Non linéarité de groupes et applications harmoniques

P. Pansu

17 janvier 2007

Motivation

Notation

Soit $\mathcal{Y}$ une classe d'espaces métriques. On note $F\mathcal{Y}$ la classe des groupes de type fini Γ tels que toute action isométrique de Γ sur un espace $Y \in \mathcal{Y}$ fixe un point.

Motivation

Notation

Soit $\mathcal{Y}$ une classe d'espaces métriques. On note $F\mathcal{Y}$ la classe des groupes de type fini Γ tels que toute action isométrique de Γ sur un espace $Y \in \mathcal{Y}$ fixe un point.

Exemples

- $\mathcal{A}$ ={arbres simpliciaux}. Alors $F\mathcal{A}$ est la classe des groupes qui ne se décomposent pas en somme amalgamée (Bass-Serre).
- $\mathcal{H}$ ={espaces de Hilbert}. Alors $F\mathcal{H} \Leftrightarrow (T)$ (Delorme-Guichardet).
- $\mathcal{L}^p = \{L^p(X,\mu)\}$. Alors $F\mathcal{L}^p$ est utile pour étudier les actions différentiables sur des variétés compactes (Fisher-Margulis).
- $\mathcal{SI}$ ={espaces symétriques et immeubles euclidiens de type $\tilde{A}_n$, $n \geq 2$}. Alors $F\mathcal{SI} \Leftrightarrow FRT$ type de représentation fini (Bass ?).

Motivation

Notation

Soit $\mathcal{Y}$ une classe d'espaces métriques. On note $F\mathcal{Y}$ la classe des groupes de type fini Γ tels que toute action isométrique de Γ sur un espace $Y \in \mathcal{Y}$ fixe un point.

Exemples

- $\mathcal{A}$ ={arbres simpliciaux}. Alors $F\mathcal{A}$ est la classe des groupes qui ne se décomposent pas en somme amalgamée (Bass-Serre).
- $\mathcal{H}$ ={espaces de Hilbert}. Alors $F\mathcal{H} \Leftrightarrow (T)$ (Delorme-Guichardet).
- $\mathcal{L}^p = \{L^p(X, \mu)\}$. Alors $F\mathcal{L}^p$ est utile pour étudier les actions différentiables sur des variétés compactes (Fisher-Margulis).
- $\mathcal{SI}$ ={espaces symétriques et immeubles euclidiens de type $\tilde{A}_n$, $n \geq 2$}. Alors $F\mathcal{SI} \Leftrightarrow FRT$ type de représentation fini (Bass ?).

Conjecture

(Gromov, 2003). Les groupes aléatoires, dans certains modèles, ont la propriété $F\mathcal{SI}$.

Notation

Soit $\mathcal{Y}$ une classe d'espaces métriques. On note $F\mathcal{Y}$ la classe des groupes de type fini Γ tels que toute action isométrique de Γ sur un espace $Y \in \mathcal{Y}$ fixe un point.

Exemples

- $\mathcal{A}$ ={arbres simpliciaux}. Alors $F\mathcal{A}$ est la classe des groupes qui ne se décomposent pas en somme amalgamée (Bass-Serre).
- $\mathcal{H}$ ={espaces de Hilbert}. Alors $F\mathcal{H} \Leftrightarrow (T)$ (Delorme-Guichardet).
- $\mathcal{L}^p = \{L^p(X, \mu)\}$. Alors $F\mathcal{L}^p$ est utile pour étudier les actions différentiables sur des variétés compactes (Fisher-Margulis).
- $\mathcal{SI}$ ={espaces symétriques et immeubles euclidiens de type $\tilde{A}_n$, $n \geq 2$}. Alors $F\mathcal{SI} \Leftrightarrow FRT$ type de représentation fini (Bass ?).

Conjecture

(Gromov, 2003). Les groupes aléatoires, dans certains modèles, ont la propriété $F\mathcal{SI}$.

C'est cette conjecture qui motive le présent laïus.

Définition

(H. Bass). Un groupe a un type de représentation fini si toute représentation linéaire de dimension finie factorise par un groupe fini.

Définition

(H. Bass). Un groupe a un type de représentation fini si toute représentation linéaire de dimension finie factorise par un groupe fini.

Preuve. de $F\mathcal{SI} \Rightarrow$ FRT.
Soit Γ un groupe qui possède la propriété $F\mathcal{SI}$, $h : \Gamma \to Gl(n, \mathbb{C})$ un homomorphisme indécomposable. On montre successivement que

- après restriction à un sous-groupe d'indice fini de Γ, h est à valeurs dans $Sl(n, \mathbb{C})$: action par translation sur $\mathbb{C}$;

Définition

(H. Bass). Un groupe a un type de représentation fini si toute représentation linéaire de dimension finie factorise par un groupe fini.

Preuve. de $F\mathcal{SI} \Rightarrow$ FRT.
Soit Γ un groupe qui possède la propriété $F\mathcal{SI}$, $h : \Gamma \to Gl(n, \mathbb{C})$ un homomorphisme indécomposable. On montre successivement que

- après restriction à un sous-groupe d'indice fini de Γ, h est à valeurs dans $Sl(n, \mathbb{C})$: action par translation sur $\mathbb{C}$;
- h est unitarisable : action sur l'espace symétrique $Sl(n, \mathbb{C})/SU(n)$;

$\mathcal{FSI} \Rightarrow FRT$

Définition

(H. Bass). Un groupe a un type de représentation fini si toute représentation linéaire de dimension finie factorise par un groupe fini.

Preuve. de $F\mathcal{SI} \Rightarrow$ FRT.
Soit Γ un groupe qui possède la propriété $F\mathcal{SI}$, $h : \Gamma \to Gl(n, \mathbb{C})$ un homomorphisme indécomposable. On montre successivement que

- après restriction à un sous-groupe d'indice fini de Γ, h est à valeurs dans $Sl(n, \mathbb{C})$: action par translation sur $\mathbb{C}$;
- h est unitarisable : action sur l'espace symétrique $Sl(n, \mathbb{C})/SU(n)$;
- h est localement rigide, i.e. un homomorphisme $h' : \Gamma \to Sl(n, \mathbb{C})$ suffisamment voisin de h est conjugué à h : actions sur les espaces euclidiens ;

Définition

(H. Bass). Un groupe a un type de représentation fini si toute représentation linéaire de dimension finie factorise par un groupe fini.

Preuve. de $\mathcal{FSI} \Rightarrow$ FRT.
Soit Γ un groupe qui possède la propriété $\mathcal{FSI}$, $h : \Gamma \to Gl(n, \mathbb{C})$ un homomorphisme indécomposable. On montre successivement que

- après restriction à un sous-groupe d'indice fini de Γ, h est à valeurs dans $Sl(n, \mathbb{C})$: action par translation sur $\mathbb{C}$;
- h est unitarisable : action sur l'espace symétrique $Sl(n, \mathbb{C})/SU(n)$;
- h est localement rigide, i.e. un homomorphisme $h' : \Gamma \to Sl(n, \mathbb{C})$ suffisamment voisin de h est conjugué à h : actions sur les espaces euclidiens ;
- à conjugaison près, h est à valeurs dans $Sl(n, \bar{\mathbb{Q}})$ (Nullstellensatz) ; après extension des scalaires, on obtient un homomorphisme $\tilde{h}$ à valeurs dans $Sl(nd, \mathbb{Q})$;

Définition

(H. Bass). Un groupe a un type de représentation fini si toute représentation linéaire de dimension finie factorise par un groupe fini.

Preuve. de $\mathcal{FSI} \Rightarrow$ FRT.
Soit Γ un groupe qui possède la propriété $\mathcal{FSI}$, $h : \Gamma \to Gl(n, \mathbb{C})$ un homomorphisme indécomposable. On montre successivement que

- après restriction à un sous-groupe d'indice fini de Γ, h est à valeurs dans $Sl(n, \mathbb{C})$: action par translation sur $\mathbb{C}$;
- h est unitarisable : action sur l'espace symétrique $Sl(n, \mathbb{C})/SU(n)$;
- h est localement rigide, i.e. un homomorphisme $h' : \Gamma \to Sl(n, \mathbb{C})$ suffisamment voisin de h est conjugué à h : actions sur les espaces euclidiens ;
- à conjugaison près, h est à valeurs dans $Sl(n, \bar{\mathbb{Q}})$ (Nullstellensatz) ; après extension des scalaires, on obtient un homomorphisme $\tilde{h}$ à valeurs dans $Sl(nd, \mathbb{Q})$;
- après restriction à un sous-groupe d'indice fini de Γ, $\tilde{h}$ est à valeurs dans $Sl(nd, \mathbb{Z})$: action sur l'immeuble de $Sl(nd, \mathbb{Q}_p)$;

Définition

(H. Bass). Un groupe a un type de représentation fini si toute représentation linéaire de dimension finie factorise par un groupe fini.

Preuve. de $\mathcal{FSI} \Rightarrow$ FRT.
Soit Γ un groupe qui possède la propriété $\mathcal{FSI}$, $h : \Gamma \to Gl(n, \mathbb{C})$ un homomorphisme indécomposable. On montre successivement que

- après restriction à un sous-groupe d'indice fini de Γ, h est à valeurs dans $Sl(n, \mathbb{C})$: action par translation sur $\mathbb{C}$;
- h est unitarisable : action sur l'espace symétrique $Sl(n, \mathbb{C})/SU(n)$;
- h est localement rigide, i.e. un homomorphisme $h' : \Gamma \to Sl(n, \mathbb{C})$ suffisamment voisin de h est conjugué à h : actions sur les espaces euclidiens ;
- à conjugaison près, h est à valeurs dans $Sl(n, \bar{\mathbb{Q}})$ (Nullstellensatz) ; après extension des scalaires, on obtient un homomorphisme $\tilde{h}$ à valeurs dans $Sl(nd, \mathbb{Q})$;
- après restriction à un sous-groupe d'indice fini de Γ, $\tilde{h}$ est à valeurs dans $Sl(nd, \mathbb{Z})$: action sur l'immeuble de $Sl(nd, \mathbb{Q}_p)$;
- $\tilde{h}$ est à valeurs dans un sous-groupe compact de $Sl(nd, \mathbb{C})$: action sur l'espace symétrique $Sl(nd, \mathbb{C})/SU(nd)$.

Définition

(H. Bass). Un groupe a un type de représentation fini si toute représentation linéaire de dimension finie factorise par un groupe fini.

Preuve. de $\mathcal{FSI} \Rightarrow$ FRT.
Soit Γ un groupe qui possède la propriété $\mathcal{FSI}$, $h : \Gamma \to Gl(n, \mathbb{C})$ un homomorphisme indécomposable. On montre successivement que

- après restriction à un sous-groupe d'indice fini de Γ, h est à valeurs dans $Sl(n, \mathbb{C})$: action par translation sur $\mathbb{C}$;
- h est unitarisable : action sur l'espace symétrique $Sl(n, \mathbb{C})/SU(n)$;
- h est localement rigide, i.e. un homomorphisme $h' : \Gamma \to Sl(n, \mathbb{C})$ suffisamment voisin de h est conjugué à h : actions sur les espaces euclidiens ;
- à conjugaison près, h est à valeurs dans $Sl(n, \bar{\mathbb{Q}})$ (Nullstellensatz) ; après extension des scalaires, on obtient un homomorphisme $\tilde{h}$ à valeurs dans $Sl(nd, \mathbb{Q})$;
- après restriction à un sous-groupe d'indice fini de Γ, $\tilde{h}$ est à valeurs dans $Sl(nd, \mathbb{Z})$: action sur l'immeuble de $Sl(nd, \mathbb{Q}_p)$;
- $\tilde{h}$ est à valeurs dans un sous-groupe compact de $Sl(nd, \mathbb{C})$: action sur l'espace symétrique $Sl(nd, \mathbb{C})/SU(nd)$.

Il en résulte que $h(\Gamma)$ est fini.

Preuve compliquée d'un résultat simple (et sans intérêt).

Proposition

Si M est une variété riemannienne compacte à courbure de Ricci positive, toute action isométrique (cocompacte) de $\Gamma = \pi_1(M)$ sur une variété riemannienne simplement connexe Y à courbure sectionnelle négative ou nulle fixe un point.

Preuve compliquée d'un résultat simple (et sans intérêt).

Proposition

Si M est une variété riemannienne compacte à courbure de Ricci positive, toute action isométrique (cocompacte) de $\Gamma = \pi_1(M)$ sur une variété riemannienne simplement connexe Y à courbure sectionnelle négative ou nulle fixe un point.

Preuve.

- Il existe des applications équivariantes $\tilde{M} \to Y$ d'énergie finie.
- Parmi celles-ci, il en existe une, notée f, qui minimise l'énergie (Eells-Sampson), elle satisfait $d^*df = 0$.
- La formule de Bochner s'écrit

$$\int_M |Ddf|^2 - |d^*df|^2 + Ricci^M(df, df) - f^*R^Y = 0.$$

  Si $Ricci^M > 0$ et $R^Y \leq 0$, nécessairement $df = 0$.
- La valeur constante de f est un point fixe de l'action. q.e.d.

Définition

Soit C un complexe simplicial de dimension 2. On munit chaque arête d'un poids égal au nombre de faces qui la contienne. De même, le poids d'un sommet est la somme des poids des arêtes qui le contiennent.

Définition

Soit C un complexe simplicial de dimension 2. On munit chaque arête d'un poids égal au nombre de faces qui la contienne. De même, le poids d'un sommet est la somme des poids des arêtes qui le contiennent.
Si $f : C^0 \to Y$ est à valeurs dans un espace métrique, l'énergie de f est

$$E(f) = \sum_{e \in C^1} m(e) d(f(ori(e)), f(ext(e)))^2.$$

Définition

Soit C un complexe simplicial de dimension 2. On munit chaque arête d'un poids égal au nombre de faces qui la contienne. De même, le poids d'un sommet est la somme des poids des arêtes qui le contiennent.
Si $f : C^0 \to Y$ est à valeurs dans un espace métrique, l'énergie de f est

$$E(f) = \sum_{e \in C^1} m(e) d(f(ori(e)), f(ext(e)))^2.$$

Définition

Soit Z un complexe simplicial fini, de groupe fondamental Γ, soit X son revêtement universel. Soit Y un espace métrique sur lequel Γ agit isométriquement. L'énergie d'une application équivariante $f : X \to Y$ est

$$E(f) = \sum_{e \in Z^1} m(e) d(f(ori(\tilde{e})), f(extr(\tilde{e}))^2,$$

où $\tilde{e}$ est une arête de X au-dessus de l'arête e de Z.

Définition

On dit que $f : X \to Y$ est harmonique si elle minimise l'énergie parmi les applications équivariantes.

Définition

On dit que $f : X \to Y$ est harmonique si elle minimise l'énergie parmi les applications équivariantes.

Définition

Soit C un graphe fini pondéré et $g : C^0 \to Y$. On note

$$d^2(g, y) = \sum_{c \in C^0} m(c) d(g(c), y)^2,$$

et

$$S(g) = \inf_{y \in Y} d^2(g, y).$$

Définition

On dit que $f : X \to Y$ est harmonique si elle minimise l'énergie parmi les applications équivariantes.

Définition

Soit C un graphe fini pondéré et $g : C^0 \to Y$. On note

$$d^2(g, y) = \sum_{c \in C^0} m(c) d(g(c), y)^2,$$

et

$$S(g) = \inf_{y \in Y} d^2(g, y).$$

Exemple

Si $Y = \mathbb{R}$, $S(g) = \| g - \oint g \|^2_{\ell^2}$.

Définition

On dit que $f : X \to Y$ est harmonique si elle minimise l'énergie parmi les applications équivariantes.

Définition

Soit C un graphe fini pondéré et $g : C^0 \to Y$. On note

$$d^2(g, y) = \sum_{c \in C^0} m(c) d(g(c), y)^2,$$

et

$$S(g) = \inf_{y \in Y} d^2(g, y).$$

Exemple

Si $Y = \mathbb{R}$, $S(g) = \| g - \oint g \|_{\ell^2}^2$.

Proposition

Soit $f : X \to Y$ équivariante. Alors f est harmonique si pour tout sommet x, $f(x)$ minimise $y \mapsto d^2(f_{| lien(x)}, y)$, i.e.

$$d^2(f_{| lien(x)}, f(x)) = S(f_{| lien(x)}).$$

Théorème

(Remonte à Eells-Sampson, 1964. Enoncé sous cette forme par Gromov, 2002). *Soit $\mathcal{Y} \subset CAT(0)$ une classe fermée par cônes asymptotiques. Un groupe de type fini Γ a la propriété $F\mathcal{Y}$ si et seulement si pour tout $Y \in \mathcal{Y}$, toute application Γ-équivariante et harmonique $X \to Y$ est nécessairement constante.*

Théorème

(Remonte à Eells-Sampson, 1964. Enoncé sous cette forme par Gromov, 2002). *Soit $\mathcal{Y} \subset CAT(0)$ une classe fermée par cônes asymptotiques. Un groupe de type fini Γ a la propriété $F\mathcal{Y}$ si et seulement si pour tout $Y \in \mathcal{Y}$, toute application Γ-équivariante et harmonique $X \to Y$ est nécessairement constante.*

Preuve. *(D'après U. Mayer, H. Izeki/T. Kondo/S. Nayatani).*

1. Sur l'espace des applications équivariantes, l'énergie E est une fonction convexe.

Théorème

(Remonte à Eells-Sampson, 1964. Enoncé sous cette forme par Gromov, 2002). *Soit $\mathcal{Y} \subset CAT(0)$ une classe fermée par cônes asymptotiques. Un groupe de type fini Γ a la propriété $F\mathcal{Y}$ si et seulement si pour tout $Y \in \mathcal{Y}$, toute application Γ-équivariante et harmonique $X \to Y$ est nécessairement constante.*

Preuve. *(D'après U. Mayer, H. Izeki/T. Kondo/S. Nayatani).*

1. Sur l'espace des applications équivariantes, l'énergie E est une fonction convexe.
2. *(Jost, Mayer).* On peut donner un sens au gradient ∇E, et au flot de la chaleur f_t. Ce dernier est défini pour tout $t \geq 0$. Il satisfait $\frac{\partial E(f_t)}{\partial t} = -|\nabla E|^2(f_t)$.

Théorème

(Remonte à Eells-Sampson, 1964. Enoncé sous cette forme par Gromov, 2002). *Soit* $\mathcal{Y} \subset CAT(0)$ *une classe fermée par cônes asymptotiques. Un groupe de type fini* Γ *a la propriété* $F\mathcal{Y}$ *si et seulement si pour tout* $Y \in \mathcal{Y}$*, toute application* Γ*-équivariante et harmonique* $X \to Y$ *est nécessairement constante.*

Preuve. *(D'après U. Mayer, H. Izeki/T. Kondo/S. Nayatani).*

1. Sur l'espace des applications équivariantes, l'énergie E est une fonction convexe.
2. *(Jost, Mayer).* On peut donner un sens au gradient ∇E, et au flot de la chaleur f_t. Ce dernier est défini pour tout $t \geq 0$. Il satisfait $\frac{\partial E(f_t)}{\partial t} = -|\nabla E|^2(f_t)$.
3. S'il existe une constante C telle que pour tout $t > 0$, $E(f_t) \leq C\, |\nabla E|^2(f_t)$, alors f_t converge vers une constante.

Théorème

(Remonte à Eells-Sampson, 1964. Enoncé sous cette forme par Gromov, 2002). *Soit $\mathcal{Y} \subset CAT(0)$ une classe fermée par cônes asymptotiques. Un groupe de type fini Γ a la propriété $F\mathcal{Y}$ si et seulement si pour tout $Y \in \mathcal{Y}$, toute application Γ-équivariante et harmonique $X \to Y$ est nécessairement constante.*

Preuve. *(D'après U. Mayer, H. Izeki/T. Kondo/S. Nayatani).*

1. Sur l'espace des applications équivariantes, l'énergie E est une fonction convexe.
2. *(Jost, Mayer).* On peut donner un sens au gradient ∇E, et au flot de la chaleur f_t. Ce dernier est défini pour tout $t \geq 0$. Il satisfait $\frac{\partial E(f_t)}{\partial t} = -|\nabla E|^2(f_t)$.
3. S'il existe une constante C telle que pour tout $t > 0$, $E(f_t) \leq C\,|\nabla E|^2(f_t)$, alors f_t converge vers une constante.
4. Sinon, une sous-suite de $E(f_t)^{-1/2}|\nabla E|(f_t) \to 0$. On fixe un ultrafiltre non principal ω. Dans les espaces homothétiques $Y_t = (Y, E(f_t)^{-1/2}d)$, $\lim_\omega f_t = f_\omega : X \to Y_\omega$ existe, elle est non constante, harmonique et équivariante pour une action limite.

Définition

(M.T. Wang, 1998). *Soit* C *un graphe fini,* $g^0 : C \to Y$ *non constante. Son* quotient de Rayleigh *est*

$$RQ(g) = \frac{E(g)}{S(g)}.$$

Définition

(M.T. Wang, 1998). *Soit* C *un graphe fini,* $g^0 : C \to Y$ *non constante. Son* quotient de Rayleigh *est*

$$RQ(g) = \frac{E(g)}{S(g)}.$$

Le bas du spectre *de* C *relativement à* Y *est la borne inférieure des quotients de Rayleigh des applications non constantes* $C \to Y$*,*

$$\lambda(C, Y) = \inf_{g : C \to Y} RQ(g).$$

Définition

(M.T. Wang, 1998). *Soit C un graphe fini, $g^0 : C \to Y$ non constante. Son* quotient de Rayleigh *est*

$$RQ(g) = \frac{E(g)}{S(g)}.$$

Le bas du spectre *de C relativement à Y est la borne inférieure des quotients de Rayleigh des applications non constantes $C \to Y$,*

$$\lambda(C, Y) = \inf_{g:C \to Y} RQ(g).$$

Exemple

Quand $Y = \mathbb{R}$, le bas du spectre est égal à la première valeur propre du laplacien combinatoire $\Delta g(c) = \sum_{voisins\ c'\ of\ c} m(c, c')(g(c) - g(c'))$.

La formule de Garland

Découverte par H. Garland en 1972 pour les quotients finis d'immeubles euclidiens, généralisée par A. Borel (1973) aux complexes simpliciaux quelconques. Utilisée par A. Zuk pour établir la propriété (T) de Kazhdan. La version non linéaire est dûe à M.T. Wang (1998).

La formule de Garland

Découverte par H. Garland en 1972 pour les quotients finis d'immeubles euclidiens, généralisée par A. Borel (1973) aux complexes simpliciaux quelconques. Utilisée par A. Zuk pour établir la propriété (T) de Kazhdan. La version non linéaire est dûe à M.T. Wang (1998).

Théorème

(H. Garland, 1972, M.T. Wang, 1998). *Soit Z un complexe simplicial fini de dimension 2, X son revêtement universel, $\Gamma = \pi_1(Z)$ agissant isométriquement sur un espace métrique Y. Soit $f : X \to Y$ une application équivariante. Pour $x \in X$, on note*

$$ED(f,x) = \frac{1}{2} d^2(f_{|lien(x)}, f(x))^2.$$

Alors

$$E(f) = \sum_{z \in Z} ED(f,x).$$

Découverte par H. Garland en 1972 pour les quotients finis d'immeubles euclidiens, généralisée par A. Borel (1973) aux complexes simpliciaux quelconques. Utilisée par A. Zuk pour établir la propriété (T) de Kazhdan. La version non linéaire est dûe à M.T. Wang (1998).

Théorème

(H. Garland, 1972, M.T. Wang, 1998). *Soit Z un complexe simplicial fini de dimension 2, X son revêtement universel, $\Gamma = \pi_1(Z)$ agissant isométriquement sur un espace métrique Y. Soit $f : X \to Y$ une application équivariante. Pour $x \in X$, on note*

$$ED(f,x) = \frac{1}{2} d^2(f_{|lien(x)}, f(x))^2.$$

Alors

$$E(f) = \sum_{z \in Z} ED(f,x).$$

Si de plus f est harmonique, alors

$$E(f) = 2 \sum_{z \in Z} RQ(f_{|lien(x)}) ED(f,x).$$

Découverte par H. Garland en 1972 pour les quotients finis d'immeubles euclidiens, généralisée par A. Borel (1973) aux complexes simpliciaux quelconques. Utilisée par A. Zuk pour établir la propriété (T) de Kazhdan. La version non linéaire est dûe à M.T. Wang (1998).

Théorème

(H. Garland, 1972, M.T. Wang, 1998). *Soit Z un complexe simplicial fini de dimension 2, X son revêtement universel, $\Gamma = \pi_1(Z)$ agissant isométriquement sur un espace métrique Y. Soit $f : X \to Y$ une application équivariante. Pour $x \in X$, on note*

$$ED(f,x) = \frac{1}{2} d^2(f_{|lien(x)}, f(x))^2.$$

Alors

$$E(f) = \sum_{z \in Z} ED(f,x).$$

Si de plus f est harmonique, alors

$$E(f) = 2 \sum_{z \in Z} RQ(f_{|lien(x)}) ED(f,x).$$

En particulier, si, pour tout $x \in X$, $\lambda(lien(x), Y) > \frac{1}{2}$, alors toute application harmonique équivariante $X \to Y$ est constante.

Preuve de la formule de Garland

$$\begin{aligned}
E(f) &= \frac{1}{2}\sum_{z\in Z}\sum_{z'\sim z} m(x,x')d(f(x),f(x'))^2 \\
&= \sum_{z\in Z}\frac{1}{2}\sum_{x'\in lien(x)} m(x,x')d(f(x),f(x'))^2 \\
&= \sum_{z\in Z} ED(f,x).
\end{aligned}$$

Preuve de la formule de Garland

$$\begin{aligned} E(f) &= \frac{1}{2}\sum_{z\in Z}\sum_{z'\sim z} m(x,x')d(f(x),f(x'))^2 \\ &= \sum_{z\in Z}\frac{1}{2}\sum_{x'\in lien(x)} m(x,x')d(f(x),f(x'))^2 \\ &= \sum_{z\in Z} ED(f,x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(f) &= \sum_{\text{arêtes } (z',z'') \text{ de } Z} m(x',x'')d(f(x'),f(x''))^2 \\ &= \sum_{\text{faces } (z,z',z'') \text{ de } Z} m(x,x',x'')d(f(x'),f(x''))^2 \\ &= \sum_{z\in Z} E(f_{|lien(x)}). \end{aligned}$$

Preuve de la formule de Garland

$$\begin{aligned} E(f) &= \frac{1}{2}\sum_{z\in Z}\sum_{z'\sim z} m(x,x')d(f(x),f(x'))^2 \\ &= \sum_{z\in Z}\frac{1}{2}\sum_{x'\in lien(x)} m(x,x')d(f(x),f(x'))^2 \\ &= \sum_{z\in Z} ED(f,x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(f) &= \sum_{\text{arêtes } (z',z'') \text{ de } Z} m(x',x'')d(f(x'),f(x''))^2 \\ &= \sum_{\text{faces } (z,z',z'') \text{ de } Z} m(x,x',x'')d(f(x'),f(x''))^2 \\ &= \sum_{z\in Z} E(f_{|lien(x)}). \end{aligned}$$

Si f est harmonique, pour tout $x \in X$,

$$\begin{aligned} E(f_{|lien(x)}) &= RQ(f_{|lien(x)})S(f_{|lien(x)}) \\ &= RQ(f_{|lien(x)})d^2(f_{|lien(x)}, f(x)) \\ &= 2RQ(f_{|lien(x)})ED(f,x). \end{aligned}$$

Théorème

1. (M.T. Wang, 1998). *Si Y est une variété riemannienne simplement connexe à courbure sectionnelle négative ou nulle, alors pour tout graphe C, $\lambda(C, Y) = \lambda(C, \mathbb{R})$.*
2. (H. Izeki/S. Nayatani, 2004). *Si Y est un arbre, alors, pour tout graphe C, $\lambda(C, Y) = \lambda(C, \mathbb{R})$.*
3. (H. Izeki/S. Nayatani, 2004). *Si Y est l'immeuble associé à $Sl(3, \mathbb{Q}_2)$, alors pour tout graphe C, $\lambda(C, Y) \geq 0.5878\, \lambda(C, \mathbb{R})$.*

Exemples de bas du spectre

Théorème

1. (M.T. Wang, 1998). *Si Y est une variété riemannienne simplement connexe à courbure sectionnelle négative ou nulle, alors pour tout graphe C, $\lambda(C, Y) = \lambda(C, \mathbb{R})$.*
2. (H. Izeki/S. Nayatani, 2004). *Si Y est un arbre, alors, pour tout graphe C, $\lambda(C, Y) = \lambda(C, \mathbb{R})$.*
3. (H. Izeki/S. Nayatani, 2004). *Si Y est l'immeuble associé à $Sl(3, \mathbb{Q}_2)$, alors pour tout graphe C, $\lambda(C, Y) \geq 0.5878\,\lambda(C, \mathbb{R})$.*

Corollaire

Si $\lambda(lien(x), \mathbb{R}) > \frac{1}{2}$ pour tous les sommets $x \in X$, alors $\Gamma \in F\mathcal{M}$ où $\mathcal{M}$ est la classe obtenue en prenant des produits d'arbres, d'espaces de Hilbert et de variétés riemanniennes simplement connexes à courbure sectionnelle négative ou nulle.
Si de plus $\lambda(lien(x), \mathbb{R}) > 0.8507$, on peut ajouter l'immeuble associé à $Sl(3, \mathbb{Q}_2)$ à la liste.

Remarque

Toute présentation de groupe peut être modifiée, en ajoutant des générateurs, pour que tous les relateurs soient de longueur 3, c'est pourquoi on se limitera à ce genre de présentations.

On considère les présentations à m générateurs fixés et à $(2m-1)^{3d}$ relateurs tirés au hasard indépendamment parmi les $(2m-1)^3$ possibilités. On s'intéresse aux propriétés satisfaites avec probabilité tendant vers 1 quand m tend vers l'infini. On dit qu'une telle propriété est *satisfaite par les groupes aléatoires en densité d*.

Remarque

Toute présentation de groupe peut être modifiée, en ajoutant des générateurs, pour que tous les relateurs soient de longueur 3, c'est pourquoi on se limitera à ce genre de présentations.

On considère les présentations à m générateurs fixés et à $(2m-1)^{3d}$ relateurs tirés au hasard indépendamment parmi les $(2m-1)^3$ possibilités. On s'intéresse aux propriétés satisfaites avec probabilité tendant vers 1 quand m tend vers l'infini. On dit qu'une telle propriété est *satisfaite par les groupes aléatoires en densité* d.

Théorème

(M. Gromov, 1993). *Les groupes aléatoires en densité* $< \frac{1}{2}$ *sont infinis et hyperboliques.*

Remarque

Toute présentation de groupe peut être modifiée, en ajoutant des générateurs, pour que tous les relateurs soient de longueur 3, c'est pourquoi on se limitera à ce genre de présentations.

On considère les présentations à m générateurs fixés et à $(2m-1)^{3d}$ relateurs tirés au hasard indépendamment parmi les $(2m-1)^3$ possibilités. On s'intéresse aux propriétés satisfaites avec probabilité tendant vers 1 quand m tend vers l'infini. On dit qu'une telle propriété est *satisfaite par les groupes aléatoires en densité d*.

Théorème

(M. Gromov, 1993). *Les groupes aléatoires en densité $< \frac{1}{2}$ sont infinis et hyperboliques.*

(A. Zuk, 2003). *Les groupes aléatoires en densité $> \frac{1}{3}$ ont la propriété (T) de Kazdan.*

Remarque

Toute présentation de groupe peut être modifiée, en ajoutant des générateurs, pour que tous les relateurs soient de longueur 3, c'est pourquoi on se limitera à ce genre de présentations.

On considère les présentations à m générateurs fixés et à $(2m-1)^{3d}$ relateurs tirés au hasard indépendamment parmi les $(2m-1)^3$ possibilités. On s'intéresse aux propriétés satisfaites avec probabilité tendant vers 1 quand m tend vers l'infini. On dit qu'une telle propriété est *satisfaite par les groupes aléatoires en densité* d.

Théorème

(M. Gromov, 1993). *Les groupes aléatoires en densité* $< \frac{1}{2}$ *sont infinis et hyperboliques.*

(A. Zuk, 2003). *Les groupes aléatoires en densité* $> \frac{1}{3}$ *ont la propriété (T) de Kazdan.*

Preuve. (sommaire).
Le complexe de Cayley a des liens qui ressemblent à des graphes aléatoires. Ces graphes ont des bas du spectre qui tendent vers 1 quand m tend vers l'infini (M. Broder and E. Shamir, 1987).

Remarque

Toute présentation de groupe peut être modifiée, en ajoutant des générateurs, pour que tous les relateurs soient de longueur 3, c'est pourquoi on se limitera à ce genre de présentations.

On considère les présentations à m générateurs fixés et à $(2m-1)^{3d}$ relateurs tirés au hasard indépendamment parmi les $(2m-1)^3$ possibilités. On s'intéresse aux propriétés satisfaites avec probabilité tendant vers 1 quand m tend vers l'infini. On dit qu'une telle propriété est *satisfaite par les groupes aléatoires en densité d*.

Théorème

(M. Gromov, 1993). *Les groupes aléatoires en densité $< \frac{1}{2}$ sont infinis et hyperboliques.*

(A. Zuk, 2003). *Les groupes aléatoires en densité $> \frac{1}{3}$ ont la propriété (T) de Kazdan.*

Preuve. (sommaire).
Le complexe de Cayley a des liens qui ressemblent à des graphes aléatoires. Ces graphes ont des bas du spectre qui tendent vers 1 quand m tend vers l'infini (M. Broder and E. Shamir, 1987).

Corollaire

Les groupes aléatoires en densité $> \frac{1}{3}$ sont $F\mathcal{M}'$, où $\mathcal{M}'$ est la classe obtenue en prenant des produits d'arbres, d'espaces de Hilbert, de variétés riemanniennes simplement connexes à courbure sectionnelle négative ou nulle et de l'immeuble associé à $Sl(3, \mathbb{Q}_2)$.

Théorème

(M. Gromov, 2001). *On note C_k le k-cycle. Pour tout espace géodésique CAT(0) Y,*

$$\lambda(C_k, Y) = \lambda(C_k, \mathbb{R}) = \frac{1}{2}|1 - e^{2i\pi/k}|^2.$$

En particulier, $\lambda(C_6, Y) = \frac{1}{2}$.

Théorème

(M. Gromov, 2001). *On note C_k le k-cycle. Pour tout espace géodésique $CAT(0)$ Y,*

$$\lambda(C_k, Y) = \lambda(C_k, \mathbb{R}) = \frac{1}{2}|1 - e^{2i\pi/k}|^2.$$

En particulier, $\lambda(C_6, Y) = \frac{1}{2}$.

Preuve. On introduit

$$F(g) = \frac{1}{2\sum m(c)} \sum_{c,\, c' \in C} m(c)m(c')d(g(c), g(c'))^2.$$

Alors $S(g) \leq F(g)$ avec égalité quand Y est un espace de Hilbert.

Soit $g : C_k \to Y$. On prolonge g en un polygone géodésique, puis en un disque réglé $f : D \to Y$. Comme D a une courbure négative ou nulle, il existe un plongement $g' : D \to \mathbb{R}^2$ qui est isométrique sur le bord et ne diminue pas les autres distances (Yu. Reshetnyak, 1968). Donc $E(g') = E(g)$ et

$$S(g') = F(g') \geq F(g) \geq S(g),$$

d'où $RQ(g') \leq RQ(g)$.

Définition

Soit C un graphe, Y un espace métrique. On définit

$$\lambda^{Gro}(C, Y) = \inf_{g:C \to Y} RQ^{Gro}(g) \quad où \quad RQ^{Gro}(g) = \frac{E(g)}{F(g)}.$$

Si Y est géodésique $CAT(0)$, $\lambda^{Gro}(C, Y) \leq \lambda(C, Y)$, avec égalité quand Y est un espace de Hilbert.

Définition

Soit C un graphe, Y un espace métrique. On définit

$$\lambda^{Gro}(C,Y) = \inf_{g:C\to Y} RQ^{Gro}(g) \quad où \quad RQ^{Gro}(g) = \frac{E(g)}{F(g)}.$$

Si Y est géodésique $CAT(0)$, $\lambda^{Gro}(C,Y) \leq \lambda(C,Y)$, avec égalité quand Y est un espace de Hilbert.

Théorème

Soit C le graphe d'incidence d'un plan projectif fini. Soit Y un espace métrique géodésique $CAT(0)$. Alors

$$\lambda^{Gro}(C,Y) = RQ^{Gro}(\iota),$$

où $\iota : C \to I$ est le plongement de C dans le cone sur C, par exemple, comme lien d'un sommet dans un immeuble de type $\tilde{A}_2$.

Définition

Soit C un graphe, Y un espace métrique. On définit

$$\lambda^{Gro}(C,Y) = \inf_{g:C\to Y} RQ^{Gro}(g) \quad où \quad RQ^{Gro}(g) = \frac{E(g)}{F(g)}.$$

Si Y est géodésique $CAT(0)$, $\lambda^{Gro}(C,Y) \leq \lambda(C,Y)$, avec égalité quand Y est un espace de Hilbert.

Théorème

Soit C le graphe d'incidence d'un plan projectif fini. Soit Y un espace métrique géodésique $CAT(0)$. Alors

$$\lambda^{Gro}(C,Y) = RQ^{Gro}(\iota),$$

où $\iota : C \to I$ est le plongement de C dans le cone sur C, par exemple, comme lien d'un sommet dans un immeuble de type $\tilde{A}_2$.

Preuve. Dans le graphe d'incidence d'un plan projectif fini, le nombre de 6-cycles contenant deux sommets donnés ne dépend que de leur distance. En additionnant l'inégalité de Gromov relative à F pour tout les 6-cycles, on obtient ce qu'il faut. q.e.d.

Définition

Soit C un graphe, Y un espace métrique. On définit

$$\lambda^{Gro}(C,Y) = \inf_{g:C\to Y} RQ^{Gro}(g) \quad où \quad RQ^{Gro}(g) = \frac{E(g)}{F(g)}.$$

Si Y est géodésique $CAT(0)$, $\lambda^{Gro}(C,Y) \leq \lambda(C,Y)$, avec égalité quand Y est un espace de Hilbert.

Théorème

Soit C le graphe d'incidence d'un plan projectif fini. Soit Y un espace métrique géodésique $CAT(0)$. Alors

$$\lambda^{Gro}(C,Y) = RQ^{Gro}(\iota),$$

où $\iota : C \to I$ est le plongement de C dans le cone sur C, par exemple, comme lien d'un sommet dans un immeuble de type $\tilde{A}_2$.

Preuve. Dans le graphe d'incidence d'un plan projectif fini, le nombre de 6-cycles contenant deux sommets donnés ne dépend que de leur distance. En additionnant l'inégalité de Gromov relative à F pour tout les 6-cycles, on obtient ce qu'il faut. q.e.d.

Malheureusement, $RQ^{Gro}(\iota) < \frac{1}{2}$. Remarquer que $RQ(\iota) = \frac{1}{2}$.

Proposition

Soit Y un espace géodésique CAT(0). Soit C un graphe fini. Soit $\mathcal{L}$ une famille de lacets de longueur $\leq k$ (i.e. des applications du j-cycle, $j \leq k$, dans C). On note

- *v la borne supérieure des valences des sommets de C.*
- *r la borne inférieure du nombre de lacets dans $\mathcal{L}$ qui contiennent une paire de sommets de C donnée.*
- *q la borne supérieure du nombre de lacets dans $\mathcal{L}$ qui contiennent une arête donnée.*
- *A le nombre d'arêtes de C.*

Alors

$$\lambda(C, Y) \geq \lambda^{Gro}(C, Y) \geq \frac{4Ar}{kqv^2}\frac{1}{2}|1 - e^{2i\pi/k}|^2.$$

En particulier, si $k = 6$ et $\frac{Ar}{3qv^2} > \frac{1}{2}$, alors $\lambda^{Gro}(C, Y) > \frac{1}{2}$.

Proposition

Soit Y un espace géodésique $CAT(0)$. Soit C un graphe fini. Soit $\mathcal{L}$ une famille de lacets de longueur $\leq k$ (i.e. des applications du j-cycle, $j \leq k$, dans C). On note

- *v la borne supérieure des valences des sommets de C.*
- *r la borne inférieure du nombre de lacets dans $\mathcal{L}$ qui contiennent une paire de sommets de C donnée.*
- *q la borne supérieure du nombre de lacets dans $\mathcal{L}$ qui contiennent une arête donnée.*
- *A le nombre d'arêtes de C.*

Alors

$$\lambda(C, Y) \geq \lambda^{Gro}(C, Y) \geq \frac{4Ar}{kqv^2} \frac{1}{2} |1 - e^{2i\pi/k}|^2.$$

En particulier, si $k = 6$ et $\frac{Ar}{3qv^2} > \frac{1}{2}$, alors $\lambda^{Gro}(C, Y) > \frac{1}{2}$.

Conjecture

Dans certains régimes, dans un graphe aléatoire, la famille des lacets de longueur 6 possède les propriétés ci-dessus.

Integralgeometrie simplifiée

Proposition

Soit Y un espace géodésique $CAT(0)$. Soit C un graphe fini. Soit $\mathcal{L}$ une famille de lacets de longueur $\leq k$ (i.e. des applications du j-cycle, $j \leq k$, dans C). On note

- *v la borne supérieure des valences des sommets de C.*
- *r la borne inférieure du nombre de lacets dans $\mathcal{L}$ qui contiennent une paire de sommets de C donnée.*
- *q la borne supérieure du nombre de lacets dans $\mathcal{L}$ qui contiennent une arête donnée.*
- *A le nombre d'arêtes de C.*

Alors

$$\lambda(C, Y) \geq \lambda^{Gro}(C, Y) \geq \frac{4Ar}{kqv^2}\frac{1}{2}|1 - e^{2i\pi/k}|^2.$$

En particulier, si $k = 6$ et $\frac{Ar}{3qv^2} > \frac{1}{2}$, alors $\lambda^{Gro}(C, Y) > \frac{1}{2}$.

Conjecture

Dans certains régimes, dans un graphe aléatoire, la famille des lacets de longueur 6 possède les propriétés ci-dessus.

Cela entraînerait que, dans certains modèles, les groupes aléatoires ont la propriété $F\mathcal{CAT}(0)$, et en particulier $F\mathcal{SI}$.

Définition

Soit $\mathcal{G}(n, a)$ *le modèle de graphe aléatoire suivant : on fixe un ensemble* S *de* n *sommets, et pour chaque paire* $\{s, s'\}$*, on décide d'inclure l'arête* $[s, s']$ *en tirant au hasard avec probabilité* $p = n^{-a}$*.*

Définition

Soit $\mathcal{G}(n, a)$ le modèle de graphe aléatoire suivant : on fixe un ensemble S de n sommets, et pour chaque paire $\{s, s'\}$, on décide d'inclure l'arête $[s, s']$ en tirant au hasard avec probabilité $p = n^{-a}$.

Heuristique pour le calcul de $\dfrac{Ar}{3qv^2}$.

Les chiffres ci-dessous sont des espérances. On peut espérer que le minimum et le maximum coïncident asymptotiquement avec l'espérance si $1/2 < a < 2/3$.

Nombre d'arêtes $A = n^2/2 \times p = n^{2-a}/2$. Nombre de voisins $v = 2A/n = n^{1-a}$. Nombre de chemins de longueur 3 entre deux sommets fixés $pv^2 = n^{2-3a}$. Nombre de lacets de longueur 6 passant par deux sommets fixés $r = (pv^2)^2 = n^{4-6a}$.

Nombre de chemins de longueur 6 commençant avec une arête fixée $v^5 = n^{5-5a}$. Parmi eux, le nombre de lacets est $q = v^5/n = n^{4-5a}$. Cela donne

$$\frac{Ar}{3qv^2} = \frac{n^{2-a}/2 \times n^{4-6a}}{3 \times n^{4-5a} \times n^{2-2a}} = \frac{1}{6} < \frac{1}{2},$$

mauvaise nouvelle.