Euclide et le Petit Prince

P. Pansu, Université Paris-Sud

21 février 2019

Euclide : la géométrie plane parle de points, de droites, d'angles, d'orthogonalité, de parallélisme, de figures (triangles, polygones, cercles), de propriétés des figures comme

- Le Théorème de Thalès,
- Le Théorème de Pythagore,
- La somme des angles d'un triangle vaut 180°.

Cela a suffi pendant des millénaires. Pourquoi, depuis le XIXème siècle, s'intéresse-t-on aussi à d'autres géométries ?

Euclide : la géométrie plane parle de points, de droites, d'angles, d'orthogonalité, de parallélisme, de figures (triangles, polygones, cercles), de propriétés des figures comme

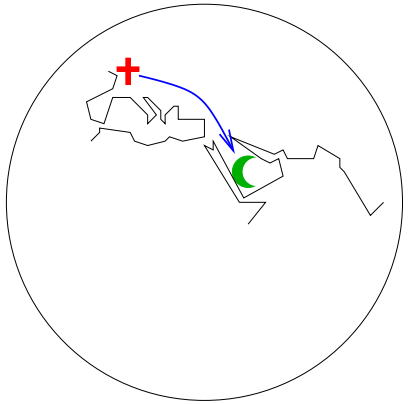
- Le Théorème de Thalès,
- Le Théorème de Pythagore,
- La somme des angles d'un triangle vaut 180°.

Cela a suffi pendant des millénaires. Pourquoi, depuis le XIXème siècle, s'intéresse-t-on aussi à d'autres géométries ?

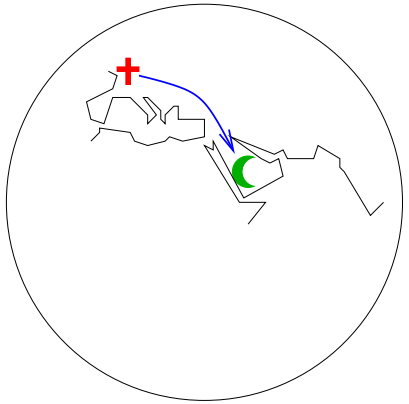
On commence par étudier la planète du Petit Prince.

Vivre sur une planète non euclidienne

Le problème de la qibla : comment déterminer la direction de la Mecque ?

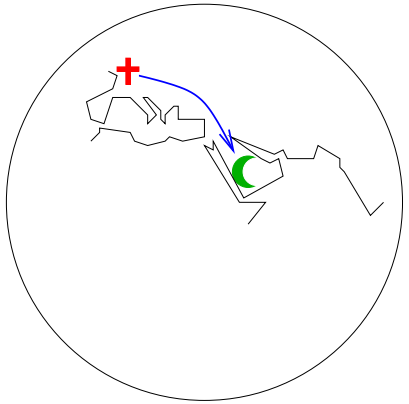


Le problème de la qibla : comment déterminer la direction de la Mecque ?



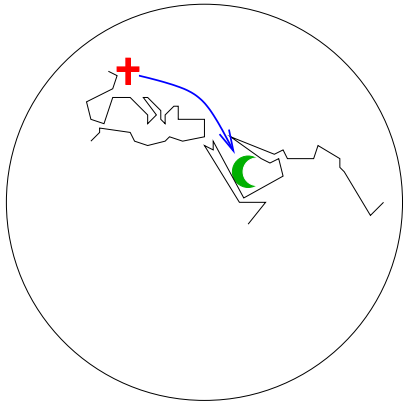
Direction=rayon lumineux=plus court chemin.

Le problème de la qibla : comment déterminer la direction de la Mecque ?

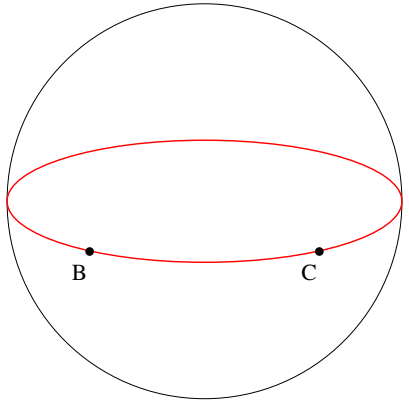


Direction=rayon lumineux=plus court chemin.
Comment trouver le plus court chemin d'un point à un autre de la mappemonde ?

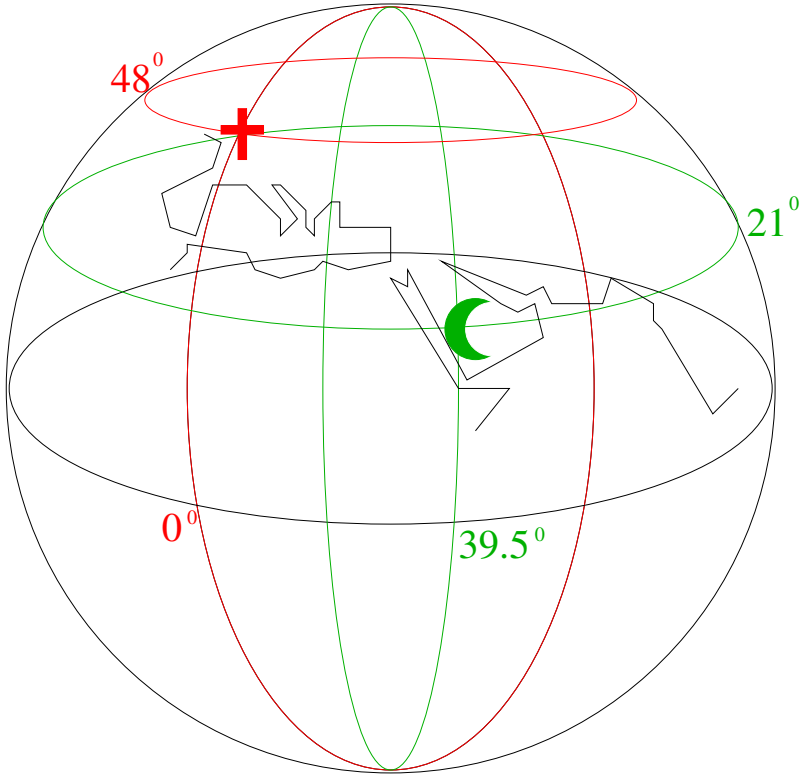
Le problème de la qibla : comment déterminer la direction de la Mecque ?



Direction=rayon lumineux=plus court chemin.
Comment trouver le plus court chemin d'un point à un autre de la mappemonde ?
Réponse : c'est un arc du grand cercle qui passe par les deux points.



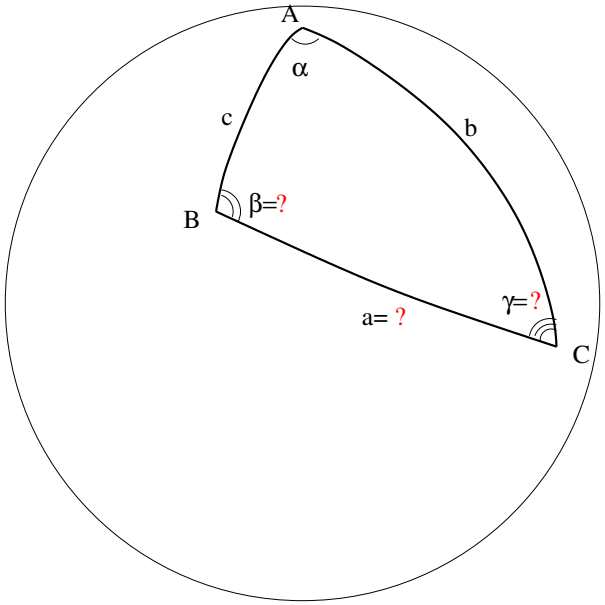
On repère un point par sa latitude (nord ou sud) et sa longitude (est ou ouest).
Latitude 0° = équateur. Latitude 90° = pôle. Longitude 0° = méridien de Greenwich.



Différence des longitudes entre La Mecque et Paris : 39,5°.

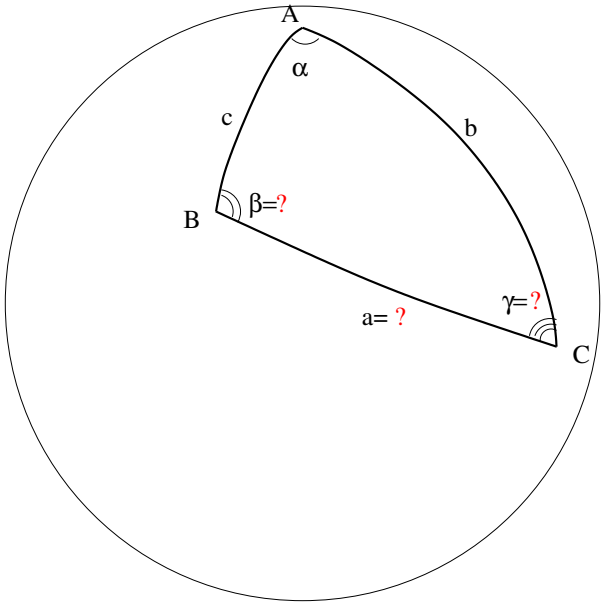
Problème (qibla)

Etant données les latitudes b et c, et la différence des longitudes α, trouver l'angle γ.



Problème (qibla)

Etant données les latitudes b et c, et la différence des longitudes α, trouver l'angle γ.



Solution (Ahmad ibn 'Abdallah Habash Hasib Marwazi, Bagdad, IXème siècle)

$$\tan(\beta) = \frac{\sin(\alpha)}{\sin(c)\cot(b) - \cos(c)\cos(\alpha)}.$$

Soit un triangle du plan euclidien, d'angles α, β, γ (en radians). On effectue des symétries par rapport aux côtés, puis on recommence avec les triangles obtenus.

Problème

A quelle condition obtient-on un pavage du plan euclidien ?

Soit un triangle du plan euclidien, d'angles α, β, γ (en radians). On effectue des symétries par rapport aux côtés, puis on recommence avec les triangles obtenus.

Problème

A quelle condition obtient-on un pavage du plan euclidien ?

Solution

1. $\alpha = \frac{2\pi}{p}$, $\beta = \frac{2\pi}{q}$, $\gamma = \frac{2\pi}{r}$, *où p, q, r sont entiers,*
2. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{1}{2}$,
3. *si l'un est impair, les deux autres sont égaux.*

Soit un triangle du plan euclidien, d'angles α, β, γ (en radians). On effectue des symétries par rapport aux côtés, puis on recommence avec les triangles obtenus.

Problème

A quelle condition obtient-on un pavage du plan euclidien ?

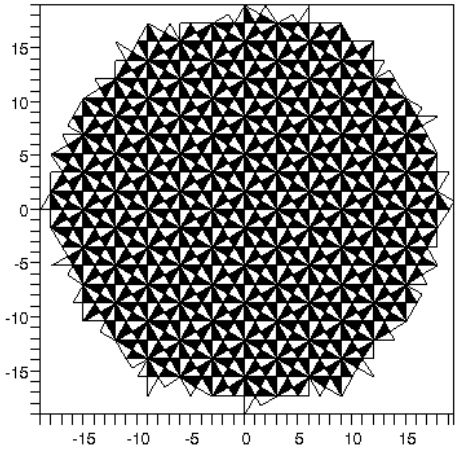
Solution

1. $\alpha = \frac{2\pi}{p}$, $\beta = \frac{2\pi}{q}$, $\gamma = \frac{2\pi}{r}$, *où p, q, r sont entiers,*
2. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{1}{2}$,
3. *si l'un est impair, les deux autres sont égaux.*

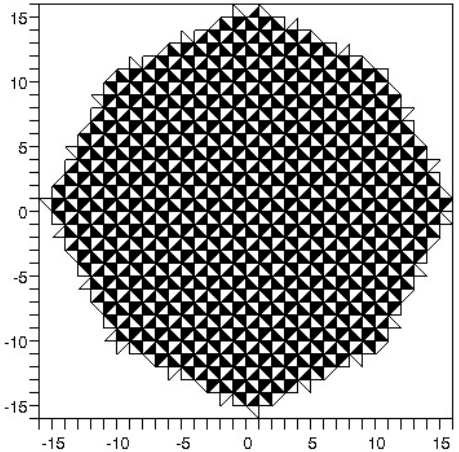
Liste des triangles paveurs du plan

Si $p \leq q \leq r$, alors $(p, q, r) =$

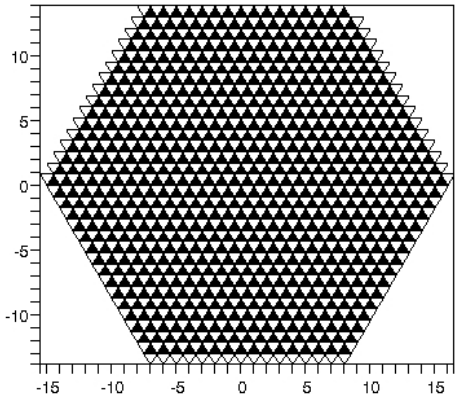
- (3,12,12),
- (4,6,12),
- (4,8,8),
- (6,6,6).



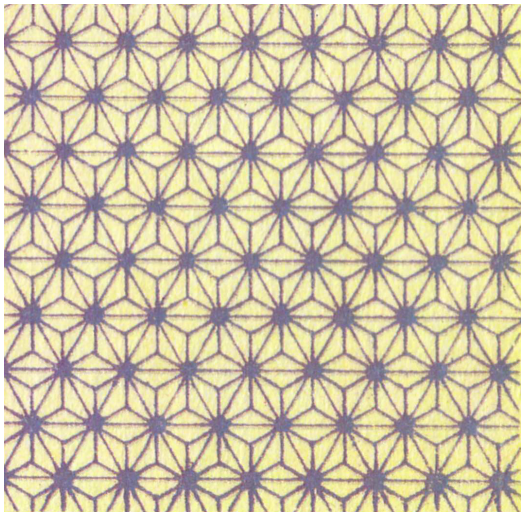
(4,6,12)



(4,8,8)



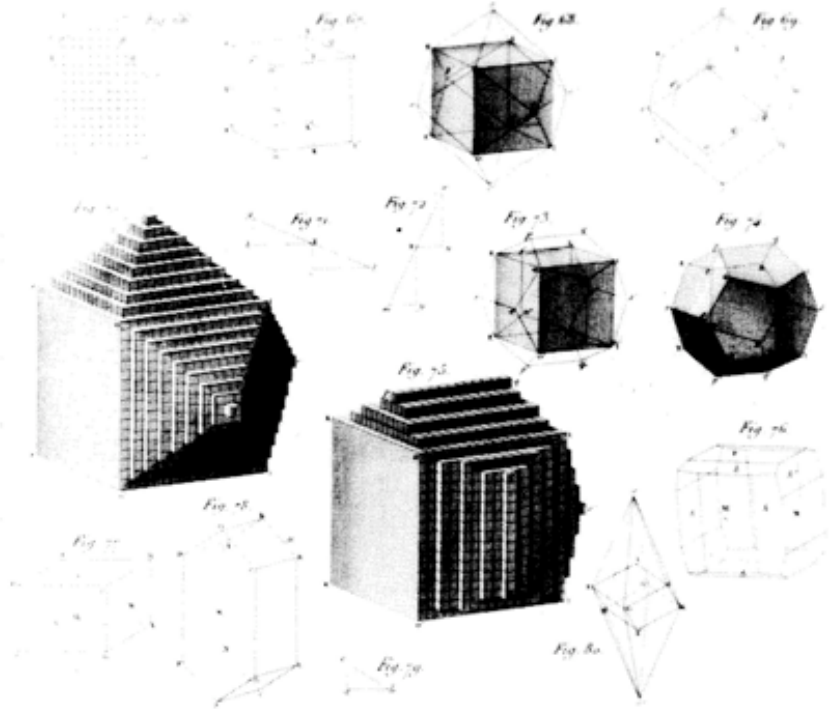
(6,6,6)



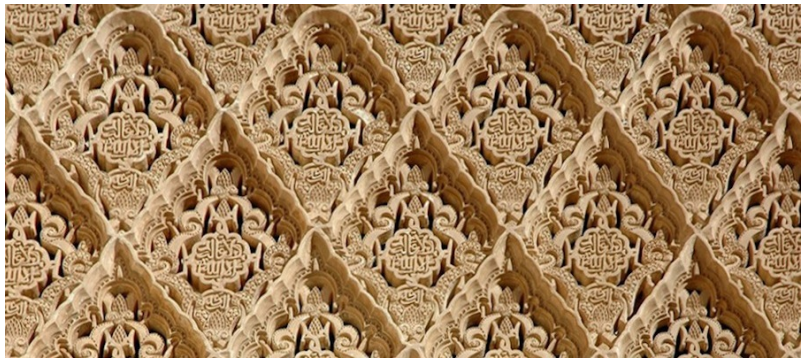
(3,12,12)

René-Just Haüy (1743-1822) a proposé l'idée que les cristaux étaient faits de grains empilés de façon périodique : principe de la cristallographie géométrique.

La classification des empilements possibles en 2 et 3 dimensions a été terminée en 1891.



En 2 dimensions, il y a 17 types, tous représentés dans les palais et mosquées andalous.



L'intersection de 3 demi-sphères est un triangle sphérique d'angles α, β et γ en radians.

Théorème (Diquet)

La somme des angles $\alpha + \beta + \gamma$ d'un triangle sphérique est toujours $> \pi$, et le nombre $\alpha + \beta + \gamma - \pi$ est l'aire du triangle.

Soit un triangle sphérique, d'angles α, β, γ en radians. On effectue des symétries par rapport aux côtés, puis on recommence avec les triangles obtenus.

Problème

A quelle condition obtient-on un pavage de la sphère ?

Soit un triangle sphérique, d'angles α, β, γ en radians. On effectue des symétries par rapport aux côtés, puis on recommence avec les triangles obtenus.

Problème

A quelle condition obtient-on un pavage de la sphère ?

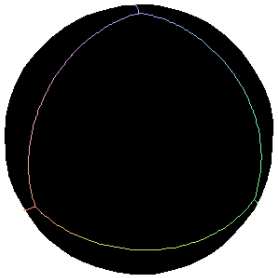
Solution

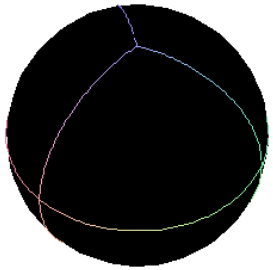
1. $\alpha = \frac{2\pi}{p}$, $\beta = \frac{2\pi}{q}$, $\gamma = \frac{2\pi}{r}$, *où p, q, r sont entiers,*
2. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} > \frac{1}{2}$,
3. *si l'un est impair, les deux autres sont égaux.*

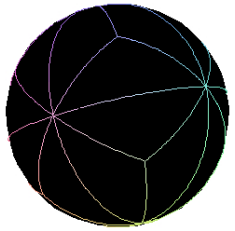
Liste des triangles paveurs de la sphère

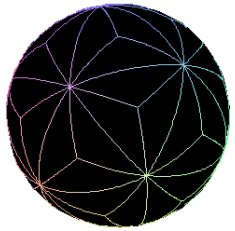
Si $p \leq q \leq r$, alors $(p, q, r) =$

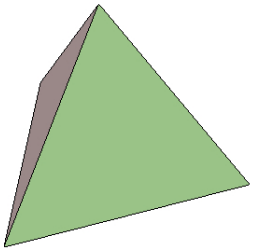
- (3,3,3), (3,4,4), (3,6,6), (3,8,8), (3,10,10),
- (4,4,r), pour tout $r > 3$,
- (4,6,6), (4,6,8), (4,6,10), (4,8,8),
- (5,5,5), (5,6,6).



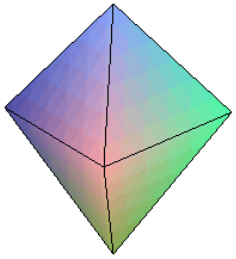




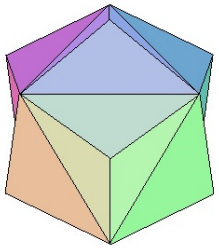




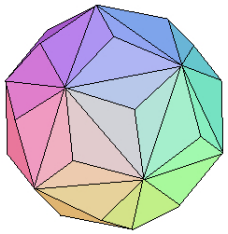
(3,3,3)



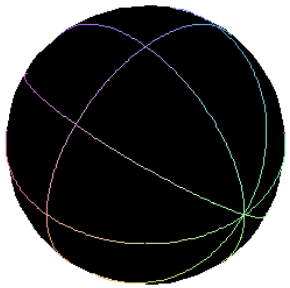
(3,4,4)

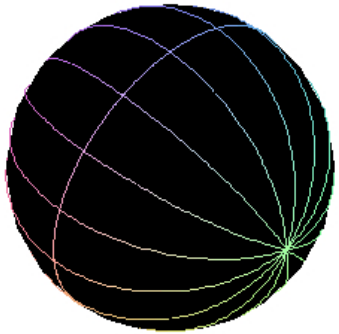


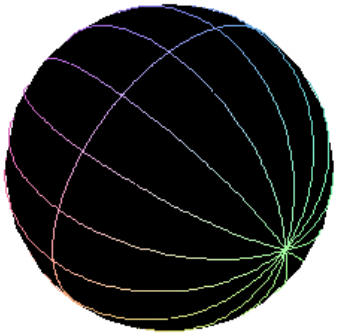
(3,8,8)

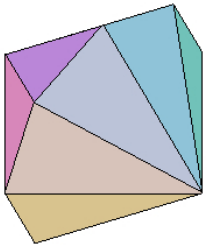


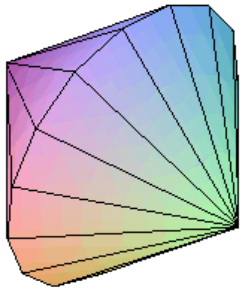
(3,10,10)

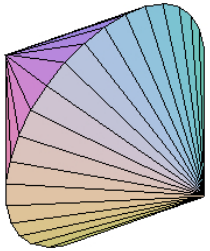




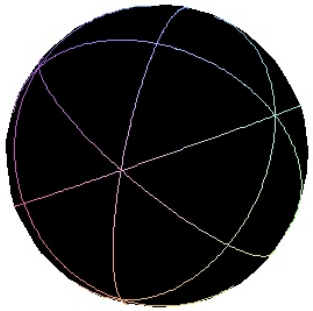


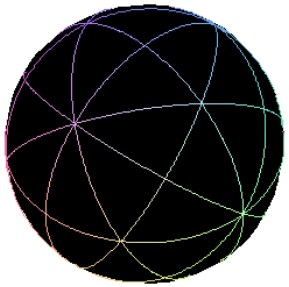


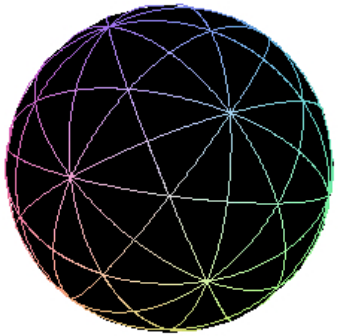


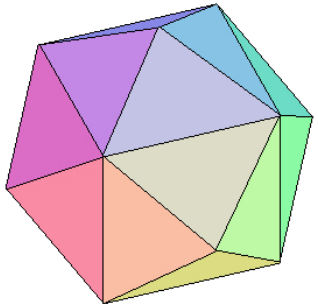


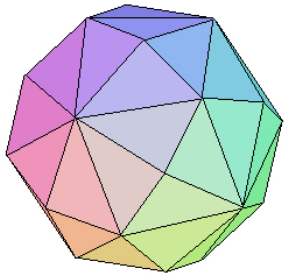
(4,4,8) ... (4,4,15) ... (4,4,30)

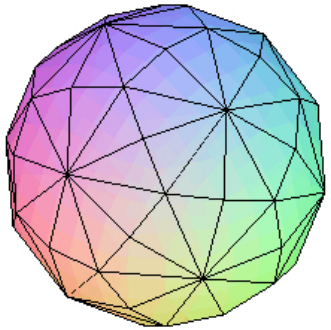




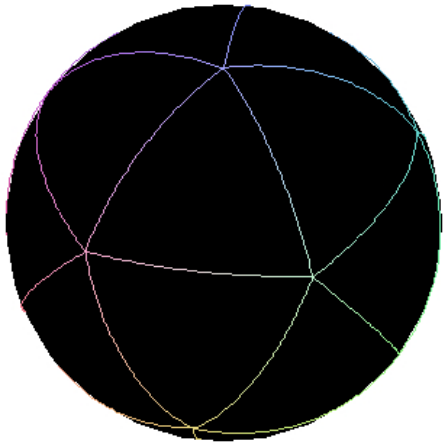


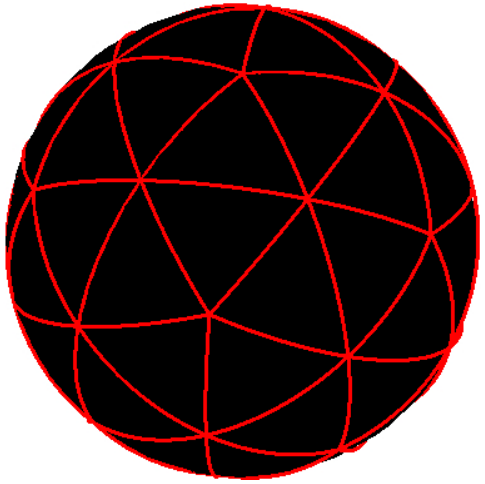




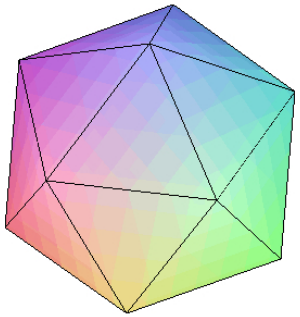


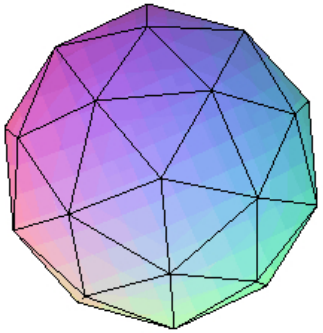
(4,6,6) (4,6,8) (4,6,10)





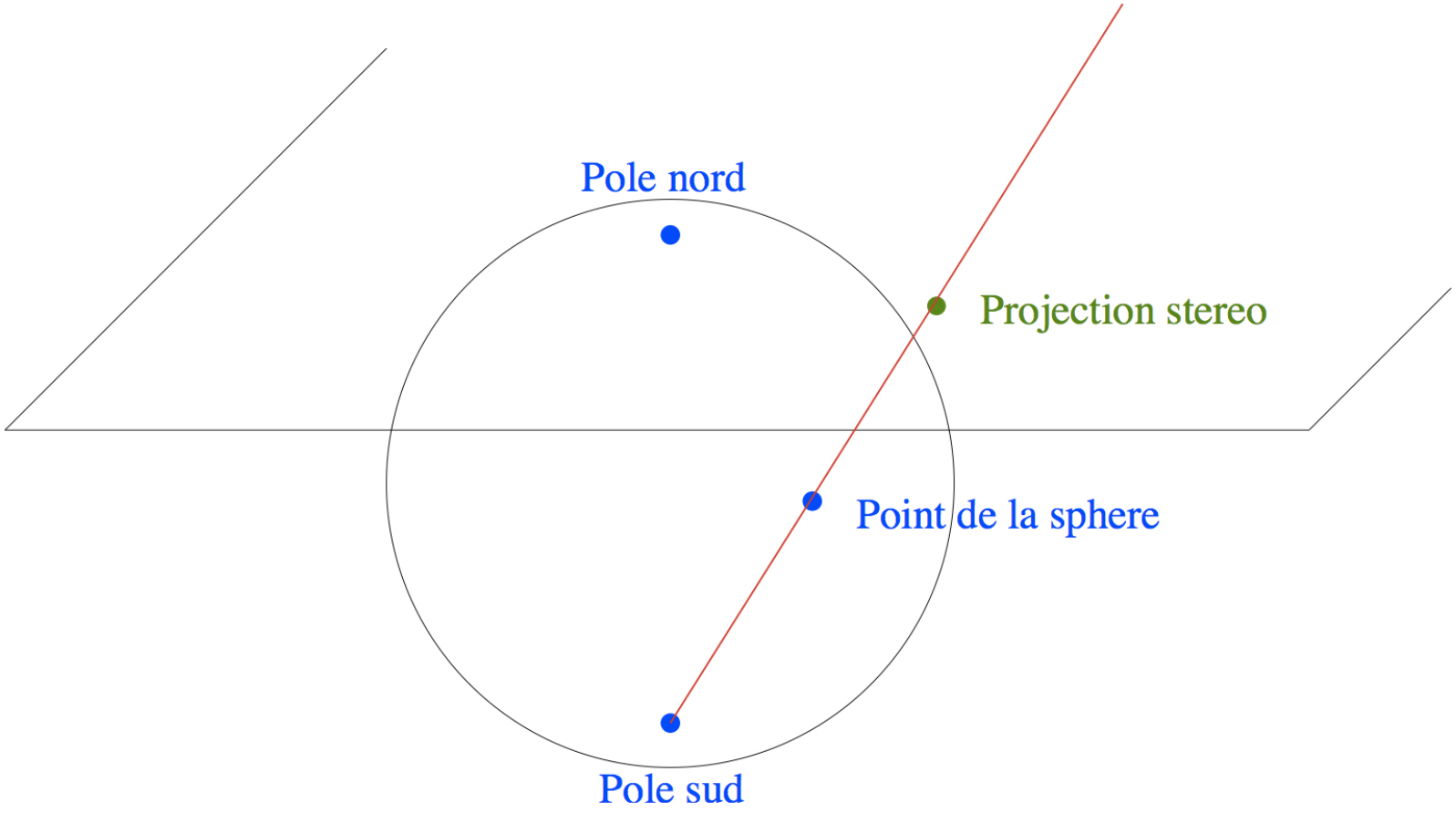
(5,5,5)



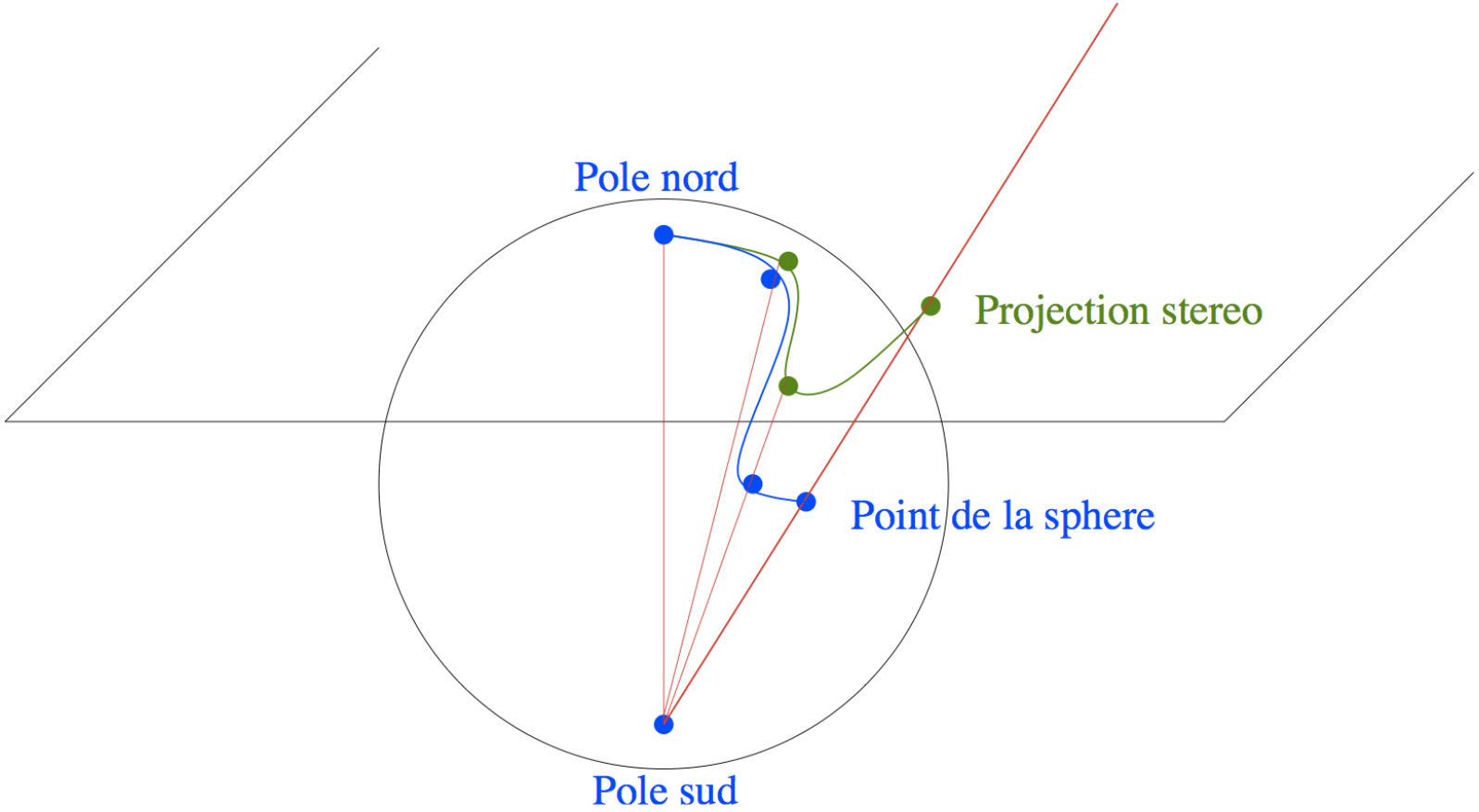


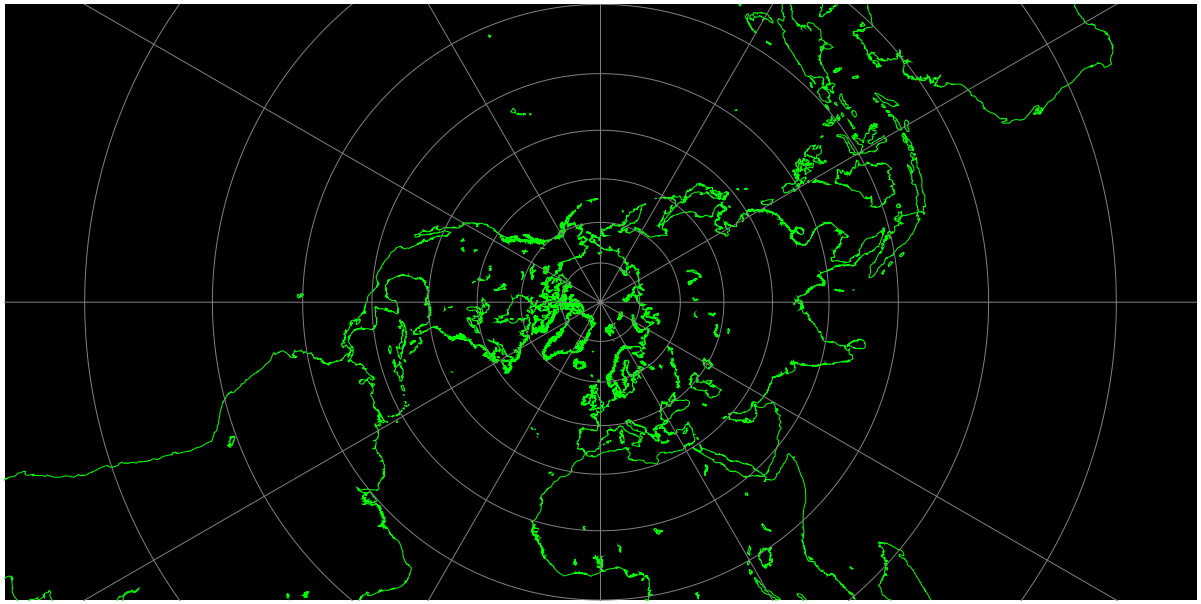
(5,6,6)

On peut dresser une carte plane de toute la Terre privée du pôle sud : la projection stéréographique. Elle a été décrite par Hipparchos dès 150 av. J.-C.



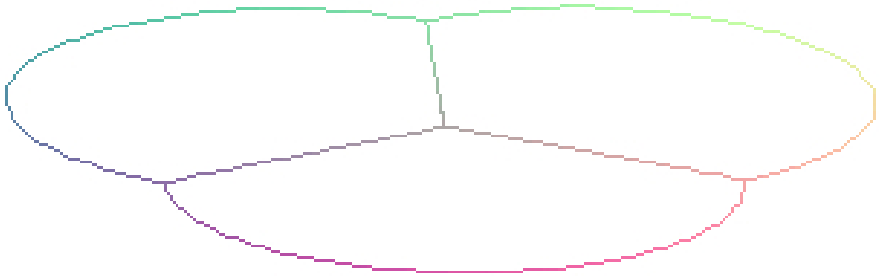
On peut dresser une carte plane de toute la Terre privée du pôle sud : la projection stéréographique. Elle a été décrite par Hipparchos dès 150 av. J.-C.

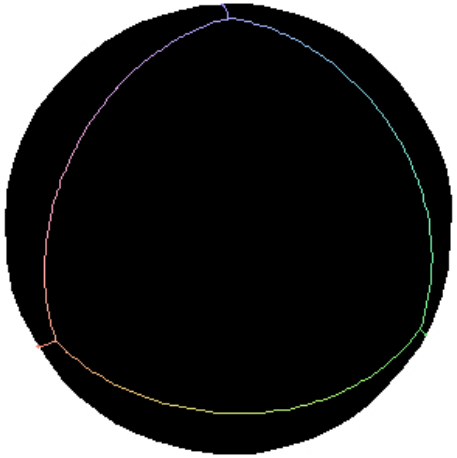


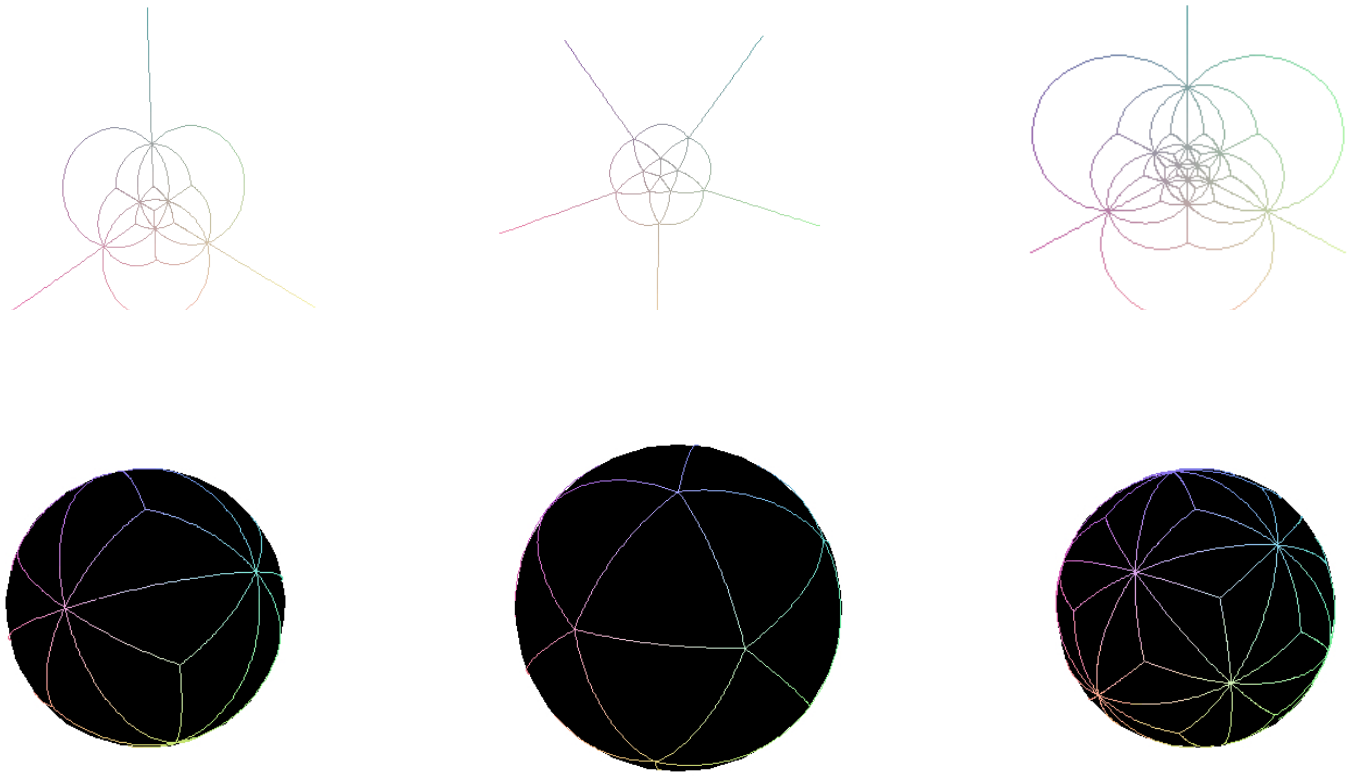


Propriétés.

- La projection stéréographique associe à chaque point de la sphère (autre que le pôle sud) un point du plan et réciproquement.
- Elle préserve les angles.
- Elle envoie les cercles de la sphère sur des cercles ou des droites du plan.

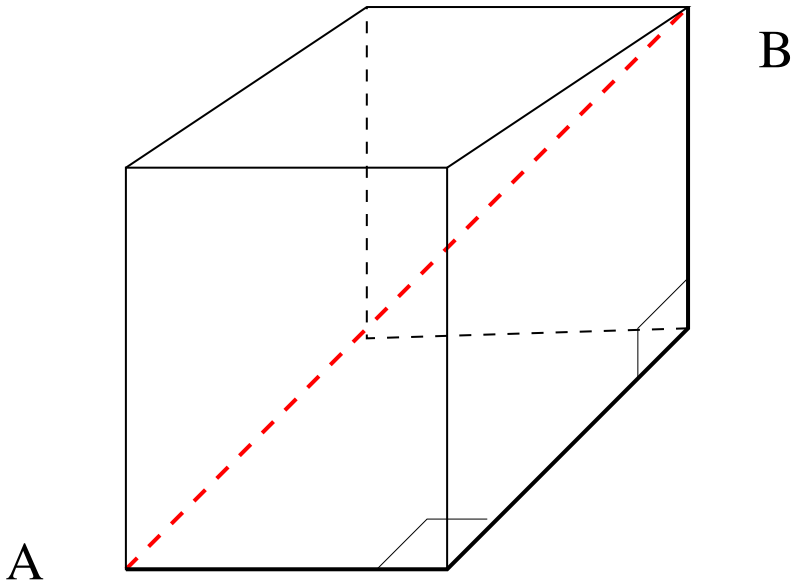




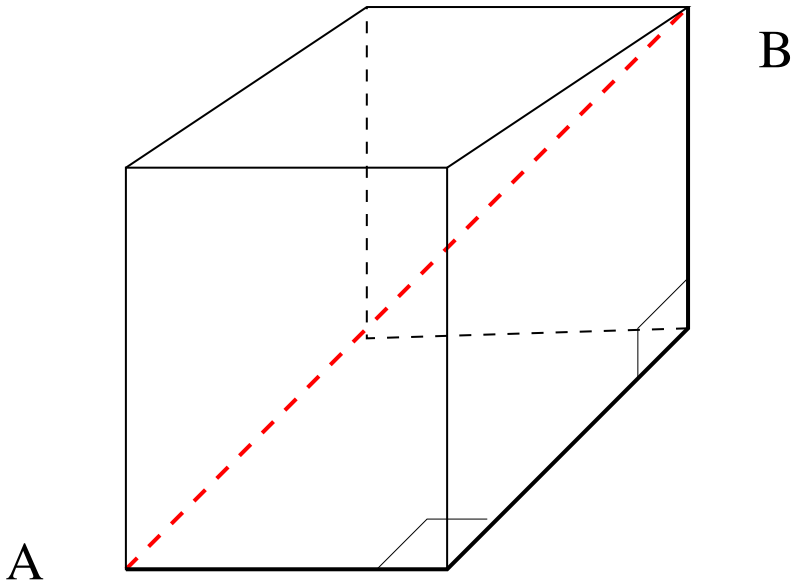


(3,8,8) (5,5,5) (3,10,10)

La distance dans l'espace euclidien : $\sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2}$.

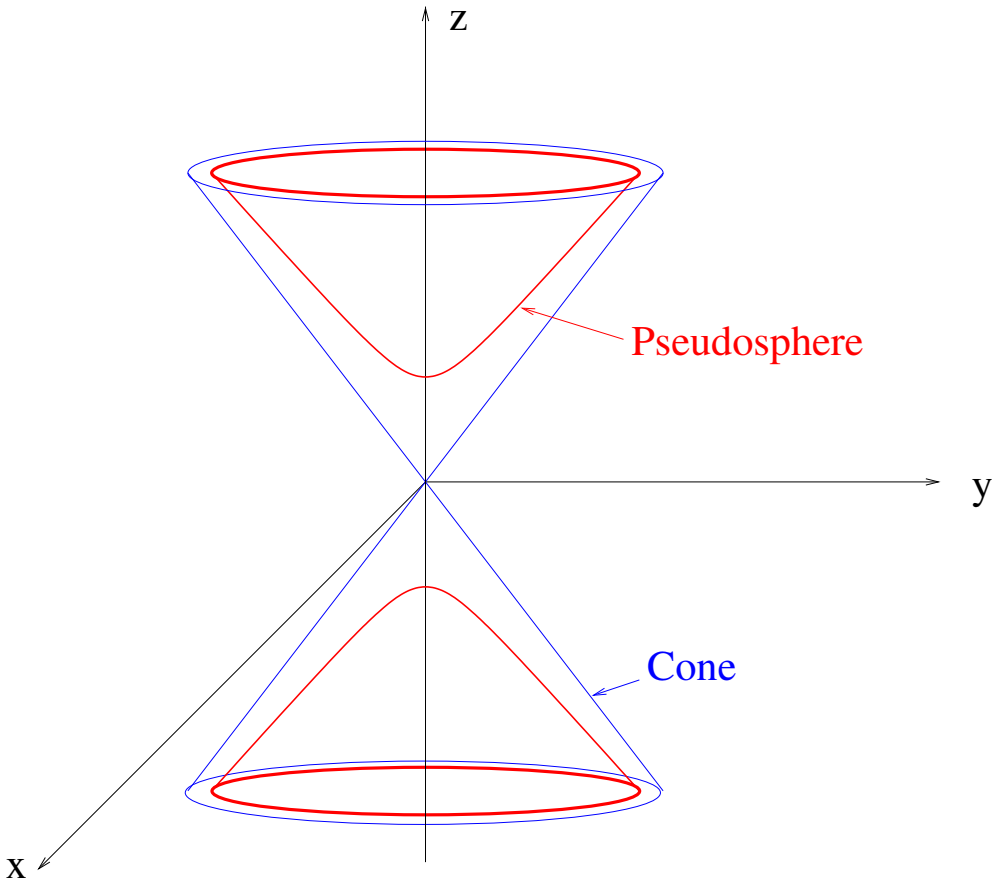


La distance dans l'espace euclidien : $\sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2}$.



Décidons de changer des signes : $\sqrt{-(x_A - x_B)^2 - (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2}$.

La sphère unité $\{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ est changée en la pseudosphère $\{-x^2 - y^2 + z^2 = 1,\ z > 0\}$.



Comme sur la sphère, les plus courts chemins sur la pseudosphère s'obtiennent en la coupant par des plans passant par l'origine.

L'intersection de 3 demi-espaces avec la pseudosphère est un triangle d'angles α, β et γ en radians.

Théorème

La somme des angles $\alpha + \beta + \gamma$ d'un triangle pseudosphérique est toujours $< \pi$, et le nombre $\pi - (\alpha + \beta + \gamma)$ est l'aire du triangle.

Soit un triangle pseudosphérique, d'angles α, β, γ. On effectue des symétries par rapport aux côtés, puis on recommence avec les triangles obtenus.

Problème

A quelle condition obtient-on un pavage de la pseudosphère ?

Soit un triangle pseudosphérique, d'angles α, β, γ. On effectue des symétries par rapport aux côtés, puis on recommence avec les triangles obtenus.

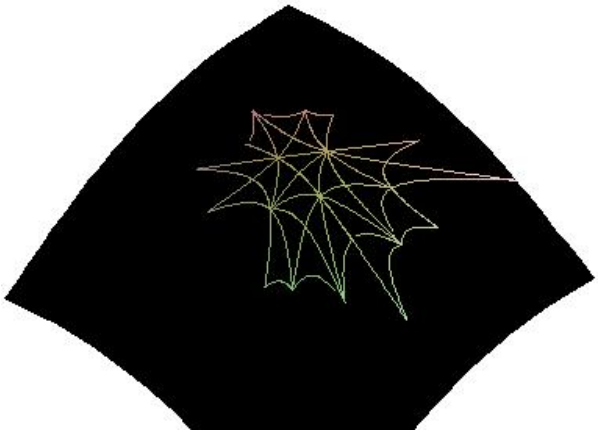
Problème

A quelle condition obtient-on un pavage de la pseudosphère ?

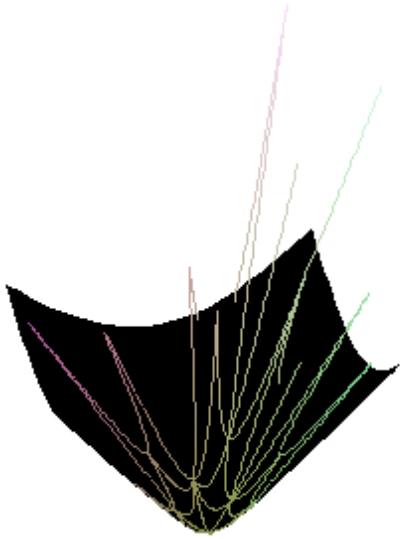
Solution

1. $\alpha = \frac{2\pi}{p}$, $\beta = \frac{2\pi}{q}$, $\gamma = \frac{2\pi}{r}$, *où p, q, r sont entiers,*
2. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < \frac{1}{2}$,
3. *si l'un est impair, les deux autres sont égaux.*

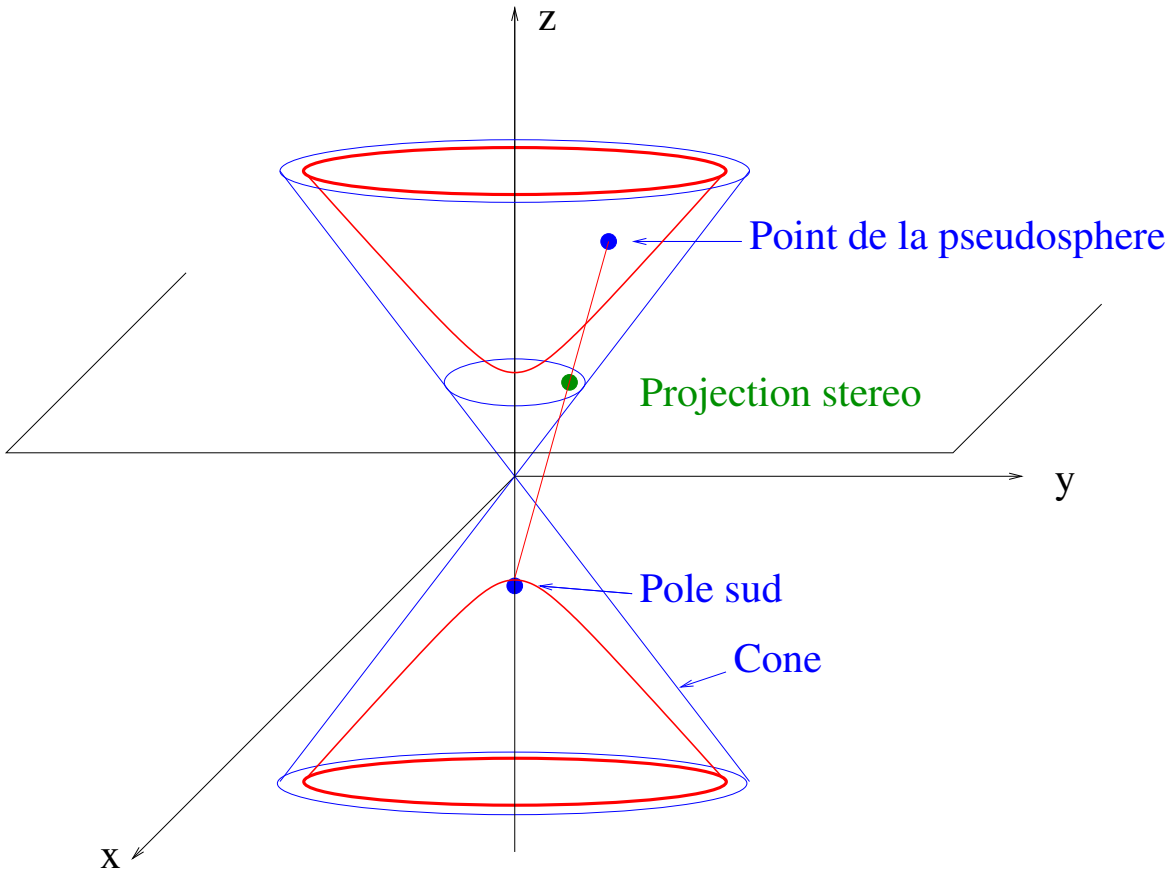
Deux pavages sur la pseudosphère



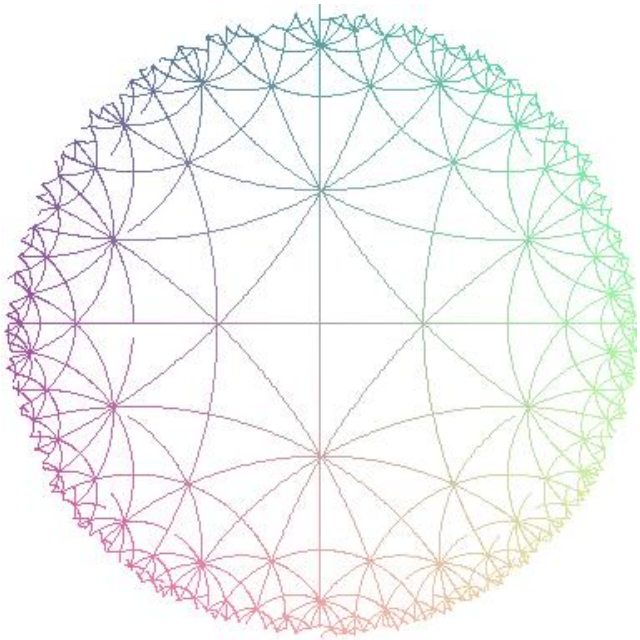
(4,8,12)



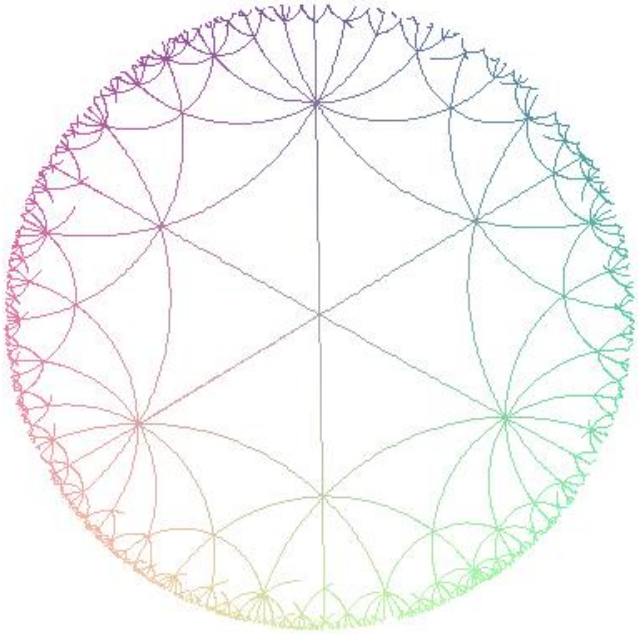
(6,8,12)



Pseudo projection stéréographique



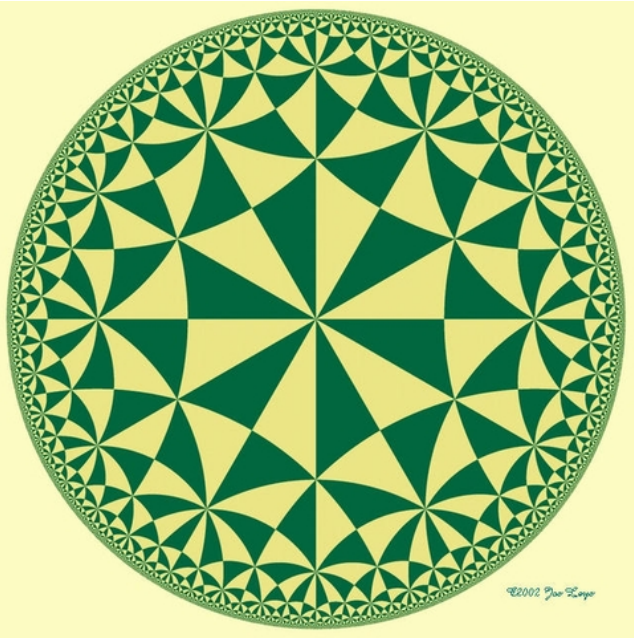
(4,8,12)



(6,8,12)

La géométrie obtenue dans un disque s'appelle géométrie hyperbolique. Découverte par Nikolaï Lobatchevskii (Kazan, Russie) et Janos Bolyai (Hongrie) vers 1829.

Merci à Nicolas Delyon et Patrick Derbès qui ont écrit les programmes Maple de tracé de pavages, dans le cadre de leur projet de 2e année de licence à Orsay.

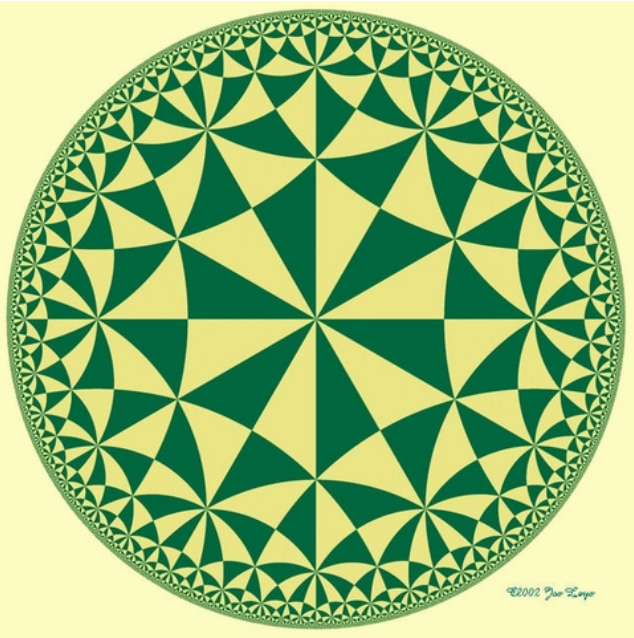


(4,8,12)

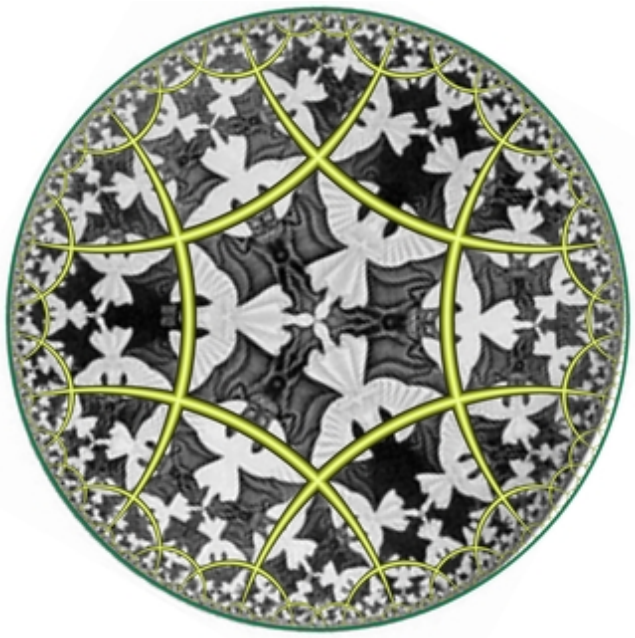
(6,8,12)

Les droites (plus courts chemins) sont les arcs de cercles perpendiculaires au bord du disque.

On voit que par un point donné, on peut faire passer plusieurs parallèles à une droite donnée.



(4,8,12)

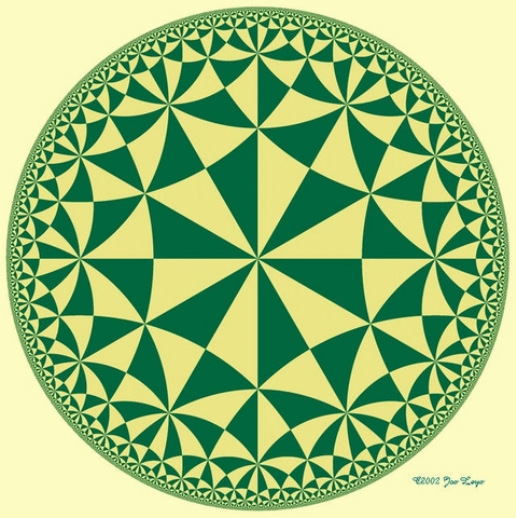


(6,8,12)

Les droites (plus courts chemins) sont les arcs de cercles perpendiculaires au bord du disque.

On voit que par un point donné, on peut faire passer plusieurs parallèles à une droite donnée.

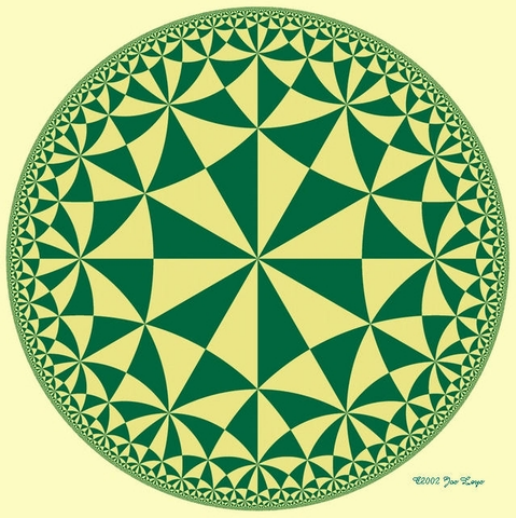
La géométrie hyperbolique satisfait aux postulats d'Euclide sauf le 5ème. Cela montre que ce 5ème postulat ne découle pas des autres, ce que des générations de mathématiciens ont cherché à faire pendant 2000 ans.



Ce pavage est préservé par trois rotations r, s et t d'angles $\frac{2\pi}{2}$, $\frac{2\pi}{4}$ et $\frac{2\pi}{6}$. r satisfait $r \circ r =$ identité, symboliquement $r^2 = 1$. En outre,

$$r^2 = 1, \quad s^4 = 1, \quad t^6 = 1, \quad rst = 1.$$

Réciproquement, étant donné une ou plusieurs *règles de réécriture*, comme $rst^{-1}s^2t^{-1}s^3r^3s^{-3} = 1$, il y a un pavage abstrait associé. C'est un *graphe* (sommets et arêtes). Chacun de ces graphes est un espace sur lequel faire de la géométrie : les plus courts chemins jouent le rôle de droites ; volumes, périmètres ont un sens.



Ce pavage est préservé par trois rotations r, s et t d'angles $\frac{2\pi}{2}$, $\frac{2\pi}{4}$ et $\frac{2\pi}{6}$. r satisfait $r \circ r =$ identité, symboliquement $r^2 = 1$. En outre,

$$r^2 = 1, \quad s^4 = 1, \quad t^6 = 1, \quad rst = 1.$$

Réciproquement, étant donné une ou plusieurs *règles de réécriture*, comme $rst^{-1}s^2t^{-1}s^3r^3s^{-3} = 1$, il y a un pavage abstrait associé. C'est un *graphe* (sommets et arêtes). Chacun de ces graphes est un espace sur lequel faire de la géométrie : les plus courts chemins jouent le rôle de droites ; volumes, périmètres ont un sens.

Géométrie des règles de réécriture, des compilateurs.

Théorème (M. Gromov 1992) : si on tire des règles assez longues au hasard, beaucoup mais pas trop, le pavage abstrait associé ressemble à un pavage hyperbolique, avec une sorte de bord.

Ce bord est fractal, sa dimension n'est pas un nombre entier. Pour étudier ces géométries, on étudie les fonctions sur le bord, leur dérivabilité en un sens approprié.