré p par rapport à un groupe d'homothétie, une inégalité entre mesure d'un ouvert et mesure de son bord doit comporter l'exposant $4/3$. En fait

Théorème 2' : Pour tout ouvert relativement compact de G , à bord lisse, on a

$$\text{vol}(D) \leq (12/\pi)^{1/3} (\mathcal{H}^3 \partial D)^{4/3} .$$

Cette inégalité sera démontrée au § 13 ; comme $\mathcal{H}^3 \ll \text{aire}$, elle entraîne aine le théorème 2. Remarquer qu'inversement, l'inégalité 2 entraîne

2'. En effet

6. Lemme : Pour toute surface S dans G , de classe C^2 et d'aire finie, on a $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{-3} \text{aire}(\delta_t S) = \mathcal{H}^3(S)$ en décroissant.

Par hypothèse, la fonction $|w|S|(x) = |w|T_x S|$ est dans $L^1(\mathcal{H}^3)$, et on a $\text{aire}(S) = \int_S |w|T_x S| d\mathcal{H}^3(x)$. Aussi, $\text{aire}(\delta_t S) =$

$t^3 \int_S |w|T_x S| d\mathcal{H}^3$, car \mathcal{H}^3 est homogène sous les δ_t . Or, pour presque tout $x \in S$, la quantité $|w|T_x S|$ tend vers 1 en décroissant,

est majorée par $|w|T_x S|$, donc l'intégrale $\int_S |w|T_x S| d\mathcal{H}^3$ tend vers $\int_S 1 d\mathcal{H}^3$. \square

A. Flot géodésique

7. Les géodésiques de la métrique de Carnot-Carathéodory, i. e., les courbes qui réalisent localement la distance entre leurs extrémités, sont connues, cf [7], [16], mais nous n'avons besoin que des plus simples d'entre elles : les courbes des champs de vecteurs invariants à gauche horizontaux. Elles sont aussi géodésiques pour la métrique riemannienne g

- les relevements horizontaux des droites de \mathbb{R}^2
- les relevements horizontaux des droites de \mathbb{R}^2
- les géodésiques de d_∞ qui minimisent sur toute leur longueur, c'est pourquoi nous les appellerons les droites de G .

Par chaque point de G , et chaque vecteur tangent horizontal, il passe une et une seule droite ; un flot géodésique est donc défini dans le sous-fibré horizontal H . Ce n'est autre que la restriction à H du flot géodésique riemannien, nous le noterons T .

8. Notons α la 1-forme canonique $\alpha = \sum_{i=1}^n \xi_i dx_i$ sur le cotangent T^*G , notons α_g son image dans le tangent TG par l'isomorphisme musical \flat induit par la métrique g , notons \tilde{E} la fonction énergie sur TG :

$E(v) = \frac{1}{2} g(v)$. Le flot géodésique T_g associé à g est le champ de vecteurs sur TG solution de l'équation $i_{T_g} d\alpha_g = -dE$ (cf [29]), ce qui permet de le calculer.

On utilise sur TG les coordonnées (x, y, z, a, b, c) qui désignent le vecteur tangent $ax + by + cz$ au point $\exp(xX + yY + zZ)$; on a

$$\alpha_g = \flat^* \left(\int \xi_i dx_i \right) = adx + bdy + cz, \quad d'ou$$

$$T_g = ax + by + cz + c \left(a \frac{\partial}{\partial b} - b \frac{\partial}{\partial a} \right).$$

Comme $i_{T_g} \alpha_g = 2E$, la dérivée de Lie $\mathcal{L}_{T_g} \alpha_g = dE$, donc la forme désignée au fibré unitaire Ug , est invariante par le flot géodésique riemannien. Par restriction, nous concluons que la 1-forme

$\alpha_\infty = \alpha_g \uparrow_{UH}$ sur le fibré unitaire horizontal UH , est invariante par le flot géodésique Carnot-Carathéodory T . Cela suffit pour construire une forme volume invariante par T sur UH .

9. Notons $d\theta$ la 1-forme $d\theta = -\frac{da}{b} = \frac{db}{a}$ sur le fibré unitaire horizontal UH . Sa restriction à chaque fibre de $UH \rightarrow G$ est une forme volume de la fibre, donc $\text{vol } d\theta$ est une forme volume sur UH .

Proposition (propriété "de Liouville") : La forme volume de UH s'écrit aussi $\text{vol } d\theta = \alpha_\infty \wedge dx_\infty \wedge dy_\infty$, donc est invariante par le flot géodésique.

En effet, calculons $dx_\infty = da \wedge dx + db \wedge dy = (-b d\theta) \wedge dx + ad\theta \wedge dy = d\theta \wedge \alpha'$, où $\alpha' = -bdx + ady$.

Or $\alpha_\infty \wedge \alpha' = (a^2 + b^2) dx \wedge dy = dx \wedge dy$, d'où

$$\alpha_\infty \wedge dx_\infty \wedge dy_\infty = \alpha_\infty \wedge d\theta \wedge \alpha' \wedge dy_\infty = dx \wedge dy \wedge dy_\infty \wedge d\theta = \text{vol } d\theta.$$

Invariance : on a $i_{T_g} \alpha_g = 0$, $i_{T_g} d\alpha_g = -i_{T_g} (dx \wedge dy) = -ady + bdx = -\alpha'$, d'où $d i_{T_g} \alpha_g = -\alpha'$, $(\mathcal{L}_{T_g} \alpha_g) \wedge \alpha_\infty \wedge dx_\infty = 0$. Comme $\mathcal{L}_{T_g} (\alpha_\infty \wedge dx_\infty) = 0$, nous concluons que $\mathcal{L}_{T_g} (\alpha_\infty \wedge dx_\infty) = 0$. \square

10. Suivant Santalo [39], nous déduisons de cette propriété une formule pour le volume d'un ouvert à bord lisse de G .

Corollaire : Soit D un ouvert à bord lisse de G. Notons, pour $x \in \partial D$, $r(x, \theta)$ le plus grand $r \geq 0$ tel que $x \exp(t \cos \theta X + \sin \theta Y) \in D$ pour $t < r$. Notons N le champ de vecteurs sur le bord ∂D qui est, en chaque point, unitaire, horizontal, normal à ∂D , dirigé vers l'intérieur de D ; alors

$$\text{vol}(\text{UH}^3 D) = 2\pi \text{vol}(D) = \int_{\partial D} \int_0^{2\pi} r(x, \theta) g(N, \cos \theta X + \sin \theta Y) d\theta d\mathcal{K}^3(x)$$

Il s'agit d'utiliser le flot géodésique $\phi : \text{UH} \times \mathbb{R} \rightarrow \text{UH}$, $(x, a, b, 0, t) \mapsto (x \exp(t(aX + bY)), a, b, 0)$, restreint à l'hypersurface $\eta = \text{UH}^3 \partial D$, comme système de coordonnées dans l'ouvert $\text{UH}^3 D$, donc de calculer la 4-forme $\phi^* \text{vol} \wedge d\theta$. Clairement, $\phi^* d\theta = d\theta$; il reste à calculer la composante de $\phi^* \text{vol}$ sur une 3-forme dont le produit avec $d\theta$ est non nul, par exemple $\beta \wedge dt$, où β est la 2-forme sur ∂D qu'on intègre pour obtenir la mesure \mathcal{K}^3 . Pour cela, nous pouvons nous restreindre à une section $\partial D \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\tilde{\phi}(x, t) = \phi(x, a, b, t) = x \exp(t(aX + bY))$. Remarquons que la formule de la coaire a signifié que, pour toute équation locale f de ∂D , on a $\text{vol} = \beta \wedge \frac{df}{|df|}$. Posons, pour $y \in G$ proche de ∂D , $f(y) = t$ si $y \exp(-t(aX + bY)) \in \partial D$. On a donc

$$\tilde{\phi}^* \text{vol} = \beta \wedge \frac{dt}{|df|}$$

Comme f est nulle sur ∂D , le gradient df est normal à ∂D , d'où $hf = |hf| N$. Or $1 = \frac{d}{dt} f(x \exp(t(aX + bY)))|_{t=0} = g(hf(x), aX + bY) = |hf| g(N, aX + bY)$; il vient donc, en tout point $(x, 0) \in \partial D \times \mathbb{R}$,

$$\tilde{\phi}^* \text{vol} = \beta \wedge g(N, aX + bY) dt$$

$$\phi^* \text{vol} \wedge d\theta = g(aX + bY, N) \beta \wedge dt \wedge d\theta$$

Ferions, sur $\eta \times \mathbb{R}$, $\phi^* \text{vol} \wedge d\theta = J(x, a, b, 0, t) g(N, aX + bY) \beta \wedge dt \wedge d\theta$. L'invariance de la forme $\text{vol} \wedge d\theta$ par le flot géodésique $\tau = \phi^* \frac{\partial}{\partial t}$ se traduit par $\frac{\partial J}{\partial t} = 0$, donc $J = J(x, a, b, 0, 0) = 1$. Enfin, ϕ est un difféomorphisme de l'ouvert $V = \{(x, \theta) / 0 < t < r(x, \theta)\}$ dans $\eta \times \mathbb{R}$ sur $\text{UH}^3 D$, donc

$$2\pi \text{vol}(D) = \int_{\text{UH}^3 D} \text{vol} \wedge d\theta = \int_V g(N, aX + bY) d\theta \wedge \beta = \int_{\eta} g(N, aX + bY) r(x, \theta) d\theta \wedge \beta = \int_0^{2\pi} \int_{\partial D} g(aX + bY, N) r(x, \theta) d\theta d\mathcal{K}^3(x) \quad \square$$

B. Sections canoniques

11. Soit x un point de G ; sa section canonique est la réunion des droites qui passent par x . C'est l'image par la translation à gauche par x de la section canonique à l'origine $\Sigma_1 = \{\exp(ax + by) / a, b \in \mathbb{R}\}$, elle-même image de la section $s_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow G$, $(x, y) \mapsto \exp(xx + yY)$. Au moyen des coordonnées polaires (r, θ) sur \mathbb{R}^2 , la mesure \mathcal{K}^3 s'écrit $s_1^* \mathcal{K}^3 = \frac{1}{2} r^2 dr \wedge d\theta$. Les sections canoniques possèdent une remarquable propriété de minimum :

12. Proposition : Soit Ω un ouvert relativement compact, à bord lisse, de \mathbb{R}^2 , soit $U = s_1(\Omega)$. Si une surface lisse V dans G a même bord que U , alors $\mathcal{K}^3(V) \geq \mathcal{K}^3(U)$.

La fonction $\rho = r \circ \pi$ sur G a un gradient unitaire ; par conséquent, $\mathcal{K}^3(V) = \int_V |\omega| |V| d\text{aire} \geq \int_V |\omega| |V \wedge d\rho| d\text{aire} \geq \int_U d\rho \wedge \omega = \int_U d\rho \wedge \omega = \int_{\Omega} dr \wedge s_1^* \omega = \int_{\Omega} \frac{1}{2} r^2 dr \wedge d\theta = \mathcal{K}^3(U)$. On a utilisé le fait que $d(\rho \wedge \omega) = -t dx \wedge dy \wedge d\rho = 0$ et la formule de Stokes. \square

Remarque : Cette propriété est partagée par toutes les sections réglées, i.e., qui sont réunion de droites (voir 3.31).

13. Fin de la démonstration de l'inégalité 2'

Fixons un ouvert D de G, relativement compact, à bord lisse. Afin d'exploiter la formule 10, nous allons majorer l'intégrand $\int_0^{2\pi} g(N, X \cos \theta + Y \sin \theta) r(x, \theta) d\theta$; remplaçons le produit scalaire par 1 (ce qui enlève tout espoir d'obtenir une constante optimale dans 2'). Notons (r, β) les coordonnées polaires centrées sur la projection

du point x de ∂D dans \mathbb{R}^2 , notons (ρ, ϕ) les fonctions induites sur G . Notons P l'ouvert de $\mathbb{L}_x \cap D$ visible de x , i.e.,

$$P = \{s_x(r, \theta) / \forall t < r, s_x(t, \theta) \in D\}.$$

Alors $\int_0^{2\pi} r(x, \theta) d\theta = \int_P \rho d\phi = 2 \int_P \rho^{-2} \frac{1}{2} \rho^2 d\rho \wedge d\phi = 2 \int_P \rho^{-2} d\mathcal{H}^3$.

Or l'intégrale $\int_P \rho^{-2} d\mathcal{H}^3$ ne peut qu'augmenter si on remplace P par la boule $B = \{y \in \mathbb{L}_x / \rho(y) < R\}$ dans \mathbb{L}_x , de même mesure 3-dimensionnelle que P ; par conséquent,

$$\int_P \rho^{-2} d\mathcal{H}^3 \leq \int_B \rho^{-2} d\mathcal{H}^3 = 2\pi R = 2\pi \left(\frac{3}{\pi}\mathcal{H}^3(P)\right)^{1/3}.$$

Nous remarquons que \mathbb{L}_x partage ∂D en deux surfaces V_1 et V_2 de même bord que $U = \mathbb{L}_x \cap D$, donc, d'après la proposition 12, on a

$$2 \mathcal{H}^3(P) \leq 2 \mathcal{H}^3(U) \leq \mathcal{H}^3(V_1) + \mathcal{H}^3(V_2) = \mathcal{H}^3(\partial D).$$

Enfin, de la formule 10, il vient

$$\begin{aligned} \text{vol}(D) &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} 4\pi \left(\frac{3}{2\pi}\mathcal{H}^3(\partial D)\right)^{1/3} d\mathcal{H}^3 \\ &\leq (12/\pi)^{1/3} (\mathcal{H}^3(\partial D))^{4/3}. \quad \square \end{aligned}$$

C. Une autre inégalité

14. Dans le même ordre d'idées, donnons une inégalité isopérimétrique pour les domaines contenus dans un cylindre.

Rappelons que, si C est un cylindre dans l'espace euclidien \mathbb{R}^n , i.e., un produit $\mathbb{R} \times B$, où B est un domaine borné d'un hyperplan, on a l'inégalité linéaire

$$\text{vol}(D) \leq \text{const.}(C) \text{vol}(\partial D)$$

pour les ouverts bornés de C .

Proposition : Si D est un ouvert borné à bord lisse du groupe G , et A un ouvert de \mathbb{R}^2 , alors

$$\text{vol}(D \cap \pi^{-1}A) \leq 1/\sqrt{\pi} (\text{vol } A)^{1/2} \mathcal{H}^3(\partial D).$$

Considérons la projection P sur la fibre à l'origine, le long des

droites qui la rencontrent. Précisément, soit p l'application de G dans $C = \{x \in G / d(x, \pi^{-1}(0)) = 1\}$, donnée en coordonnées cylindriques par $(r, \theta, z) \mapsto (1, \theta, z)$.

Cette projection préserve les directions horizontales (ce qui est faux pour les projections radiales), donc elle diminue les aires Carnot-Carathéodory.

Calculons son jacobien riemannien. Nous remarquons que l'élément d'aire $d\theta \wedge dz$ sur C coïncide avec $d\theta \wedge \omega$; il s'agit donc de calculer, pour une surface S , et un $x \in S$, le rapport $|\partial\theta \wedge \omega|_x^T S| / |\partial\theta \wedge \omega|_x^T P(x)C|$.

Or $|\partial\theta \wedge \omega|_x^T C| = 1$ pour tout plan tangent à C ; on a donc

$$J_P(x) = |\partial\theta \wedge \omega|_x^T S| \leq |\omega|_x^T S|,$$

d'où $\mathcal{H}^3(p(S)) = \text{aire}(p(S)) = \int_S J_P(x) d\text{aire} \leq \int_S |\partial\theta \wedge \omega|_x^T S| d\mathcal{H}^3(x)$

$$\leq \int_S |\partial\theta| d\mathcal{H}^3 \leq \int_S r^{-1} d\mathcal{H}^3.$$

Faisons varier la fibre $\pi^{-1}(a)$, et intégrons sur A :

$$\begin{aligned} \int_A \mathcal{H}^3(p_a(S)) da &\leq \int_A \left(\int_S |a - \pi(y)|^{-1} d\mathcal{H}^3(y)\right) da \\ &= \int_S \left(\int_A |a - \pi(y)|^{-1} da\right) d\mathcal{H}^3(y). \end{aligned}$$

A y fixé, notons $r = |a - \pi(y)|$. L'intégrale de r^{-1} ne peut qu'augmenter si, dans le plan euclidien, on remplace A par la boule de même aire; par conséquent, $\int_A r^{-1} da \leq \int_{B(R)} r^{-1} da = 2\pi R$. Or $\text{aire}(B(R)) = \text{aire}(A) = \pi R^2$, donc $\int_A r^{-1} da \leq 2\sqrt{\pi} (\text{vol } A)^{1/2}$. D'où

$$\int_A \mathcal{H}^3(p_a(S)) da \leq 2\sqrt{\pi} \text{vol}(A) \mathcal{H}^3(S).$$

Si S est le bord d'un ouvert borné D , et si $a \in \pi(D)$, notons $h(a)$ l'intégrale de ω sur le segment de fibre $D \cap \pi^{-1}(a)$. En chaque point de ce segment, on voit D tout autour, i.e., chaque droite rencontre ∂D ; par conséquent, $\mathcal{H}^3(p_a(\partial D)) \geq 2\pi h(a)$. Comme la forme vol est $\pi^* da \wedge \omega$, nous concluons que

$$2\pi \text{vol}(D \cap \pi^{-1}A) = \int_A 2\pi h(a) da \leq 2\sqrt{\pi} \text{vol}(A) \mathcal{H}^3(\partial D). \quad \square$$

D. Application de l'inégalité 2' à l'analyse
1/ Inégalités de Sobolev

15. En utilisant la méthode de symétrisation de Faber-Krahn, nous allons tirer une inégalité de Sobolev de l'inégalité isopérimétrique 2'. Le raisonnement, purement formel, repose sur la formule de la coaire \mathcal{H}^4 , et le fait que, à une constante près, 2' est formellement identique à l'inégalité isopérimétrique classique de l'espace euclidien \mathbb{R}^4 .

Proposition : Pour tous réels p, q tels que $1 \leq p \leq q < +\infty$, et $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \leq \frac{1}{4}$, pour toute fonction lisse u à support dans un domaine borné D de G , on a l'inégalité

$$\left(\int_D u^q \right)^{1/q} \leq C_{p,q} (\text{vol } D)^{1/4} - 1/p + 1/q \left(\int_D |hu|^p \right)^{1/p}$$

où hu est la composante horizontale du gradient de u .

Remarque : La constante $C_{p,q} = (1 + q(p-1)/p)(12/\pi)^{-1/4}$ n'est pas optimale.

Nous pouvons supposer que la fonction u est positive dans D .

Associations à u une fonction v sur \mathbb{R}^4 , qui ne dépend que de la distance à l'origine, par la condition $\text{vol } \{v \geq t\} = \text{vol } \{u \geq t\}$.

Les surfaces de niveau de v étant des sphères, on a pour tout $t > 0$,

$$\text{vol } \{v \geq t\} = (8\pi)^{-2/3} \text{vol } \{v = t\}.$$

Par la formule de la coaire \mathcal{H}^4 , puiselle dans \mathbb{R}^4 , on a

$$\begin{aligned} \int_D |hu| &= \int_{\mathbb{R}^4} \mathcal{H}^3 \{u=t\} dt \geq (\pi/12)^{1/4} \int_{\mathbb{R}^4} (\text{vol } \{u>t\})^{3/4} dt \\ &= (\pi/12)^{1/4} \int_{\mathbb{R}^4} (\text{vol } \{v>t\})^{3/4} dt \\ &= (768 \pi)^{-1/4} \int_{\mathbb{R}^4} (\text{vol } \{v=t\})^{3/4} dt \\ &= (768 \pi)^{-1/4} \int_{\mathbb{R}^4} |\text{grad } v|. \end{aligned}$$

D'autre part, notons $F(t) = \int_t^{+\infty} (\int_{u=t} |hu|^{-1} d\mathcal{H}^3) dt$. Alors

$F(t) = \text{vol } \{u>t\} = \text{vol } \{v>t\}$, donc, pour tout réel p , et par passage

à la limite, pour $p = +\infty$, $\int_D u^p = \int_{\mathbb{R}^4} t^p \frac{dF}{dt} dt = \int_{\mathbb{R}^4} v^p$.

Par conséquent, l'inégalité de Sobolev classique

$$\left(\int_{\mathbb{R}^4} v^{4/3} \right)^{3/4} \leq 1/\sqrt{8\pi} \int_{\mathbb{R}^4} |\text{grad } v|$$

se décalque en $\left(\int_D u^{4/3} \right)^{3/4} \leq (12/\pi)^{-1/4} \int_D |hu|$.

Par l'inégalité de Hölder, il vient, pour tout $q \leq \frac{4}{3}$,

$$\left(\int_D u^q \right)^{1/q} \leq (12/\pi)^{-1/4} (\text{vol } D)^{3/4} - 1/q \int_D |hu|.$$

Appliquons cette dernière inégalité à la fonction u^λ , où $\lambda =$

$1 + q(p-1)/p$; utilisant de nouveau l'inégalité de Hölder, il vient

$$\left(\int_D u^q \right)^{1/q} \leq \left(\int_D |hu|^p \right)^{1/p} (12/\pi)^{-1/4} (\text{vol } D)^{1/p-1/q-1/4} \lambda$$

pourvu que l'exposant de $\text{vol}(D)$ soit positif ou nul. \square

16. Théorèmes de Plongement

Introduisons les normes $\| \cdot \|_{1,p}$, $\| \cdot \|_{1,p}^c$ pour les fonctions lisses

à support dans D :

$$\begin{aligned} \|u\|_{1,p} &= \left(\int_D |u|^p \right)^{1/p} + \left(\int_D |\text{grad } u|^p \right)^{1/p} \\ \|u\|_{1,p}^c &= \left(\int_D |u|^p \right)^{1/p} + \left(\int_D |hu|^p \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Quand on complète les fonctions lisses à support compact dans D

pour ces deux normes, on obtient respectivement l'espace de Sobolev ordinaire $W_{1,p}^1(D)$ et l'espace de Folland-Stein $S_{1,p}^1(D)$ (comparer à [34], § 17).

Clairement, $W_{1,p}^1(D) \subset S_{1,p}^1(D)$; cette inclusion est stricte: on vérifie

aisément que, si d est la fonction distance Carnot-Carathéodory à un point de D , multipliée par une fonction plateau convenable, alors

$$d^\alpha \in W_{1,p}^1(D) \iff \alpha > 2 - 4/p, \text{ et } d^\alpha \in S_{1,p}^1(D) \iff \alpha > 1 - 4/p.$$

Proposition : Si $\frac{1}{q} \geq \frac{1}{p} - \frac{1}{4}$, on a l'inclusion $S_{1,p}^1(D) \subset L^q(D)$. En particulier, si $p \geq 4$, $S_{1,p}^1(D) \subset C^0(D)$. Si $\frac{1}{q} > \frac{1}{p} - \frac{1}{4}$, l'inclusion $S_{1,p}^1(D) \subset L^q(D)$ est compacte.

Les inclusions résultent des inégalités de Sobolev 15; la compacité

se démontre comme dans [35], page 160, en remplaçant distance euclidienne, droites et gradient par distance Carnot-Carathéodory et composante horizontale du gradient. \square

Les inclusions 16 ont été déjà obtenues par Folland-Stein ([34] § 20), si $\frac{1}{q} > \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$; seul le cas $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{q}$ est nouveau.

E. Application de l'inégalité 2' à l'analyse

2/ Laplacien de Kohn

17. L'in rapport avec des problèmes d'analyse complexe, Kohn, Koranyi, Folland, Greiner, Stein, Jerison et autres ont étudié le "laplacien de Kohn" $\Delta = -X^2 - Y^2$.

Le laplacien ordinaire relatif à la métrique riemannienne g invariante à gauche est $P = -X^2 - Y^2 - Z^2$; il est fortement elliptique, il contrôle les dérivées secondes, en ce sens qu'on a, pour $u \in W_{loc}^{2,p}(D)$,

$$\|u\|_{2,p} \leq \text{const.} \|Pu\|_p.$$

L'opérateur Δ oublie les dérivées dans la direction verticale Z , et il n'est pas elliptique; il est cependant hypoelliptique, c'est-à-dire si u est une distribution, et si $\Delta u \in C^\infty$, alors $u \in C^\infty$. Cela provient du fait que Δ contrôle les dérivées secondes dans les directions horizontales, et de la relation $Z = XY - YX$.

Précisément, si $X_i, X_j \in \{X, Y\}$, et si u est une fonction C^∞ à support compact dans D, J . Kohn ($p=2$) et Folland-Stein montrent que

$$\begin{aligned} \|X_i X_j u\|_p &\leq \text{const}(D) \| \Delta u \|_p \\ \|X_i u\|_p &\leq \text{const}(D) \| \Delta u \|_p \\ \|u\|_p &\leq \text{const}(D) \| \Delta u \|_p. \end{aligned} \quad (\text{Voir [34]})$$

Il en résulte la régularité des solutions faibles de l'opérateur Δ .

18. Formule de la divergence :

Soit T un champ de vecteurs lisse sur l'ouvert D du groupe de Heisenberg. La divergence, relative à la métrique riemannienne g , est

une fonction sur D : si D désigne la connexion de Levi-Civita, alors $\text{div } T = -\text{tr } DT$.

La formule de la divergence est : si T est à support dans l'ouvert D , alors $\int_D \text{div } T = 0$.
Son intérêt pour nous provient de la relation $\Delta u = \text{div } hu$.

Lemme : Si u est une fonction lisse, et T un champ de vecteurs lisse, alors $\text{div } uT = u \text{div } T - g(\text{grad } u, T)$

En particulier, posant $T = hv$, nous obtenons, si u ou v a un support compact dans D , $\int_D u \Delta v = \int_D g(hu, hv) = \int_D v \Delta u$.

Remarque : De la formule de la divergence, on peut aussi déduire cette identité : $\int_D \Delta u^2 + 2\langle \nabla u, \nabla u \rangle = \int_D |h^2 u|^2$, où $h^2 u$ désigne la forme quadratique $T \rightarrow T^2 u$ sur le plan horizontal.

19. Théorie spectrale pour le problème de Dirichlet

L'espace naturellement commode pour étudier le problème de Dirichlet pour Δ est l'espace de Folland-Stein $S_1^2(D)$. C'est un espace de Hilbert. Si u, v sont des fonctions lisses sur D , v à support compact dans D , et si $f = \Delta u + u$, alors

$$\int_D v \Delta u + \int_D v u = \int_D g(hu, hv) + \int_D uv = \langle u, v \rangle;$$

d'où, pour tout $v \in S_1^2(D)$, $\int_D f v = \langle u, v \rangle$.
On dit que $u \in S_1^2(D)$ est une solution faible de l'équation $\Delta u + u = f$ si, pour tout $v \in S_1^2(D)$, $\int_D f v = \langle u, v \rangle$.

Pour toute fonction $f \in L^2(D)$, il existe une solution unique $u = Gf$ dans $S_1^2(D)$: en effet, la forme linéaire $v \mapsto \int_D f v$ est continue sur $S_1^2(D)$, car $|\int_D f v| \leq \|f\|_2 \|v\|_2 \leq \|f\|_2 \|v\|_{1,2}^C$.

Pour $u = Gf$, on a $\|u\|_{1,2}^C = \sup \langle u, v \rangle / \|v\|_{1,2}^C \leq \|f\|_2$, donc l'opérateur $G : L^2(D) \rightarrow S_1^2(D)$ est continu.

Composant avec le plongement compact $S_1^2(D) \rightarrow L^2(D)$, nous obtenons

un opérateur compact G ; il a une théorie spectrale : ses valeurs propres forment une suite ν_i tendant vers 0 . Le laplacien Δ est auto-adjoint, il en est de même de G , donc les ν_i sont réelles ; d'autre part, $\int_D u Gu = \langle u, u \rangle > 0$ si $u \neq 0$, donc les ν_i sont positives.

On peut les classer en une suite décroissante $\nu_1 \geq \nu_2 \geq \dots$. Chacune est de multiplicité finie, et $\nu_1 = \|G\|$. Il existe une base hilbertienne de fonctions propres, i.e., des fonctions ϕ_i telles que, pour toute fonction $f \in S_1^2(D)$, $f = \sum_{i=1}^{\infty} \langle f, \phi_i \rangle \phi_i$, et $Gf = \sum_{i=1}^{\infty} \langle f, \phi_i \rangle \nu_i \phi_i$.

Par la théorie de la régularité (§ 17), les fonctions propres sont lisses (les fonctions propres de G des fonctions propres faibles de) donc sont solutions de l'équation $\Delta \phi_i = \lambda_i \phi_i$, avec $\lambda_i = \nu_i^{-1} - 1$. Les valeurs propres λ_i de Δ forment une suite croissante. Enfin, si

u est une fonction lisse à support compact dans D , posons $f = \Delta u + u$; alors $f \in L^2(D)$, et $Gf = u$; par conséquent, comme f s'écrit $\sum_{i=1}^{\infty} \langle f, \phi_i \rangle \phi_i$, la fonction $u = Gf$ admet une représentation $u = \sum_{i=1}^{\infty} u_i \phi_i$ où $u_i = \nu_i^{-1} \langle f, \phi_i \rangle = \int_D u \phi_i$; on a $\Delta u = f - u = \sum_{i=1}^{\infty} \langle f, \phi_i \rangle (\nu_i^{-1} - 1) \phi_i$

donc $\Delta u = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i u_i \phi_i$, série convergente dans $L^2(D)$; c'est la décomposition spectrale de Δ .

20. Proposition : La première valeur propre λ_1 du problème de Dirichlet pour Δ sur un domaine borné D satisfait

$$\lambda_1 = \inf_{u \in S_1^2(D)} \frac{\|hu\|_2^2}{\|u\|_2^2} \geq \left(\frac{4}{3}\pi \text{vol}(D)\right)^{-1/2}.$$

Soit $u \in S_1^2(D)$; supposons qu'il existe f telle que $Gf = u$; par définition, $\int_D fu = \int_D |hu|^2 + \int_D u^2$; écrivons $f = \sum f_i \phi_i$, il vient $\|hu\|_2^2 = \langle f, u \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \nu_i f_i^2 - \sum_{i=1}^{\infty} \nu_i^{-1} f_i^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i (\nu_i f_i)^2 \geq \lambda_1 \left(\sum_{i=1}^{\infty} (\nu_i f_i)^2\right)^2 = \lambda_1 \|u\|_2^2$. La fonction $u \mapsto \|hu\|_2^2 / \|u\|_2^2$ est continue sur $S_1^2(D)$, l'inégalité annoncée résulte donc de la densité de l'image de G (qui contient C^∞). Il y a égalité pour $u = \phi_1$, la deuxième inégalité provient

de 15. \square

F. Dimension isopérimétrique des groupes nilpotents de dimension supérieure

A défaut de démontrer que la dimension isopérimétrique d'un groupe nilpotent coïncide avec sa dimension homogène, nous allons montrer qu'elle est strictement supérieure à sa dimension de variété, ce qui est suffisant pour l'application que nous envisageons aux transformations conformes.

Le principal intérêt de ce paragraphe est de donner une démonstration du théorème suivant, dû à Gromov, et non publié.

20. Notons \dim_I la dimension isopérimétrique.

Théorème: Soit $M + B$ une submersion riemannienne, à fibres minimales. Supposons que, dans chaque fibre, on ait l'inégalité isopérimétrique $\text{vol}(D) \leq c (\text{vol } \partial D)^{f/f-1}$ avec une constante c uniforme. Alors $\dim_I(M) \geq \dim_I(B) + f$.

Nous procédons par symétrisation, en symétrisant à la fois la fibre (qui devient un espace euclidien \mathbb{R}^f), le domaine D borné de M (qui prend une symétrie de révolution), et la submersion (qui devient un produit $B \times \mathbb{R}^f \rightarrow B$).

Introduisons quelques notations, pour un domaine borné D dans la variété riemannienne M . Notons $h(b) = \text{vol}(D \cap F_b)$, où F_b désigne la fibre en b , $F_b = p^{-1}(b)$. Notons J_p le jacobien ($\dim M - 1$)-dimensionnel de la restriction de p à ∂D , notons $K(b) = \text{vol}(\partial D \cap F_b)$ et $g(b) = \int_{\partial D \cap F_b} |J_p|^{-1} df$. Alors $\text{vol}(D) = \int_B h(b) db$, $\text{vol}(\partial D) = \int_B g(b) db$. Notons enfin $n =$

dim B, m = dim M.

Calculons le jacobien J_p. Pour un vecteur z tangent à B en b, soit z* son relèvement horizontal au point x de \mathbb{R}^D .

Fixons un vecteur unitaire v normal à $\partial D \cap F_D$ dans F_D. Pour tout réel t, le vecteur z* + tv est normal à $\partial D \cap F_D$, donc il existe exactement une valeur de t telle que z* + tv soit tangent à ∂D .

Si \bar{v} est un vecteur normal à ∂D , on a $t = \alpha(z) = - \langle z^*, \bar{v} \rangle / \langle v, \bar{v} \rangle$ donc α_x est une forme linéaire sur T_D^B.

Soit x₁, ..., x_{m-n-1} une base orthornormée de T_x $\partial D \cap F_D$; soit z₁, ..., z_n une base orthornormée de T_D^B; alors la norme du jacobien de p est l'inverse de la norme du (m-1)-vecteur

$$\begin{aligned} & x_1 \wedge \dots \wedge x_{m-n-1} \wedge (\alpha(z_1^*) \vee) \wedge \dots \wedge (\alpha(z_n^*) \vee) \\ &= x_1 \wedge \dots \wedge x_n^* + \sum_{i=1}^n (-1)^i x_1 \wedge \dots \wedge x_{m-n-1} \wedge z_i^* \wedge \dots \wedge z_n^* \wedge \alpha_x(z_i^*) \vee \end{aligned}$$

Par conséquent, $|\nu_D|^{-1} = (1 + |\alpha_x|^2)^{1/2}$, au point x $\in \partial D$.

Dans le cas où M est le produit B x R^f, et où le domaine est de la forme D* = $\bigcup_{b \in B} B(0, R(b))$, on a, pour tout x $\in \partial D^* \cap F_D$,

$$\begin{aligned} \alpha_x &= dR; \\ d^0 \text{ où la relation } g &= \int_{\partial D} \Omega_{F_D} (1 + |dR|^2)^{1/2} = K(1 + |dR|^2)^{1/2}. \\ \text{Dans ce cas, on a } h(b) &= c_f R(b)^f, \text{ soit } dh = f c_f R^{f-1} dr = K dr \\ d^0 \text{ où l'identité } g^2 &= K^2 + |dh|^2. \end{aligned}$$

21. Scholie : Si les fibres de M + B sont minimales, alors $g^2 \geq K^2 + |dh|^2$.

Fixons un vecteur z $\in T_D B$, et calculons dh(z). Prolongeons z en un champ de vecteurs, de flot ϕ_t . Restreignons la submersion riemannienne à la courbe ϕ_t , ce qui nous ramène au cas où dim B = 1. L'hypothèse des fibres minimales signifie que le flot ψ_t du champ z* préserve le volume des fibres. Il s'agit donc de calculer $dh(z) = \frac{d}{dt} \text{vol}(D_t^*)$

où D_t = $\psi_t^{-1}(D \cap F_t)$. Remarquons que z* + $\alpha_x(z) \vee$ est un champ de vecteurs sur ∂D ; soit X_t son flot; alors $\partial D_t = X_t(\partial D_0)$. Au premier ordre, la famille d'immersions $\psi_t^{-1} \circ X_t : \partial D_0 + F_0$ coïncide avec le flot ξ_t du champ de vecteurs (z* + $\alpha_x(z) \vee$) - z* = $\alpha_x(z) \vee$, donc $\frac{d}{dt} \text{vol}(D_t^*) = \frac{d}{dt} \text{vol}(D_0 + t \alpha_x(z) \vee) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \text{vol} \{x + s \alpha_x(z) \vee / 0 < s < t\} = \int_{\partial D_0} \alpha_x(z)$, car v est unitaire, normal à ∂D_0 .

Nous avons donc obtenu l'expression $dh = \int_{\partial D} \Omega_{F_D} \alpha_x$, qu'il faut comparer à $g = \int_{\partial D} \Omega_{F_D} (1 + |\alpha_x|^2)^{1/2} dx$.

La mesure dx/K, sur la fibre F_D, est de masse totale 1; comme la fonction $u + \sqrt{1 + |u|^2}$ est convexe sur T_D^B, nous pouvons appliquer l'inégalité de Jensen

$$(1 + \int_{\partial D} \Omega_{F_D} \alpha_x dx / K)^2)^{1/2} \leq \int_{\partial D} \Omega_{F_D} (1 + |\alpha_x|^2)^{1/2} \frac{dx}{K}$$

soit $K^2 + |dh|^2 \leq g^2$. □

22. Fin de la démonstration du lemme de Gromov.

Etant donné un domaine borné D dans M, construisons un symétrisé D* dans R^f x B comme suit : pour b $\in B$, soit R(b) le réel tel que la boule B(0, R(b)) dans l'espace euclidien R^f ait un volume égal à h(b) = vol(D $\cap F_D$); posons $D^* = \bigcup_{b \in B} B(0, R(b))$.

Notons h*, g*, K* les intégrales relatives à D*. Alors, par construction, h* = h, K* = c_f h*(f-1/f), où c_f est la constante isopérimétrique de R^f.

Par l'hypothèse isopérimétrique sur les fibres, on a $h \leq c K^{f/f-1}$, d'où $K^* \leq c_f c^{f/f-1} K$. Avec la scholie 21, il vient $g^{*2} = |dh^*|^2 + K^{*2} \leq |dh|^2 + (c_f c^{f/f-1})^2 K^2 \leq c'^2 g^2$,

d'où vol(∂D^*) $\leq c' \text{vol}(\partial D)$, alors que vol(D*) = vol(D). Une inégalité isopérimétrique sur R^f x B entraîne donc la même inégalité, à la constante c' = sup {1, (1 + c_f² c^{2f/f-1})^{1/2}} près, sur M.

Enfin, la submersion riemannienne R^f x B + R^f a ses fibres minimales,

nous pouvons donc appliquer de nouveau la symétrisation, comparer le domaine D^* à un domaine borné de $\mathbb{R}^f + \dim_1(B)$. \square

23. Lemme : Soit $1 + K + G + H + 1$ une extension de groupes nilpotents. Pour toute métrique riemannienne invariante à gauche $\frac{SH}{H}, G_1$, il existe une métrique invariante sur H telle que $G + H$ soit une submersion riemannienne à fibres minimales, isométriques entre elles.

La métrique invariante à gauche g sur G est déterminée par le produit scalaire $g(1)$ à l'origine. Soit p le supplémentaire orthogonal de $T_1 K$ dans $T_1 G$; il s'envoie bijectivement sur $T_1 H$, donc le produit scalaire $g(\cdot)|_p$ induit une métrique invariante à gauche h sur H . La forme volume v_g associée à $g(1)$ sur $T_1 G$ s'écrit

$$v_g = v_K \wedge v_H,$$

en translatant à gauche, on obtient l'identité $\text{vol}_g = v_K \wedge \pi^* \text{vol}_h$, où la forme invariante v_K sur G est, restreinte à chaque fibre, la forme volume de la fibre.

Minimalité des fibres : soit z un vecteur tangent à H ; prolongeons le en un champ invariant à gauche Z sur H ; son relèvement horizontal Z^* est un champ invariant à gauche de G (car la distribution horizontale de $G + H$ est elle-même invariante à gauche). Les flots de Z et Z^* sont constitués de translations à droite, qui préservent les formes volumes vol_h et vol_g , car un groupe de Lie nilpotent est unimodulaire. La forme $v' = \int_{Z^*} v_K$ satisfait donc l'équation $\text{vol}_g = v' \wedge \pi^* \text{vol}_h$, ce qui entraîne que sa restriction à chaque fibre coïncide avec celle de v_K . Par conséquent, les champs Z^* préservent le volume des fibres, donc celles-ci sont minimales. \square

24. Définition : Le "nombre de sous-groupes de dimension 3" dans un groupe nilpotent G , est le nombre $\text{III}(G)$, défini par les axiomes suivants :

III est la plus petite fonction à valeurs entières sur les groupes nilpotents telle que

(i) $\text{III}(G) = 0$ si G est abélien,

(ii) $\text{III}(G) = 1$ si G est le groupe de Heisenberg de dimension 3,

(iii) Dans une extension $1 + K + G + H + 1$, on a

$$\text{III}(G) \geq \text{III}(K) + \text{III}(H).$$

26. Lemme : Pour tout groupe nilpotent G non abélien, on a $\text{III}(G) \geq 1$. En effet, si G n'est pas abélien, il en est de même de $H = G/G^3$.

Si x, y sont deux éléments de H qui ne commutent pas, alors le sous-groupe K engendré par x, y et H^2 ne l'est pas non plus. Enfin, le sous-groupe K' de K engendré par x et y est distingué, isomorphe au groupe d'Heisenberg de dimension 3; des extensions

$$1 + G^3 + G + H + 1$$

$$1 + K + H + H/K + 0$$

$$1 + K' + K + K/K' + 0,$$

il résulte que $\text{III}(G) \geq \text{III}(K') = 1$. \square

27. Proposition : Si G est un groupe de Lie nilpotent, non abélien, 1-conexe, de dimension n , alors toute métrique invariante sur G a une dimension isopéri-métrique au moins égale à $n + 1$.

En effet, la fonction $\dim_1 - n$ satisfait aux axiomes de la définition 24, donc $\dim_1 - n \geq \text{III} \geq 1$ pour un groupe non abélien. \square

28. Remarque : L'exposant $n+1$ obtenu dans la proposition 27 est optimal dans le cas des groupes de Heisenberg (dont le centre est de dimension 1). On peut donc leur étendre les résultats des parties D et E. Fn revanche, pour les autres groupes, l'exposant optimal est certainement la dimension homogène.

G. Propriétés conformes des groupes nilpotents

29. Théorème : Soit G un groupe de Lie nilpotent, simplement connexe ou non, non abélien. Munissons G d'une métrique riemannienne invariante à gauche. Alors il n'existe pas d'application quasirégulière de l'espace euclidien R^n de même dimension dans G ; en particulier, G n'est pas quasiconformément équivalent à R^n .

Cela résulte de 27 et du théorème de Liouville-Picard-Ahlfors-Gromov, cité au § 1. \square

30. Remarque : Du point de vue de la dimension isopérimétrique, les groupes nilpotents de dimension n apparaissent en position intermédiaire entre l'espace euclidien R^n et l'espace hyperbolique H^n . Le théorème de LPAG ne permet pas de conclure à la non-existence d'applications quasiconformes d'un groupe nilpotent dans H^n .

H. Une propriété combinatoire des groupes discrets nilpotents.

35. Définition : (voir [10]) Soit Γ un groupe discret de type fini, soit S un système générateur symétrique de Γ . Si A est une partie finie de Γ , le bord de A est $\partial A = A \cap (AS \setminus SA)$.

Par le théorème 6.18 de [10], la proposition 27 entraîne la propriété combinatoire suivante pour les groupes discrets :

36. Proposition : Soit Γ un sous-groupe discret cocompact d'un groupe de Lie nilpotent, simplement connexe, de dimension n, non abélien. Pour tout système générateur S de Γ , il existe une constante $c(S)$ telle que, pour toute partie finie A de Γ ,

$$\text{card}(A) \leq c(S) (\text{card}(\partial A))^{n+1/n}$$

Chapitre 3
Mesures de Hausdorff, surfaces minimales

Nous allons calculer, et normaliser, les mesures de Hausdorff p-dimensionnelles induites par la métrique de Carnot-Carathéodory sur les sous-variétés du groupe de Heisenberg de dimension 3. Ces mesures sont limitées des mesures riemanniennes associées aux g_t (2.6). La mesure 4-dimensionnelle (alors appelée mesure de Haar) a déjà été utilisée (1.F).

La mesure 3-dimensionnelle fournit une notion d'aire naturelle pour les surfaces, donc un problème de Plateau se pose : existence de surfaces minimales de bord donné. Ce problème est résolu en C, de manière peu satisfaisante, pour les sections : il existe toujours une section minimale, peu régulière, de bord donné. Elle peut n'être que Lipschitz (26) même si le bord est lisse!

Mais l'essentiel est sauf : en B, nous obtenons juste assez de régularité (fort laborieusement), pour que ces sections partagent la remarquable propriété de minimum 31, déjà rencontrée en 2.B.

Une autre propriété remarquable de la mesure \mathcal{H}^3 : ses surfaces minimales sont réglées, cela permet de construire de nombreux exemples (15,G)

1. Définition : Soit X un espace métrique ; on pose, pour toute partie A de X :

$$m_\epsilon^p(A) = \inf \left\{ \sum_1^p (\text{diam } A_i)^p / \text{les } A_i, \text{ de diamètre inférieur à } \epsilon, \text{ recouvrent } A \right\}$$

On pose $m^p(A) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} m_\epsilon^p(A)$. La mesure m^p , sur les boréliens de X, s'appelle mesure de Hausdorff p-dimensionnelle (voir par exemple [36], § 5).

On pose aussi $\mathcal{H}_\epsilon^p(A) = \inf \left\{ \sum_1^p r_i^p / \text{les boules } B(x_i, r_i), r_i < \epsilon, \text{ recouvrent } A \right\}$

et $\mathcal{H}^p(A) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{H}_\epsilon^p(A)$; c'est la mesure p-dimensionnelle sphérique (voir [33] § 2.10), c'est celle que nous utiliserons.

Pour calculer la mesure p-dimensionnelle sphérique, il suffit de vérifier que les boules ont le volume voulu :

2. Lemme : Soit μ une mesure sur X . Si $\int \mu_B(x,r)/r^p$ converge vers 1 uniformément pour $x \in X$, alors μ coïncide avec la mesure p-dimensionnelle sphérique. (Ici, X est un espace de longueur).

Voir par exemple [33] ; indication : montrer que, si $\mu(A) < +\infty$, il existe une partie V de A et un recouvrement de $A-V$ par des boules B_j de rayon ϵ , tels que $\mu(A) \geq (1-\epsilon) \sum_j \mu B_j$ et $\sum_j \mu B_j < \epsilon$.

3. Définition : On constate que $p \rightarrow m^p$ est décroissante, que $m^p(A) > 0$ entraîne que $m^q(A) = +\infty$ pour tout $q < p$, et que $m^p(A) < +\infty$ entraîne que $m^q(A) = 0$ pour tout $q > p$. Il n'y a donc qu'une seule valeur de p pour laquelle cette mesure risque d'avoir de l'intérêt (idem pour \mathcal{M}^p , car $m^p \leq 2^p \mathcal{M}^p \leq 2^p m^p$) : c'est la dimension de Hausdorff de A .

A. Dimension de Hausdorff

4. Dimension de Hausdorff des courbes.

Si c est une courbe dans l'espace métrique X , sans points doubles, sa mesure 1-dimensionnelle coïncide avec sa longueur (voir [33] § 2.10) ; d'après le lemme 1.18, si la longueur de c est finie, et si c est différentiable presque partout, alors c est presque partout horizontale. Dans ce cas, la projection $\pi : c \rightarrow \pi c$ est une isométrie, donc la dimension de Hausdorff de c est égale à 1, et la mesure de Hausdorff coïncide avec l'élément de longueur.

Supposons au contraire la courbe c partout transverse à la distribution horizontale H ; supposons c dérivable et orientée de façon que

$\omega(\dot{c}) > 0$. Ecrivons la différentiabilité de $c(s)$ en $s=0$ (nous posons $c(0) = 1$) :

$$c(s) = \exp(sc + o(s)) = \exp(sh\dot{c} + s\omega(\dot{c})Z + o(s))$$

d'où, si $t = 1/\sqrt{s}$, $\delta_t c(s) = \exp(\sqrt{s} h\dot{c} + \omega(\dot{c})Z + o(1)) + \exp\omega(\dot{c})Z$. Par conséquent, il existe un ϵ tel que, si $s < \epsilon$,

$$\sigma(1-\epsilon)\sqrt{\omega(\dot{c})} \leq \delta_t c(s) \leq \sigma(1+\epsilon)\sqrt{\omega(\dot{c})},$$

où $\sigma = d_\infty(1, \exp Z)$.

Posons $B_r = \{s < \epsilon / d_\infty(1, c(s)) < r\}$. Il vient

$$[0, (r/\sigma(1+\epsilon)\sqrt{\omega(\dot{c})})^2] \subset B_r \subset [0, (r/\sigma(1-\epsilon)\sqrt{\omega(\dot{c})})^2];$$

prenons, comme mesure μ , la mesure de densité $\sigma \omega(\dot{c})$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur R ; alors B_r / r^2 tend vers 1 lorsque r tend vers 0, pourvu que la fonction $s \rightarrow \omega(\dot{c}(s))$ soit continue en 0. Par conséquent, si la courbe transverse c est de classe C^1 , la mesure μ satisfait au hypothèses du lemme 2. Nous concluons

Proposition : Soit $s \rightarrow c(s)$ une courbe de classe C^1 dans le groupe d'Heisenberg G . Alors c est horizontale si et seulement si sa mesure 1-dimensionnelle est finie. Alors la mesure 1-dimensionnelle sur c coïncide avec la longueur. Si c est transverse, sa dimension de Hausdorff est égale à 2, et la mesure de Hausdorff 2-dimensionnelle de c est proportionnelle à $\int_c \omega$.

5. Dimension de Hausdorff des surfaces :

Soit $(s,t) \rightarrow f(s,t)$ une surface paramétrée dans le groupe G . Supposons que la forme $f^* \omega$ soit toujours non nulle, i. e., que la surface est transverse à la distribution horizontale : elle détermine un feuilletage de la surface f ; nous allons montrer que l'intersection d'une boule avec f est allongée dans le sens du feuilletage.

Posons $f(0) = 1$, $f^* \omega(0) = ads + bdt$; effectuons le changement de paramètre (qui préserve l'aire) $u = as + bt$, $v = t/a$.

Supposons f deux fois différentiable en 0 ; écrivons

$$F(u,v) = \exp(H(u,v)) + V(u,v)Z$$

où le vecteur $H(u,v)$ est horizontal, et la fonction $V(u,v)$, deux fois différentiable à l'origine, satisfait $dV(0) = du$. Quitte à effectuer un nouveau changement de variables $u \rightarrow u + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} v^2$, $v \rightarrow v$ (qui préserve l'aire), nous pouvons supposer que $\frac{\partial^2 V}{\partial v^2}(0) = 0$. Alors la formule de Taylor donne

$$V(u,v) = u + o(|u| + v^2).$$

Posons $\Omega = |h_{gV}^2 F(0)|$, $w = 1/\sqrt{|u| + \Omega^2 v^2}$; on a

$$\delta_w f(u,v) = \exp(wH(u,v)) + w^2 V(u,v)Z = \exp(wV h_{gV}^2 F + w^2 u Z + o(1)) \\ = \exp((v/\sqrt{|u| + \Omega^2 v^2}) X + (u/|u| + \Omega^2 v^2)Z + o(1))$$

ou plutôt, est à la même distance de l'origine, car la distance d_∞ admet les rotations autour d'une fibre comme isométries.

Posons $\sigma(\lambda) = d_\infty(1, \exp(\lambda/\lambda + 1)Z + 1/\sqrt{\lambda+1}X)$; pour tout $\epsilon > 0$, on aura donc, pour u, v assez petits,

$$(1-\epsilon) \sigma(|u|/\Omega^2 v^2) \sqrt{|u| + \Omega^2 v^2} \leq d_\infty(1, f(u,v)) \\ \leq (1+\epsilon) \sigma(|u|/\Omega^2 v^2) \sqrt{|u| + \Omega^2 v^2}.$$

Une bonne approximation de la boule de rayon r en 0, relative à la distance $f^* d_\infty$, est donc l'ensemble $D_r = \{u,v/\sqrt{|u| + \Omega^2 v^2} \sigma(|u|/\Omega^2 v^2) < r\}$.

Comme $D_r(\Omega)$ est l'image de $D_r(1)$ par le produit de $(u,v) \rightarrow (u, \Omega v)$ et de $(u,v) \rightarrow (r^2 u, rv)$, il vient $\text{aire}(D_r) = \Omega^{-1} r^3 \text{aire}(D_1)$.

Prenons pour μ la mesure de densité $\delta(u,v)/\text{aire}(D_1)$ par rapport à $ds dt = du dv$; comme f est de classe C^1 , la densité est continue, d'où $\lim_{r \rightarrow 0} (B(x,r))/r^3 = 1$ uniformément. Par le lemme 2, nous concluons que μ est la mesure de Hausdorff sphérique \mathcal{H}^3 .

Donnons des expressions plus intrinsèques de la quantité Ω .

Comme $f^* \omega = du$, le vecteur $\frac{\partial f}{\partial v}$ est horizontal; c'est l'unique vecteur tangent horizontal tel que, si T est son image réciproque par f , T soit la solution de $i_T(ds \wedge dt) = f^* \omega$, alors $\Omega = |f^* T|$. Plus généralement, si ϕ est une forme volume sur les coordonnées

(s,t) , et T est le champ de vecteurs solution de $i_T \phi = f^* \omega$, on doit intégrer $\Omega ds dt = |f^* T| \phi$. En particulier, si f est l'application identique de la surface S , dans elle-même, ϕ est la forme volume associée à la restriction de la métrique riemannienne g à S , le vecteur T solution de $i_T \phi = \omega|_S$ satisfait à $|T| = |\omega|_S$, donc μ est l'intégrale de la forme $|\omega|_S | \phi = |\omega|_S | d \text{aire}$.

Proposition : Soit S une surface deux fois différentiable dans le groupe G ; si S est transverse à la distribution horizontale, alors la dimension de Hausdorff de S est égale à 3, et la mesure De Haussdorff 3-dimensionnelle sphérique est proportionnelle à $|\omega|_S | d \text{aire}$.

6. Remarque : Nous avons eu besoin des dérivées secondes pour démontrer la formule intégrale pour la mesure \mathcal{H}^3 . Cependant, seules les dérivées premières interviennent dans cette formule, ce qui laisse penser qu'elle reste valable pour les surfaces de classe C^1 . Dans ce cas, la formule se prolongerait aux ensembles $\mathcal{Y}^2_{g,2}$ -rectifiables de G (où \mathcal{Y}^2_g désigne la mesure de Hausdorff 2-dimensionnelle riemannienne). En effet, d'une part, tout ensemble $\mathcal{Y}^2_{g,2}$ -rectifiable est, à un ensemble \mathcal{Y}^2_g -négligeable près, une réunion dénombrable de surfaces C^1 plongées, d'autre part, la mesure Carnot-Carathéodory \mathcal{H}^3_g est absolument continue par rapport à l'aire riemannienne \mathcal{Y}^2_g .

7. Lemme : $\mathcal{H}^3 \leq \text{const. } \mathcal{Y}^2_g$.
 Montrons d'abord qu'un double riemannienne $B(x,r)$ assez petite est contenue dans la réunion de $\frac{1}{r}$ boules Carnot-Carathéodory $B_\infty(x_j, 2r)$. Prenons $x = 1$. Si $y \in B_g(1,r)$, écrivons $y = \exp(U + zZ)$, où U est horizontal. Si r est petit, g est presque euclidienne, donc $|U| \leq r$ et $|z| \leq r$. Il existe un entier j en valeur absolue inférieur à $1/r$, tel que $|z - jr^2| \leq r^2$; posons $x_j = \exp(jr^2 Z)$. Alors

$d_\infty(x_j, y) \leq d_\infty(\exp zZ, x_j) + d_\infty(y, \exp zZ) \leq \alpha\sqrt{|z - jr^2|} + |U| \leq (1+\sigma)r$,
 donc les boules $B_\infty(x_j, (1+\sigma)r)$, $\frac{1}{r} \leq j \leq \frac{1}{r}$, recouvrent $B(1, r)$.

Soit A une partie de G , recouvert par les boules $B_g(x_i, r_i)$, $r_i < \epsilon$, de façon que $\sum r_i^2$ soit une approximation de $\mathcal{V}_{G, \epsilon}^2(A)$. Alors A est recouvert par les $B_\infty(x_{ij}, (1+\sigma)r_i)$, donc $\mathcal{H}_3^{(1+\sigma)}(A)$ est certainement inférieur à $\sum_{r_i} \frac{2}{(1+\sigma)r_i^3} = 2(1+\sigma)^3 \sum r_i^2$; ceci prouve que $\mathcal{H}_3^3(A) \leq 2(1+\sigma)^3 \mathcal{V}_G^2(A)$. \square

8. Dimension de Hausdorff de \underline{G} :

Par invariance à gauche, et l'existence des dilatations δ_t , on a pour toute mesure de Haar μ sur G , $\mu B(x, r) = r^4 \mu B(1, 1)$, donc μ est proportionnelle à la mesure de Hausdorff 4-dimensionnelle sphérique \mathcal{H}^4 .

9. Normalisation :

Nous allons choisir, en fonction d'une métrique riemannienne invariante à gauche g , des normalisations des mesures $\mathcal{H}^2, \mathcal{H}^3, \mathcal{H}^4$.

Remarquons que, si une surface S est transverse à la distribution horizontale, la forme ω induit sur S un feuilletage par des courbes horizontales ; ces courbes sont munies de la mesure \mathcal{H}^1 , normalisée de façon à coïncider avec la longueur. Les trajectoires orthogonales sont elles munies de la mesure \mathcal{H}^2 : la formule 6 pour la mesure 3-dimensionnelle \mathcal{H}^3 se lit : \mathcal{H}^3 est proportionnelle à $\mathcal{H}^1 \otimes \mathcal{H}^2$. Il serait souhaitable d'avoir $\mathcal{H}^3 = \mathcal{H}^1 \otimes \mathcal{H}^2$.

Formule de la coaire : Soit d vol la 4-forme volume riemannienne attachée à g ; soit f une fonction lipschitzienne sur G . En chaque point x de G , il passe une surface de niveau de f ; lorsqu'elle est lisse, elle porte une forme volume riemannienne ϕ ; mises ensemble, les formes ϕ constituent une 3-forme sur G , définie presque partout, et

La formule de la coaire riemannienne s'énonce $d \text{ vol} = \phi \wedge \frac{df}{|df|}$.

Posons $\psi = |\omega|^{1/2} \{f = \text{const}\}$; alors $d \text{ vol} = \psi \wedge df / |df| |\omega|^{1/2} \{f = \text{const}\}$. Or, si Z^t est la projection orthogonale de Z sur le plan tangent à la surface de niveau, on a $|df| |\omega|^{1/2} \{f = \text{const}\} = |\text{grad } f| |Z^t| = |\text{grad } f \wedge Z^t| = |\text{grad } f \wedge Z| = |hf \wedge Z| = |hf| |Z| = |hf|$, d'où la relation

$$d \text{ vol} = \psi \wedge \frac{df}{|hf|}$$

qui se traduit, pour toute fonction mesurable u sur G , par

$$\int_G u \, d \text{ vol} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{\{f=t\}} \frac{u \psi}{|hf|} \right) dt.$$

Il serait souhaitable que

$$\int_G u \, d \mathcal{H}^4 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{\{f=t\}} \frac{u}{|hf|} \right) dt.$$

Les deux conditions énoncées ci-dessus ne laissent qu'un paramètre de libre. Nous le choisissons arbitrairement, posant

$$\begin{cases} \mathcal{H}_G^2(c) = \int_G \omega \\ \mathcal{H}^3(S) = \int_G |\omega|^{1/2} S \\ \mathcal{H}^4(A) = \int_A \omega \wedge \pi^* X \end{cases} \text{ où } X \text{ est la forme volume du plan euclidien.}$$

B. Equation des sections minimales

10. Fixons une fois pour toutes un domaine D de \mathbb{R}^2 à bord lisse.

Une section (de la submersion $\pi : G \rightarrow \mathbb{R}^2$) est une application $s : D \rightarrow G$ telle que $\pi \circ s = \text{id}_D$. Les sections au-dessus de D forment un espace affine ; la différence de deux sections s_1 et s_2 est la fonction h telle que $s_1 = s_2 \exp(hZ)$.

Si la section s est lisse, la 1-forme $s^* \omega$ sur D satisfait à $d s^* \omega = - dx \wedge dy$.

Elle détermine s à une constante près, car $s_1^* \omega - s_2^* \omega = d(s_1 - s_2)$. Inversement, toute 1-forme lisse α sur D , telle que $d\alpha = - dx \wedge dy$ correspond à une section, ou plutôt, à une famille de sections transférées verticalement. En effet, la forme $\pi^* \alpha - \omega$ sur G est fermée,

donc exacte. Elle vaut 1 sur Z, donc ses surfaces intégrales sont partout transverses aux fibres ; la projection d'une telle surface sur D est un revêtement ; si D est simplement connexe (ce que nous supposons toujours par la suite), c'est un difféomorphisme, la réciproque est une section s telle que $s^* \omega = \alpha$.

11. Equation des sections minimales lisses :

Une section s lisse est dite minimale si, pour toute déformation s_t à support compact dans D, la dérivée $\frac{d}{dt} \mathcal{H}^3(s_t(D))|_{t=0}$ est nulle. Comme une déformation lisse, à support compact, d'une section lisse, reste, pour t assez petit, dans les sections, une section lisse minimale est aussi minimale en tant que surface dans G.

Considérer des sections a trois avantages :

- les problèmes relatifs à l'aire 3-dimensionnelle \mathcal{H}^3 deviennent paramétriques.
- la mesure \mathcal{H}^3 d'une section a l'expression particulièrement simple

$$\mathcal{H}^3(s(D)) = \int_D |s^* \omega| \, dx dy .$$

- une surface est une chaîne dans G ; déjà, considérer une surface paramétrisée ramène à travailler sur une chaîne T du plan, et sa masse $\int |f^* T|$ dsdt ; dans le cas des sections, nous trichons en remplaçant la chaîne T par la cochaîne $s^* \omega$; pour les cochaînes, nous disposons des notions et des théorèmes de H. Whitney.

Ecrivons l'équation d'Euler-Lagrange associée au problème variationnel

$$\mathcal{H}^3 : s \mapsto h = \frac{ds^* \omega}{dt} \Big|_{t=0} \quad \mathcal{H}^3(s_t(D)) = \int_D \langle dh, s^* \omega \rangle / |s^* \omega| \, dx dy = \int_D h^* d^* \alpha \quad , \quad \text{où } \alpha = s^* \omega / |s^* \omega| \quad , \quad \text{et } * \text{ désigne l'opérateur de Hodge sur les 1-formes (ici, il consiste à tourner de } \frac{\pi}{2} \text{).}$$

L'équation des sections lisses minimales est donc

$$d(*s^* \omega / |s^* \omega|) = 0 .$$

Le sens de cette équation doit être précisé dans le cas où la forme

$s^* \omega$ s'annule, i. e., lorsque la section est tangente à la distribution horizontale.

12. Lemme : Soit s une section de classe $C^{1,1}$; l'ensemble des points de D où la forme $s^* \omega$ s'annule est de mesure nulle.

En effet, posons, pour $x \in D$, $f(x) = |s^* \omega|$. Par hypothèse, il existe un réel p tel que $|df| \leq 1/p$. Posons $A(t) = \text{aire}\{f < t\}$; comme $d s^* \omega = - dx \wedge dy$, il vient

$$A'(t) = \int_{\{f < t\}} -d s^* \omega = \int_{\{f=t\}} s^* \omega \leq t \text{Long}\{f=t\} .$$

$$A'(t) = \int_{\{f=t\}} |df|^{-1} \geq p \text{Long}\{f=t\} \geq \frac{p}{t} A(t)$$

donc la fonction $A(t)/t^p$ est croissante, d'où $A(t) \leq \text{const.} \cdot t^p$.

En particulier, $A(t)$ tend vers 0 quand t tend vers 0, donc

$$\text{aire}\{f=0\} = \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\{f < t\}} s^* \omega = 0 . \square$$

Question : peut-on améliorer le lemme 11 ? Existe-t-il des sections

de classe C^1 , tangentes à la distribution (de contact) H sur un ensemble de mesure non nulle ?

13. Autre expression de l'équation :

Soit s une section lisse, minimale ; alors, par le lemme 11, pour toute variation lisse s_t , la dérivée $\frac{d}{dt} \mathcal{H}^3(s_t(D))|_{t=0}$ existe et vaut $\int_D * \alpha \wedge dh = 0$, où α est la 1-forme mesurable $\alpha = s^* \omega / |s^* \omega|$.

Soit Δ un triangle dans D ; considérons les fonctions h_ϵ définies

$$\text{par } \begin{aligned} h_\epsilon(x) &= 1 & \text{si } x \in \Delta , \\ h_\epsilon(x) &= 1 - \frac{1}{\epsilon} d(x, \Delta) & \text{si } d(x, \Delta) \leq \epsilon , \\ h_\epsilon(x) &= 0 & \text{si } d(x, \Delta) > \epsilon . \end{aligned}$$

En approchant h_ϵ par des fonctions lisses, on voit que, pour tout $\epsilon > 0$,

$$\int_D * \alpha \wedge dh = 0 .$$

Or, par Fubini et la différentiation de l'intégrale d'une fonction

mesurable bornée, pour presque tout translaté de Δ , on a

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_D * \alpha \wedge dh_\epsilon = \int_{\partial \Delta} * \alpha .$$

Cette condition signifie, avec la terminologie de H. Whitney, que $*\alpha$ est une 1-forme \flat (flat) fermée ([H0], IX. 7. A). Si D est simplement connexe, par le théorème de de Rham (VIII 12 A), $*\alpha$ est le cobord d'une 0-cochaîne X ; d'après le théorème de Wolfe (IX 5 A), X est en fait obtenue par intégration sur les 0-simplexes (i. e., les points) d'une fonction F ; pour tout segment I d'extrémités x, y , on a

$$F(y) - F(x) = \int_I * \alpha ,$$

donc F est lipschitzienne, et $*\alpha$ est sa différentielle.

Nous concluons : une section lisse s est minimale si et seulement si la forme $*s\omega/|s\omega|$ est exacte.

14. Sections réglées :

Nous dirons qu'une section s est régulée si, sur l'ouvert $s(D-\bar{Y})$ transverse à la distribution horizontale, le feuilletage défini par celle-ci est constitué de segments de droites.

Proposition : Toute section minimale, de classe $C^{1,1}$, est réglée. Inversement, si s est une section réglée $C^{1,1}$, et si \bar{Y} est discret, alors s est minimale.

Soit s une section minimale de classe $C^{1,1}$; le lieu des zéros de $*\omega$ est un fermé \bar{Y} de mesure nulle. Sur $D-\bar{Y}$, la forme $*\alpha$ est lipschitzienne, donc la primitive F est de classe $C^{1,1}$; notons X le gradient de F ; il admet des courbes intégrales $c(t)$; comme $c'(t) = X$ est de norme 1, on a $|c(t+\epsilon) - c(t)| \leq \epsilon$; inversement, on a $\epsilon = F(c(t+\epsilon)) - F(c(t)) \leq |c(t+\epsilon) - c(t)|$, donc $|c(t) - c(s)| = |t-s|$ ce qui prouve que la courbe intégrale $c(t)$ est contenue dans une droite du plan. Son relèvement horizontal est un segment de droite, contenu dans la section s , donc s est réglée.

Inversement, si s est de classe $C^{1,1}$, réglée, notons, sur $D-\bar{Y}$,

Y le champ de vecteurs unitaires tel que $\alpha(Y) = 1$. Il est lipschitzien, donc il admet des courbes intégrales, orthogonales aux segments de droites solution de $s\omega = 0$. Une telle courbe intégrale $c(s)$ est de classe $C^{1,1}$, donc c a une courbure bornée; si $X(s)$ est le vecteur normal direct à $c(s)$, l'application $(s,t) \mapsto c(s) + tX(s)$ est un difféomorphisme de $-K^{-1} \leq s, t \leq K^{-1}$ sur un ouvert de D (où K est une constante de Lipschitz pour Y). Sur cet ouvert, notons F la coordonnée t : c' est une fonction de classe $C^{1,1}$, et son gradient est $X(s,t) = X(s)$, donc $dF = *\alpha$.

Nous avons donc prouvé que $*\alpha$ est fermée sur $D-\bar{Y}$; toutefois, ce n'est pas suffisant pour conclure que $*\alpha$ est exacte. L'obstruction n'est pas dans la cohomologie de $D-\bar{Y}$; en effet, si \bar{Y} est discret, par exemple, alors s est minimale; pour le voir, montrons que $\int_{\partial \Delta} * \alpha = 0$ sur tout triangle Δ : comme $*\alpha \in C^{0,1}$ et est fermée dans $D-\bar{Y}$, nous pouvons remplacer $\partial \Delta$ par une collection de cercles entourant les points de $\bar{Y} \cap \Delta$, de longueur totale arbitrairement petite; comme $*\alpha$ est bornée, l'intégrale est nulle. En revanche, même si $*\alpha$ est exacte dans chaque composante de $D-\bar{Y}$, elle peut n'être pas exacte sur D . \square

15. Exemples de sections minimales et réglées :

1/ Choisir un feuilletage en droites de D ayant une transversale $c(s)$; choisir un relèvement de $c(s)$ dans le groupe G . Relever chaque feuille horizontalement à partir du relèvement du point d'intersection avec c ; la section ainsi construite est lisse et réglée.

Ainsi, étant donné le feuilletage par les droites verticales dans D , les sections réglées correspondantes sont données par les formes

$$s^* \omega = (y + h(x)) dx$$

on a $*\alpha = \text{signe}(y + h(x)) dy$, qui est fermée si et seulement si la

dans le domaine considéré fonction h est constante, auquel cas $*\alpha = d|y+h|$. En effet, les lignes de niveau de la primitive F de $*\alpha$ doivent être orthogonales aux feuilles, ce qui entraîne $F = t y + \text{const.}$

Nous obtenons donc une famille de sections minimales (chacune est invariante par un groupe à un paramètre de translations à gauche), et une famille de sections réglées non minimales.

2/ Les sections canoniques sont minimales sur tout domaine. On a, en coordonnées polaires, $*\omega = \frac{1}{2} r^2 d\theta$, d'où $*\alpha = dr$. Bien que la section soit lisse la primitive r de ne l'est pas. On n'échappe pas aux problèmes de régularité.

Remarque : Les deux familles de sections globales 1/ et 2/ sont les seules sections globales lisses minimales (voir § 43). Elles sont chacune invariante par un groupe de dilatations.

16. Sections de classe de Sobolev $W^{1,1}$:

Nous avons eu besoin, pour établir les propriétés essentielles 5 et 12 de la mesure de Hausdorff et de la structure de contact H , de considérer des surfaces de classe $C^{1,1}$. En revanche, l'espace naturellement commode pour étudier la fonctionnelle $f|s^*\omega|$ est l'espace de Sobolev $W^{1,1}$, espace affine des sections au-dessus de D , modelé sur l'espace vectoriel (de Banach) des fonctions dont la différentielle est intégrable.

En plus d'être le domaine de définition de la fonctionnelle

$$s \mapsto f_D |s^*\omega|,$$

que, par abus de langage, nous noterons $\mathcal{K}^3(s)$, les sections $W^{1,1}$ se présentent au problème de Plateau :

17. Lemme : Une fonction de $W^{1,1}(D)$ prend des valeurs L^1 au bord, i. e.,

l'application linéaire $\beta : C^\infty(\bar{D}) \rightarrow L^1(\partial D)$, $u \mapsto \beta u = u|_{\partial D}$, se prolonge par continuité à $W^{1,1}(D)$.

Notons ζ la 1-forme sur ∂D , proportionnelle à l'élément de longueur, dont l'intégrale est égale à $\text{aire}(D)$. Alors ζ se prolonge à \bar{D} , avec la condition $d\zeta = -dx \wedge dy$ (en effet, la condition $\int_{\partial D} \zeta = \text{vol}(D)$ garantit que le relèvement c de ∂D dans G défini par $*\omega = \zeta$ est une courbe fermée ; il ne reste plus qu'à la remplir par une section lisse, ce qui est toujours possible). Pour toute fonction lisse u , il vient $d(u\zeta) = du \wedge \zeta - u dx \wedge dy$, d'où $\int_{\partial D} u \zeta = \int_D du \wedge \zeta + \int_D u dx \wedge dy$ (en effet, $\int_D du \wedge \zeta = \int_D d(u\zeta) + \int_D u dx \wedge dy$). Donc, si u est positive, $|\int_{\partial D} u \zeta| \leq \int_D u dx \wedge dy$. \square

18. Lemme : Tout $u \in W^{1,1}(D)$ satisfait à une formule de Stokes : pour tout cocycle β de degré 1 sur un voisinage de D , on a $\int_D du \wedge \beta = \int_{\partial D} u \beta$.

D'après [40], IX § 5 A, un cocycle fiat est défini, sur tout polyèdre, par l'intégration d'une 1-forme mesurable bornée β ; en particulier, la 1-forme $u\beta$ est mesurable sur ∂D ; la forme $u\beta$, si u est lisse, représente une cochaîne, dont le bord est le cocycle du ; on a donc $\int_D du \wedge \beta = \int_{\partial D} u \beta$, pour toute fonction lisse u . Comme β est mesurable et bornée sur D et sur ∂D , l'équation de l'énoncé garde un sens pour une fonction $u \in W^{1,1}(D)$, sa validité résulte de sa continuité sur $W^{1,1}(D)$. \square

19. Sections minimales de $W^{1,1}(D)$:

Une section de $W^{1,1}(D)$ est dite minimale si, pour toute variation lisse s_t de s dans $W^{1,1}(D)$, $t \geq 0$, telle que $\beta_{s_t} = \beta_s$, la dérivée à droite $\frac{d}{dt} \mathcal{K}^3(s_t(D))|_{t=0}$ est positive. Si le lieu Σ des zéros de s n'est pas de mesure nulle, ou nulle

La fonctionnelle \mathcal{H}_3 n'admet pas de dérivée en s ; en revanche, comme \mathcal{H}_3 est convexe, la dérivée à droite de $t \rightarrow \mathcal{H}_3(s_t(D))$ existe toujours.

Si $h = \frac{dSt}{dt} |_{t=0}$, cette inégalité se traduit par $f_{D-\Sigma} \langle \alpha, dh \rangle + \int_{\Sigma} |dh| \geq 0$;

Quitte à remplacer h par $-h$, et en utilisant l'opérateur de Hodge $*$, il vient : s est minimale si et seulement si, pour toute fonction h de $W^{1,1}(D)$, nulle au bord, on a l'inégalité

$$(19) \quad |f_{D-\Sigma} * \alpha \wedge dh| \leq \int_{\Sigma} |dh|$$

20. Exprimons la condition (19) en termes d'intégrales curvilignes.

Soit U un ouvert de D , dont le bord est une courbe fermée c lisse par morceaux. Si ϵ est assez petit, $c + \epsilon$ désigne la courbe c poussée de ϵ le long de sa normale (qui devient un arc de cercle aux angles de c). Utilisons les fonctions h_{ϵ} du § 13 ; elles sont dans $W^{1,1}$ et nulles au bord, donc l'inégalité (19) est satisfaite. Or $\int_{D-\Sigma} * \alpha \wedge dh_{\epsilon} = \int_0^{\epsilon} (f_{c+t-\Sigma} * \alpha / \epsilon) dt$

Pour presque tout t , la limite existe et vaut $f_{c+t-\Sigma} * \alpha$. De même, $\int_{\Sigma} |dh_{\epsilon}|$ tend vers $\text{longueur}(c \cap \Sigma)$ pour presque tout t . Nous concluons : Pour toute courbe fermée c dans D , quitte à remplacer c par une courbe parallèle, arbitrairement proche, on a

$$(20) \quad |f_{c-\Sigma} * \alpha| \leq \text{longueur}(c \cap \Sigma)$$

21. Lemme : L'équation (20) équivaut à l'existence d'une fonction lipschitzienne F telle que $|dF| \leq 1$, et que, pour tout chemin c^1 par morceaux c , on ait (quitte à remplacer c par une courbe parallèle) : $|F(c(1)) - F(c(0)) - \int_{c-\Sigma} * \alpha| \leq \text{long}(c \cap \Sigma)$.

Si F est de mesure nulle, il n'y a rien de plus à dire qu'au § 12. La fonction F , primitive de $*\alpha$, est unique à constante près. Si F n'est pas de mesure nulle, nous allons obtenir une fonction F , qui dépend

de nombreux choix. Nous imitons la démonstration du théorème de Kirsh-Draun, selon lequel une fonction lipschitzienne sur une partie quelconque d'un espace métrique se prolonge partout.

Soit $\{x_i\}$ une suite dense dans D . Posons $f_0 = F(x_0) = 0$. Par récurrence, nous construisons $f_i = F(x_i)$ de façon que, pour tous i, j et tout chemin c de x_i à x_j , on ait (quitte à bouger un peu c)

$$|f_j - f_i - \int_{c-\Sigma} * \alpha| \leq \text{longueur}(c-\Sigma),$$

i. e., que $f_j - f_i$ soit dans l'intervalle $I(c)$ de centre $\int_{c-\Sigma} * \alpha$ et de rayon $\text{longueur}(c-\Sigma)$.

Supposons f_1, \dots, f_{k-1} construits. Il faut montrer qu'il existe un nombre f_k tel que, pour tout $i \leq k-1$, et tout chemin $c(i,k)$ de x_i à x_k , $f_k - f_i \in I(c(i,k))$, c'est-à-dire, montrer que l'intersection $\bigcap_{i \in c(i,k)} f_i + I(c(i,k))$ est non vide. Par le théorème de Helly, il suffit de montrer que deux tels intervalles rencontrent. Or, si $i, j \leq k-1$, si c relie x_i à x_k , et c' relie x_j à x_k , alors $c^{-1}c'$ est un chemin de x_i à x_j , donc

$$|f_j - f_i - \int_{c^{-1}c'-\Sigma} * \alpha| \leq \text{long}(c^{-1}c' \cap \Sigma),$$

ou bien, $|(f_j - \int_{c'-\Sigma} * \alpha) - (f_i - \int_{c-\Sigma} * \alpha)| \leq \text{long}(c \cap \Sigma) + \text{long}(c' \cap \Sigma)$ donc $f_i + I(c) \cap f_j + I(c') \neq \emptyset$. Il reste à vérifier l'inégalité

$$|f_k - f_k - \int_{c-\Sigma} * \alpha| \leq \text{long}(c \cap \Sigma)$$

pour toute courbe fermée c en x_k : c'est précisément l'hypothèse (20) ; il n'y a donc pas d'obstruction à la construction des f_i .

Vérifions que, si le segment c de x_i à x_j est contenu dans D , $|f_i - f_j| \leq |x_i - x_j|$; clairement, $|f_i - f_j| \leq \int_{c-\Sigma} * \alpha + \text{long}(c \cap \Sigma) \leq \text{long}(c) = |x_i - x_j|$, car $*\alpha$ est de norme 1.

Il existe donc une fonction courbe F sur $\{x_i\}$ telle que $f_i = F(x_i)$. Celle-ci se prolonge par continuité en une fonction courbe sur D . Si c est un chemin, d'extrémités x et y , dans D , on a, pour tous i, j , et quitte à remplacer c par une courbe parallèle,

$$|f(y) - f(x) - \int_{c-x}^y * \alpha| \leq \text{long}(c \cap \Sigma) + |x - x_i| + |y - x_j| +$$

$$|\int_{c_i-x}^y * \alpha| + |\int_{c_j-x}^y * \alpha|,$$

où $c_{i,j}$ est le segment rectiligne de x à x_i , de y à x_j .

Par densité de la suite x_i , nous obtenons l'inégalité de l'énoncé.

Inversement, l'inégalité (20) est un cas particulier de l'énoncé 21. \square

22. Equation des sections minimales de classe de Sobolev $W^{1,1}$:

Montrons que la conclusion de 21 entraîne que $df = * \alpha$ presque partout dans $D \cap \Sigma$.

Notons β la 1-forme mesurable qui vaut $* \alpha$ sur $D \cap \Sigma$, et vaut df sur Σ . Fixons un point z de D , notons $c(r)$ le carré de côté r : $c(r) = \{z+ka+iyb / 0 < x, y < r\}$. Notons c_y le segment de droite $c_y = \{z+ka+iyb / 0 < x < r\}$. D'après 21, on a, pour presque tout y ,

$$|\int_{c_y}^{z+r} * \alpha| \leq \text{long}(c_y \cap \Sigma) \text{ presque tout } y,$$

$$|\int_{c_y}^{z+r} (F(z+ra+iyb) - F(z-ra+iyb)) - \int_{c_y}^{z+r} c(r) \beta(a)| \leq \int_{c_y}^{z+r} \text{long}(c_y \cap \Sigma) dy =$$

$$\text{aire}(c(r) \cap \Sigma).$$

Or, d'après le théorème de Rademacher-Stépanov, la théorie de la différentiabilité, pour presque tout $z \in \Sigma$, on a

(i) F est différentiable en z ,

$$(ii) (1/4r^2) \int_{c(r)} \beta(a) \text{ tend vers } \beta_z(a),$$

$$(iii) (1/4r^2) \int_{c(r)} 1_\Sigma \text{ tend vers } 0;$$

En un tel point z , on a donc $df(a) = \beta(a)$.

Remarquons que, pour une forme $* \alpha = df$, on a, pour toute fonction $h \in W^{1,1}(D)$,

$$\int_{D \cap \Sigma} * \alpha \wedge dh = \int_{D \cap \Sigma} df \wedge dh. \text{ Or, d'après le lemme 18,}$$

$$-\int_D df \wedge dh = \int_{\partial D} h \, df.$$

Par conséquent, si h est nulle au bord, on a $\int_{D \cap \Sigma} * \alpha \wedge dh = \int_{\partial D} df \wedge dh$. Nous arrivons enfin à la conclusion de cette discussion des sections minimales :

Une section s dans $W^{1,1}$ est minimale si et seulement si il existe une fonction lipschitzienne F telle que

$$(i) |df| \leq 1 \text{ presque partout sur } \Sigma = \{s \wedge \omega = 0\},$$

$$(ii) df = * s \wedge \omega / |s \wedge \omega| \text{ presque partout sur } D \cap \Sigma.$$

C. Existence de sections minimales de bord donné

23. Proposition : Soit $s : \partial D \rightarrow G$ une section de π au-dessus de ∂D , de classe $L^1(\partial D)$. Alors il existe un prolongement de s à D qui est une section minimale.

L'argument est standard : notons I la borne inférieure des mesures \mathcal{R}^3 des sections de $W^{1,1}(D)$, dont la valeur au bord est s . Alors

l'ensemble des sections de bord s , de mesure inférieure à $I + \epsilon$, est borné dans $W^{1,1}(D)$, donc, d'après le théorème de compacité de Rellich, précompact dans $L^1(D)$. Il existe donc une suite s_i de sections de $W^{1,1}(D)$, qui convergent vers une section $s_\infty \in L^1(D)$, et telles que $\mathcal{R}^3(s_i)$ tende vers I . Alors $s_\infty \in W^{1,1}(D)$: en effet, les s_i sont bornées dans $W^{1,1}$, donc on peut supposer qu'elles convergent faiblement vers $s' \in W^{1,1}$; nécessairement, s_i converge fortement vers s' dans L^1 , donc $s_\infty = s'$.

Le fait que la valeur au bord de s_∞ soit égale à s résulte du lemme 24 ci-dessous.

Comme la norme des 1-formes est une fonction convexe, la fonctionnelle \mathcal{R}^3 est semi-continue inférieurement (voir [38], théorème 1.8.1.1.). On a donc $I \leq \mathcal{R}^3(s_\infty) \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \mathcal{R}^3(s_i) = I$, donc la section s_∞ a une mesure \mathcal{R}^3 minimum parmi toutes les sections de $W^{1,1}(D)$, dont le bord est la section donnée s . \square

24. Lemme : Si une suite s_i de sections converge faiblement vers s dans $W^{1,1}(D)$, et converge dans $L^1(D)$, alors $\mathcal{R}^3 s_i$ tend vers $\mathcal{R}^3 s$

dans $L^1(\partial D)$.

Il s'agit de montrer que, si les fonctions $h_i \in W^{1,1}(D)$ convergent faiblement vers 0 (au sens de $W^{1,1}$), et si $\int_D |h_i|$ tend vers 0, alors $\int_{\partial D} |h_i|$ tend vers 0. Nous pouvons supposer que $h_i \geq 0$.

Notons F la fonction distance au bord, notons ϕ_t le flot des normales au bord ∂D , de façon que $F \circ \phi_t = t$. Notons enfin 1_t la fonction caractéristique de l'ensemble $\{F < t\}$. Par Fubini, pour tout i , pour presque tout point y du bord, la fonction

$$t \rightarrow h_i(\phi_t(y))$$

est dans $W^{1,1}(R)$, donc est absolument continue. Nous pouvons donc écrire

$$h_i(\phi_t(y)) = h_i(y) + \int_0^t \langle dh_i, dF \rangle (\phi_s(y)) \, ds.$$

Encore par Fubini, on a

$$\int_0^t (f_{\partial D} h_i \circ \phi_s) \, ds = \int_D 1_t h_i \leq \int_D h_i,$$

donc, pour presque tout t , la fonction $h_i \circ \phi_t$ est dans $L^1(\partial D)$.

Il vient

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} (h_i \circ \phi_t - h_i) &= \int_{\partial D} \int_0^t \langle dh_i, dF \rangle (\phi_s(y)) \, dy \, ds \\ &= \int_D \langle dh_i, 1_t dF \rangle \end{aligned}$$

pour presque tout t . Comme la forme $1_t dF$ est mesurable bornée, la dernière intégrale tend vers 0 lorsque 1_t tend vers l'infini.

D'autre part, comme la fonction $\int_{\partial D} h_i \circ \phi_t$ est ≥ 0 , et que son intégrale tend vers 0, l'intégrale $\int_{\partial D} h_i \circ \phi_t$ tend vers 0 pour presque tout t , lorsque t tend vers $+\infty$. Nous concluons que

$$\int_{\partial D} h_i$$

tend vers 0. \square

25. Remarque : Le même argument s'applique à l'aire riemannienne

$$\text{aire}(s) = \int_D \sqrt{1 + |s^* \omega|^2}$$

et prouve l'existence de sections minimales pour cette fonctionnelle, dans l'espace $W^{1,1}(D)$.

La similitude entre le problème variationnel posé par l'aire Carnot-Carathéodory \mathcal{W}^3 et le problème riemannien ne va pas plus loin.

Dans le cas de l'aire riemannienne, utilisant le fait que la fonction $\beta + \sqrt{1 + |\beta|^2}$ est lisse et strictement convexe (ellipticité), une théorie de la différentiabilité des solutions du problème variationnel s'est bâtie, qui permet d'affirmer, en particulier, que si la donnée au bord s est lisse, la section d'aire minimum, de bord s , est lisse aussi.

En revanche, la fonction $\beta + |\beta|$ n'est pas strictement convexe (ce qui n'est peut-être pas un obstacle essentiel), mais surtout, elle n'est pas lisse en $\beta = 0$, ce qui est à l'origine des désagréments rencontrés avec les sections tangentes à la distribution horizontale de G .

26. Exemple de section minimale non lisse, mais lisse au bord.

Soit, dans le plan euclidien muni de coordonnées (x,y) , la fonction lipschitzienne F telle que

$$F(x,y) = x \quad \text{si } x \geq y, \\ F(x,y) = y \quad \text{si } x \leq y.$$

Posons, pour des fonctions lisses h et k , $\beta_1 = (-x + k(y))dy$ sur $\{y < x\}$, et $\beta_2 = (y + h(x))dx$ sur $\{y > x\}$. Alors β_1 et β_2 donnent lieu à des sections minimales (localement) typiques telles que

$$s_1^* \omega / |s_1^* \omega| = \pm dF. \text{ Précisément, soit } s_0 \text{ une des sections lisses telles}$$

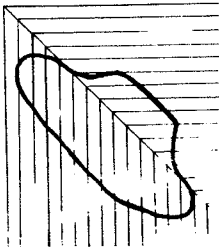
que $s_0^* \omega = ydx$; on a $\beta_1 = ydx + d(H(x))$, $\beta_2 = ydx + d(K(y) - xy)$, où H et K sont des primitives de h et k ; par conséquent, nous

pouvons poser $s_1 = s_0 \exp H(x)Z$, $s_2 = s_0 \exp (K(y) - xy)Z$; les

deux sections coïncident le long de la courbe $\{x=y\}$ si et seulement si $K(x) = H(x) + x^2$, soit $K(x) = h(x) + 2x$. Avec ce choix, s_1 et s_2 se recollent en une section lipschitzienne sur R^2 . Si il existe un x tel que $h(x) > 0$ et $x + h(x) > 0$, alors, pour les domaines D assez petits autour de (x,x) , on aura $s^* \omega / |s^* \omega| = dF$, donc la section s sera minimale sur D .

Si h est lisse, la forme $s^* \omega$ restreinte à ∂D l'est aussi, sauf

éventuellement aux points de ∂D où $y = x$; en un tel point $x=y=0$, paramétrons ∂D par $y = y(x)$; on a $\beta_1 - \beta_2 = (-x + 2y + k(y))y'dx - (y + h(x))dx$. remarquons que, si $y = x$ identiquement, alors $\beta_1 = \beta_2$ identiquement. Si $y - x$ est une fonction plate à l'origine, ie, lisse avec toutes ses dérivées nulles, il en est de même pour $\beta_1 - \beta_2$, donc dans ce cas, la forme $s^* \omega$ est lisse en $(0,0)$ aussi. On peut construire un domaine D , chevauchant la diagonale, dont le bord, lisse, a un contact d'ordre infini avec la diagonale. Si la dérivée $h'(x)$ ne s'annule pas, la section s n'est pas de classe C^1 , mais sa restriction au bord ∂D est lisse.



27. Le résultat d'existence 23 est d'un intérêt limité, sans théorème de régularité. Cependant, au vu de l'exemple 26, je ne sais quelle régularité espérer. Clairement, le domaine D construit en 26 n'est pas générique, on peut l'exclure avec des hypothèses raisonnables telles que généralité, convexité ou analyticité du bord.

D. Unicité de la section minimale de bord donné.

28. La propriété d'unicité suivante est liée seulement à la nature de la norme sur les 1-Formes. Comparer   [38], Théorème 4.2.1.

Proposition : Soit s une section minimale au-dessus de D . Pour toute section s' de classe $W^{1,1}$ au-dessus de D , de même bord que s , on a $\mathcal{H}^3(s') \geq \mathcal{H}^3(s)$.

Si s est lipschitzienne , l'égalité entraîne $s = s'$; autrement dit s est l'unique section minimale de bord ∂s .

Remarque : L'hypothèse "s est lipschitzienne" est purement technique. On doit certainement pouvoir s'en débarrasser.

Enrivons $s' - s = h \in W^{1,1}(D)$, nulle au bord. En chaque point de $D - \Sigma$, on a, si $\alpha = s^* \omega / |s^* \omega|$,

$$|s^* \omega + dh| \geq \langle s^* \omega / |s^* \omega| , s^* \omega + dh \rangle = |s^* \omega| + \langle \alpha, dh \rangle ,$$

d'où, en intégrant,

$$\mathcal{H}^3(s') \geq \mathcal{H}^3(s) + \int_{D-\Sigma} \langle \alpha, dh \rangle + \int_{\Sigma} |dh| .$$

Or la condition de minimalité (19) est précisément que, pour toute fonction h de classe $W^{1,1}$, nulle au bord,

$$\left| \int_{D-\Sigma} \langle \alpha, dh \rangle \right| \leq \int_{\Sigma} |dh| ,$$

d'où l'inegalité annoncée.

Cas d'égalité : L'égalité des mesures entraîne, en presque tout point de $D - \Sigma$, l'égalité $|s^* \omega| = |s^* \omega| + \langle \alpha, dh \rangle$, i.e., que dh et $s^* \omega$ sont colinéaires ; ceci s'écrit aussi $dh \wedge s^* \omega = 0$ presque partout.

Fixons une section s_0 lisse au-dessus de D ; si s est lipschitzienne, on a $s^* \omega = s_0^* \omega + \beta$, où β est un 1-cocycle flat. D'après le Lemme 18, on a $\int_D d|h| \wedge \beta = \int_{\partial D} |h| \beta = 0$,

car $h \in W^{1,1}$ et est nulle au bord. D'autre part, par régularisation, la formule de Stokes $\int_D |h| = \int_D d|h| \wedge s_0^* \omega$ est vraie.

Il vient $\int_D |h| = \int_D d|h| \wedge (s_0^* \omega + \beta) = \int_D d|h| \wedge s^* \omega = 0$,

donc h est nulle, ce qui prouve l'unicité de la section minimale s . \square

29. Remarque : Soit D le domaine de l'exemple 26, s la section lisse au-dessus du bord correspondante. Il résulte de l'unicité du prolongement minimal lipschitzien que cette courbe n'est le bord d'aucune section minimale lisse. Nous verrons en fait au § 44 que, pour un domaine D convexe, il existe un ouvert (pour la topologie C^1) de sections au bord, qui ne sont bordées par aucune section minimale lisse.

E. Propriété de minimum

Notons étendons la propriété de minimum 28 des sections à toutes les surfaces de même bord. Ici, les propriétés de la distribution horizontale jouent un rôle essentiel.

30. Définition : Soit D un domaine borné de \mathbb{R}^2 , une fonction F sur D est dite courbe si elle est lipschitzienne, $|dF| \leq 1$ et $\int_D F = 0$.

31. Théorème : Soit D un domaine simplement connexe de \mathbb{R}^2 , à bord lisse. Soit $s : \partial D \rightarrow G$ une section de classe C^1 . Notons σ la courbe $\sigma = s(\partial D) \subset G$.

Alors, pour toute surface compacte V dans G , de bord σ , pour toute fonction courbe F , on a l'inégalité

$$\mathcal{H}^3(V) \geq \int_{\partial D} F s^* \omega$$

En fait, $\inf_{\partial V = \sigma} \mathcal{H}^3(V) = \sup_{F \text{ courbe}} \int_{\sigma} F \omega$ est toujours positif, car il est atteint pour la section minimale de bord s .

Soit F une fonction courbe sur D ; par le théorème de Kirshbraun, F admet un prolongement à \mathbb{R}^2 qui satisfait encore $|dF| \leq 1$. Notons encore F la fonction $F \circ \pi$ sur G . Alors, pour toute surface V de classe C^2 , on a $\mathcal{H}^3(V) = \int_V |w|^{1/2} |v| \geq \int_V dF \wedge \omega$. Prolongeons s de façon arbitraire en une section de classe C^1 au-dessus de D ; alors, par la formule de Stokes,

$$\int_V dF \wedge \omega = \int_{s(D)} dF \wedge \omega = \int_D dF \wedge s^* \omega$$

Appliquons maintenant la formule de Stokes dans D :

$$\int_{\partial D} F s^* \omega = \int_D dF \wedge s^* \omega - \int_D dx \wedge dy = \int_D dF \wedge s^* \omega$$

d'où l'inégalité annoncée.

Soit s_σ une section minimale dans D , de classe $W^{1,1}$, de bord σ . Son existence est garantie par la proposition 23. D'après le § 22, il

existe une fonction courbe F telle que $dF = * s_{\sigma\omega}^* / |s_{\sigma\omega}^*|$ (F est unique si le lieu des zéros de $s_{\sigma\omega}^*$ est de mesure nulle). Il vient

$$\mathcal{H}^3(s_\sigma) = \int_D |s_{\sigma\omega}^*| = \int_D dF \wedge s_{\sigma\omega}^* \omega$$

Comme la forme dF est un 1-cocycle fiat, on peut appliquer la formule de Stokes :

$$\int_D dF \wedge s_{\sigma\omega}^* \omega = \int_{\partial D} F s^* \omega$$

Par conséquent, les deux bornes $\inf \mathcal{H}^3(V)$ et $\sup \int_{\sigma} F \omega$ sont atteintes lorsque $V = s_\sigma(D)$; leur valeur commune est positive : si

$\mathcal{H}^3(s_\sigma)$ était nul, on aurait, pour presque tout triangle Δ , contradiction. \square

$$\text{aire}(\Delta) = \int_{\partial \Delta} s_{\sigma\omega}^* = 0$$

32. Remarque : L'identité $\inf_{\partial V = \sigma} \mathcal{H}^3(V) = \sup_{F \text{ courbe}} \int_{\sigma} F \omega$

exprime l'équivalence de deux problèmes variationnels : minimiser l'aire parmi les surfaces de bord σ , et maximiser la forme linéaire continue $\int_{\partial D} F s^* \omega$ sur le convexe compact (pour la convergence uniforme) K des fonctions courbes. L'équivalence va plus loin : soit F un point extrémal de K , où $\int_{\partial D} F s^* \omega$ est maximum. Si F est lisse, l'ensemble des points extrémaux de K est lisse au voisinage de F , donc on peut écrire une équation d'Euler-Lagrange ; celle-ci exprime exactement la condition sur le feuilletage en segments de droites défini par le gradient de F , pour que l'une des sections obtenues en relevant horizontalement ces droites ait pour bord σ . Cette section minimale est alors lisse.

33. Remarque : Sur le plan simplement esthétique, remarquer l'analogie entre l'identité 32 et la suivante, valable pour tout espace de longueur

$$\inf_{\text{longueur}(c)} = \sup_{F \text{ courbe}} (F(y) - F(x))$$

où F courbe signifie $|F(y) - F(x)| \leq d(x,y)$, pour tous x, y .

34. Sections minimales riemanniennes :

L'aire riemannienne d'une section s au-dessus de D est donnée par

$$\text{aire}(s) = \int_D \sqrt{1 + |s^* \omega|^2} ;$$

notant $\zeta = s^* \omega$, la section s est donc minimale pour l'aire riemannienne si et seulement si la forme $\star \zeta / \sqrt{1 + |\zeta|^2}$ est fermée.

Comme en 28, une section minimale riemannienne minimise l'aire parmi les sections de même bord ; cela résulte seulement de la convexité de la fonction $\zeta \rightarrow \sqrt{1 + |\zeta|^2}$. L'unicité d'une section minimale est immédiate, par stricte convexité.

En revanche, il n'est pas clair qu'une section minimale riemannienne minimise l'aire parmi toutes les surfaces de même bord, comme en 31. Cette propriété de la mesure Carnot-Carathéodory, conformément à la philosophie du chapitre 1, est vraie asymptotiquement pour l'aire riemannienne.

35. Lemme : Soit $s : \tilde{D} \rightarrow G$ une section lisse, minimale pour l'aire riemannienne. Notons $\zeta = s^* \omega$. Alors, pour toute surface lisse V dans G, de même bord que s(D), on a l'inégalité

$$\text{aire}(V) \geq \mathcal{R}_3(V) \geq \text{aire}(s(D)) - \int_D (1 + |\zeta|^2)^{-1/2} .$$

Par hypothèse, la 1-forme $\star \zeta / \sqrt{1 + |\zeta|^2}$ est fermée ; soit f la primitive telle que $\int_D f = 0$. Alors f est courbe, donc

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_3(V) &\geq \int_D df \wedge \zeta . \\ \text{D'autre part, } \text{aire}(s(D)) - \int_D (1 + |\zeta|^2)^{-1/2} &= \int_D |\zeta|^2 / \sqrt{1 + |\zeta|^2} \\ &= \int_D |\zeta| |df| = \int_D df \wedge \zeta . \quad \square \end{aligned}$$

36. Proposition : Une section minimale riemannienne au-dessus d'une boule BR) réalise asymptotiquement le minimum de l'aire parmi les surfaces de même bord, lorsque le rayon R tend vers l'infini. Précisément, pour toute surface V, de même bord que s, on a

$$\text{aire}(V) \geq (1 - 3/R) \text{aire}(s) .$$

D'après le lemme 35, $\text{aire}(s) \leq \text{aire}(V) + \int_{B(R)} 1 = \text{aire}(V) + R^2$. Inversement, $\text{aire}(s) \geq \frac{\pi}{3} R^3 =$ mesure de la section canonique.

En effet, $\mathcal{R}_3(s) = \int_{B(R)} |\zeta| = \int_0^R (\int_{\partial B(r)} -\zeta) dr = \int_0^R \text{aire } B(r) dr = \frac{\pi}{3} R^3 .$

Par conséquent, $\text{aire}(V) - \text{aire}(s) / \text{aire}(s) \geq \pi R^2 / -\frac{\pi}{3} R^3 = -3/R . \square$

F. Estimée a priori

Nous exploitons le cas d'égalité dans l'inégalité

$$\mathcal{R}_3(s) \geq \int_D df \wedge s^* \omega$$

pour obtenir une estimée a priori des solutions de l'équation s minimale, $\partial s =$ courbe donnée.

37. Lemme : Soit D un domaine simplement connexe de \mathbb{R}^2 , à bord lisse, contenu dans une boule de rayon R ; il existe une section s_0 telle que, pour toute section minimale $s' = s_0 \exp hZ$, on ait

$$|h|_{W^{1,1}} \leq \frac{2\pi}{3} R^3 + 2 |h|_{L^1(D)} .$$

Si s, s' sont deux sections minimales au-dessus de D, alors

$$|\mathcal{R}_3(s') - \mathcal{R}_3(s)| \leq |\partial s' - \partial s|_{L^1(\partial D)} .$$

Soit F une fonction courbe telle que $df = \star s^* \omega / |s^* \omega|$, et F' itou. On a $\mathcal{R}_3(s') = \int_D df \wedge s'^* \omega = \int_D df \wedge s^* \omega + \int_D df \wedge \nu dh$; or df' est un 1-cocycle flat, donc, d'après le lemme 18,

$$\begin{aligned} -\int_D df' \wedge \nu dh &= \int_{\partial D} h df' , \\ \text{d'où } \mathcal{R}_3(s') &\leq \mathcal{R}_3(s) + \int_{\partial D} |h| ; \text{ en échangeant } s \text{ et } s' , \\ \text{il vient } |\mathcal{R}_3(s') - \mathcal{R}_3(s)| &\leq \int_{\partial D} |h| . \end{aligned}$$

Si D est contenu dans une boule de rayon R, on prend pour s_0 la section canonique, $s_0^* \omega = \frac{1}{2} r^2 d\theta$, pour laquelle $\mathcal{R}_3(s_0) = \frac{\pi}{3} R^3 . \square$

38. Proposition : L'application $\partial^{-1} : L^1(\partial D) \rightarrow L^1(D)$ qui à une section au bord associe ses prolongements minimaux à D, est aussi continue qu'elle peut être : soient s_i des sections minimales, telles que les bords ∂s_i convergent vers ∂s dans $L^1(\partial D)$. Alors des valeurs d'adhérence existent dans $L^1(D)$, ce sont toutes des sections minimales de bord ∂s .

Choisissons un prolongement minimal s de ∂s , posons $h_i = s_i - s$; par hypothèse, $\int_{\partial D} |h_i|$ tend vers 0, donc les h_i sont bornées dans $W^{1,1}$, par le lemme 37. Il existe donc des sous-suites convergent faiblement dans $W^{1,1}$, et fortement dans $L^1(D)$.

Soit h la limite d'une telle sous-suite, $s' = s \exp h$. D'après le lemme 24, on a $\int_{\partial D} |h_i - h|$ tend vers 0, donc h est nulle au bord. (ceci entraîne que $\mathcal{R}^3(s') \approx \mathcal{R}^3(s)$. D'autre part, comme les s_i et s sont minimales, et ∂s_i tend vers ∂s , les mesures $\mathcal{R}^3(s_i)$ tendent vers $\mathcal{R}^3(s)$. Enfin, par le théorème de semi-continuité de Morrey déjà invoqué en 23 ([3], Th 1.8.1), on a $\mathcal{R}^3(s) = \lim \mathcal{R}^3(s_i) \approx \mathcal{R}^3(s')$, car les s_i , bornées dans $W^{1,1}(D)$, convergent vers s' dans L^1 . Nous concluons que la section s' , de même bord et de même aire que s , est nécessairement minimale. \square

Remarque : Si on pouvait supprimer l'hypothèse de régularité dans le théorème d'unicité 28, on saurait que l'application ∂^{-1} , bien définie, est continue pour les normes L^1 .

G. Existence de surfaces réglées de bord donné.

39. La condition, pour une paire de points (x,y) de G , d'être sur une même droite, détermine exactement un point y' de la fibre de π en $x, y \in G$, il existe exactement un point y' de la fibre de π en y tel que $y \in L_x$; notons $h(x,y)$ le réel t tel que $y = y' \exp tz$. Alors la fonction h est lisse sur G^2 , et $L = \{h = 0\}$. La fonction h est une submersion : en effet, on a $h(x,y \exp tz) = h(x,y) + t$, donc la différentielle dh vaut 1 sur le vecteur tangent $(0,z)$. Par conséquent, L est une sous-variété de G^2 .

40. Variété des cordes :

Une paire de points (x,y) dans L ne détermine un segment de droite que si $x \neq y$; il convient donc d'éliminer la diagonale. Nous utilisons la construction de la variété des cordes de G , méthode détaillée dans [30], appendice 4. Rappelons que la variété des cordes de G est une variété à bord lisse \tilde{G}^2 , dont l'intérieur est G^2 -{diagonale}, et le bord est l'ensemble des couples (x,u) , où x est un point de G , u est un vecteur unitaire tangent en x .

La fonction h se prolonge, au moyen de sa différentielle, à l'écarté \tilde{G}^2 : On pose, pour $(x,u) \in \tilde{G}^2$,

$$h(x,u) = dh_{x,x}(u) = \omega_x(u).$$

Ce prolongement est lisse (voir [30]), c'est encore une submersion. En effet, la courbe $c(t) = (x, u+tz / u+tz)$ est tangente au bord, et $\frac{d}{dt} h(c(t))|_{t=0} = 1$.

Par conséquent, l'hypersurface $\tilde{L} = \{h = 0\}$ est une sous-variété à bord de \tilde{G}^2 , son intérieur est L -{diagonale}, son bord est $\tilde{L} \cap \partial \tilde{G}^2 = \{(x,u) / u \text{ vecteur tangent horizontal en } x\}$. Chaque point de \tilde{L} détermine une droite de G .

41. Disques et bandes de Möbius réglées :

Une surface réglée dans G donne lieu à une courbe dans la variété des segments de droites \tilde{L} . Nous considéreront deux types particuliers de surfaces.

a/ Disques : Un disque réglé est, par définition, une application de l'intervalle $[0,1]$ dans \tilde{L} , envoyant $\{0,1\}$ dans $\partial\tilde{L}$.

Notons-la $t \mapsto (c_1(t), c_2(t))$ si $t \neq 0, 1$.

Alors les courbes c_1, c_2 mises bout à bout forment une courbe lisse c dans G. Notons $sc_1(t) + (1-s)c_2(t)$ le barycentre de $c_1(t)$ et $c_2(t)$ sur le segment de droite qui les relie. L'application $(s,t) \mapsto sc_1(t) + (1-s)c_2(t)$

induit une application lisse S du disque unité B de R^2 dans G, qui est une surface réglée. Elle n'est pas une immersion en général.

b/ Bandes de Möbius : Notons i l'involution $(x,y) \mapsto (y,x)$, prolongée à \tilde{G}^2 .

Une bande de Möbius réglée est, par définition, une application ϕ du cercle S^1 dans \tilde{L} , telle que $\phi(\theta+\pi) = i(\phi(\theta))$. Posons

$$\phi(\theta) = (c_1(\theta), c_2(\theta)).$$

Alors, de manière équivalente, $c_1(\theta+\pi) = c_2(\theta)$. L'application

$$S : S^1 \times [0,1] \rightarrow G, \quad (\theta, s) \mapsto sc_1(\theta) + (1-s)c_2(\theta),$$

satisfait à $S(\theta, s) = S(\theta+\pi, 1-s)$,

donc elle passe au quotient en une application lisse S de la bande de Möbius $M = S^1 \times [0,1] \text{ mod } \{(\theta, s) \sim (\theta+\pi, 1-s)\}$ dans G. C'est une surface réglée, qui n'est pas une immersion en général.

Si c est une courbe lisse plongée dans G, et $S : B, M \rightarrow G$

est un disque ou une bande de Möbius réglé, nous dirons que c borde

S si $S(\partial B)$ (resp. $S(\partial M)$) est contenu dans l'image de c, de façon que l'application $c^{-1} \circ S : S^1 \rightarrow S^1$ soit de degré ± 1 .

42. Proposition : Il existe un ouvert résiduel (pour la topologie C^∞) de courbes fermées plongées dans G, qui bordent un disque ou une bande de Möbius réglés. Autrement dit, une courbe générique de G borde, au sens de 41, une surface réglée. Celle-ci n'est pas immergée en général.

Notons $K = \tilde{S}^1 \times G$ la surface des cordes construite sur le cercle S^1 . Toute courbe $c : S^1 \rightarrow G$ induit une application lisse $\tilde{c} : K \rightarrow \tilde{G}^2$, son bi-jet d'ordre 0. D'après le théorème de transversalité de Thom pour les multi-jets (voir [30], appendice 4), il existe un ensemble résiduel de courbes c telles que \tilde{c} soit transverse à la sous-variété \tilde{L} ; ces courbes seront dites génériques.

Soit c une courbe générique. Notons encore $h = h_c$ sur K, notons $\xi = c^{-1}(\tilde{L})$; par hypothèse, ξ est une sous-variété à bord de dimension 1 du cylindre K. Choisissons une orientation de S^1 , ce qui revient à numéroter $\partial_+ K$ et $\partial_- K$ les composantes du bord de K.

Supposons que l'une des composantes connexes de ξ relie $\partial_- K$ à $\partial_+ K$. Une paramétrisation de cette composante est un plongement

$$\psi(t) = (\psi_1(t), \psi_2(t)), \quad [0,1] \rightarrow K;$$

alors l'application composée $c \circ \psi$ est un disque réglé, le bord $c^{-1} \circ S$ est l'application $S^1 \rightarrow S^1$ obtenue en mettant ψ_1 et ψ_2 bout à bout. Le degré d'une telle application clairement ne dépend que de la classe d'isotopie (relative au bord) du plongement ψ , donc vaut 1, car il n'y a qu'une classe d'isotopie de plongements.

Supposons au contraire qu'aucune composante de ξ ne relie $\partial_- K$ à $\partial_+ K$. Si une composante de ξ a un bord non vide, par exemple, contenu dans $\partial_+ K$, elle borde, avec un arc de $\partial_+ K$, un disque. Nous changeons h en -h dans ce disque, puis nous lisons h au voisinage du bord, en veillant à ce que la nouvelle fonction h ait

un signe constant dans cette région. Si i désigne l'involution $i(\theta, \theta') = (\theta', \theta)$ sur K , alors i échange les composantes du bord, et $h_{o,i} = -h$; le changement de fonction h' doit être fait de façon que $h'_{o,i} = -h'$. Si ξ a des composantes fermées, homotopes à zéro dans K , on peut de même les faire disparaître en changeant la fonction h de manière équivariante.

Nous pouvons donc supposer que ξ est la réunion de k courbes fermées plongées ξ_1, \dots, ξ_k non homotopes à zéro. Chacune sépare K en exactement deux composantes, donc une relation d'ordre s'établit entre les courbes ξ_j . Lorsqu'on traverse une courbe ξ_j , la fonction h change de signe, or h a un signe constant au voisinage de $\partial_+ K$, et le signe opposé au voisinage de $\partial_- K$ (car i échange $\partial_+ K$ et $\partial_- K$), donc les ξ_j sont en nombre impair, $k = 2p + 1$. Nécessairement, $i(\xi_j) = \xi_{k-j}$, donc $i(\xi_p) = \xi_1$. Il existe donc une paramétrisation $\psi(\theta) = (\xi_1(\theta), \psi_2(\theta))$ de $\partial_+ K$ telle que $\psi(\theta + \pi) = i(\psi(\theta))$. L'application composée $\tilde{\psi}_2 \psi$ dans \mathbb{R}^2 à une bande de Möbius réglée B , et le bord $\partial_+ B$ est l'appariement $\psi_1 : S^1 \rightarrow S^1$; elle est de degré 1 car une courbe fermée plongée dans K ne peut faire qu'une fois le tour de K .

Dans les deux cas, nous avons pu remplir la courbe générique c par une surface réglée, lisse, mais non immergée en général.

43. Remarque :

Les surfaces réglées du § 15 sont des disques dans l'exemple 1/ et des bandes de Möbius (sic) dans l'exemple 2/.

La méthode 42 donne très rarement des sections réglées. Signalons en effet qu'on peut, lorsqu'une section réglée est de classe C^3 , analyser le lieu des zéros de la forme $s(u)$. En général, le feuilletage en droites défini par $s(u)$ passe au travers des zéros. Si un

zéro x est une singularité du feuilletage, alors x est isolé, et la section s coïncide, au voisinage de x , avec une section canonique d'origine x . Il s'ensuit en particulier que, pour une courbe c générique, section du bord d'un domaine D de \mathbb{R}^2 , une éventuelle section réglée lisse au-dessus de D , de bord c , doit donner lieu à un feuilletage de D par des segments de droite.

Comme la caractéristique d'Euler d'un disque est non nulle, le feuilletage doit être tangent en un point au bord; au-dessus de ce point, la courbe c est horizontal. Sans la démontrer, énonçons la conclusion suivante :

44. Proposition : Soit une courbe lisse c plongée dans G . Supposons que
- (i) c est une section de π au-dessus du bord
 - (ii) c n'est jamais horizontale.
 - (iii) c n'est contenue dans aucune section canonique.
- Alors c n'est le bord d'aucune section réglée lisse au-dessus de D .

- [33] H. Federer, Geometric Measure Theory, Springer, Grundlehren Band 153 (1969).
- [34] G. B. Folland, E. M. Stein, Estimates on the \bar{p} -complex and analysis on the Heisenberg group, Comm. in Pure and Applied Math. 27 (1974), 429-
- [35] D. Gilbarg, N. S. Trudinger, Elliptic Partial Differential Equations of second order, Springer, Grundlehren Band 224 (1977).
- [36] W. Hurewicz, H. Wallman, Dimension Theory, Princeton Univ. Press (1948).
- [37] E. Krahn, Über eine von Rayleigh formulierte Minimal-eigenschaft der Kreise, Math. Ann. 94 (1924), 97-100.
- [38] C. B. Morrey, Multiple Integrals in the Calculus of Variations, Springer, Grundlehren Band 130 (1966).
- [39] S. Santalo, Integral Geometry and Geometric Probability, Addison-Wesley (1976).
- [40] H. Whitney, Geometric Integration Theory, Princeton Univ. Press (1957).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Y. Colin de Verdière, Nombre de points entiers dans une famille homothétique de domaines de \mathbb{R}^n . Ann. Ecole Normale Supérieure 10 (1977), 559-575.
- [2] E. I. Dinaburg, On the relations among various entropy characteristics of dynamical systems. Math. SSSR Isslediya 5 (1971), 337-
- [3] Encyclopedic dictionary of Mathematics, Math. Soc. of Japan, Vol 1. § 240. MIT Press : Cambridge, U. S. A.
- [4] H. Federer, W. H. Fleming, Normal and integral currents, Ann. of Math. 72 (1960), 458-520.
- [5] H. Federer, Real Flat chains, cochains and variational Problems, Indiana Univ. Math. J. 24 (1974), 351-407.
- [6] B. Gaveau, Principe de moindre action, propagation de la chaleur et estimées sous-elliptiques sur certains groupes nilpotents, Acta Math. 139 (1977), 96-153.
- [7] B. Gaveau, Systèmes hamiltoniens associés à certains opérateurs hypoelliptiques, Bull. Sci. Math. (1978)
- [8] R. Goodman, Nilpotent Lie groups, structure and applications to analysis, Lecture Notes 562, Springer : Berlin, 1976.
- [9] M. Gromov, Synthetic riemannian geometry, Proceedings of the international Congress of Mathematicians at Helsinki (1978).
- [10] M. Gromov, Structures métriques pour les variétés riemanniennes, notes de cours rédigées par J. Lafontaine et P. Pansu, CEDIC : Paris, 1981.

- [11] M. Gromov. Groups of polynomial growth and expanding maps. Publ. Math. de l'I. H. E. S. 53 (1981), 53-78.
- [12] M. Gromov. Volume and bounded cohomology. Preprint I. H. E. S.: Bures-sur-Yvette, 1981.
- [13] M. Gromov. Filling riemannian manifolds. A paraitre au J. of Differential Geometry.
- [14] L. K. Hua. Die Abschätzung von Exponentialsummen und ihre Anwendungen in der Zahlentheorie. Enzykl. Math. Bd. I,2, Heft 13, Teil 1. Teubner, 1959.
- [15] A. E. Ingham. On two classical lattice-point problems. Proc. Cambridge Philos. Soc. 36 (1940), 131-138.
- [16] A. Kaplan. Riemannian nilmanifolds attached to Clifford Modules. Geometriae Dedicata. 11 (1981), 127-136.
- [17] A. Katok. Entropy of closed geodesics. Preprint Univ. of Maryland, 1981.
- [18] A. Koranyi. Geometric properties of Heisenberg type groups. Preprint Washington Univ. at St Louis.
- [19] E. G. H. Landau. Einführung in die elementare und analytische Theorie der algebraischen Zahlen und der Ideale. Teubner, 1918.
- [20] A. Malcev. On a class of homogeneous spaces. Izvestiya 13 (1949), 9-32. Aussi A.M.S. Translations 39 (1951).

- [21] A. Manning. Topological entropy for geodesic flows. Annals of Math. 110 (1979), 567-573.
- [22] G. A. Margulis. Certain applications of ergodic theory to the investigation of manifolds of negative curvature. Funkc. Analiz i Prilozen. 3 (1969) n°4, 89-90.
- [23] J. Milnor, A note on curvature and the fundamental group. J. of Differential Geometry 2 (1968), 1-7.
- [24] J. Mitchell,
- [25] S. J. Patterson. The limit set of a fuchsian group. Acta Math. 136 (1977), 241- .
- [26] B. Randol. On the asymptotic behaviour of the Fourier Transform of the indicator function of a convex set. Trans. A.M.S. 139 (1969), 279-285.
- [27] H. S. Süssmann. Orbits of families of vectorfields and integrability of distributions. Trans. A.M.S. 180 (1973), 171- .
- [28] I. M. Vinogradov. On the number of integral points in a given domain. Izv. Akad. Nauk SSSR 24 (1960), 777-786.
- [29] A. L. Besse. Manifolds all of which geodesics are closed. Springer (1976).
- [30] M. Chapéron. Singularités des systèmes dynamiques, Cours à l'Ecole Normale Supérieure en 1981. Astérisque (1983).
- [31] Ch. Croke. Some isoperimetric inequalities and eigenvalue estimates. Annales de l'I.E.N.S. 13 (1980), 419-436.
- [32] G. Faber. Beweis dass unter allen homogenen Membranen von gleicher Fläche uned gleicher Spannung, die kreisförmige den tiefsten Grundton gibt, S-B Math. Kl. Bayer Akad. Wiss. (1923), 169-172.