Flexibilité des groupes de surfaces dans les groupes de Lie semi-simples

I. Kim, P. Pansu

May 31, 2008

Plan

Définition

Soit G le groupe des points réels d'un groupe algebrique. Soit Γ groupe de type fini. On dit qu'un homomorphisme non Zariski dense $\rho : \Gamma \to G$ est flexible *si c'est une limite d'homomorphismes Zariski denses,* localement rigide *sinon.*

Problème

Determiner quels homomorphismes de groupes de surfaces dans des groupes de Lie simples sont localement rigides.

Plan de l'exposé

On donne un survol des resultats de rigidité (globale) concernant les groupes de surfaces dans les groupes de Lie semisimples.

On complète avec des résultats nouveaux de flexibilité.

Soit X un espace symétrique hermitien, de forme de Kähler Ω (la métrique est normalisée de sorte que la courbure sectionnelle minimale soit -1). Soit Σ une surface fermée de caractéristique d'Euler négative, soit $\rho : \Gamma = \pi_1(\Sigma) \to Isom(X)$ une action isométrique sur X. On choisit une application équivariante $\tilde{f} : \tilde{\Sigma} \to X$.

Définition

L'invariant de Toledo de l'action $\rho : \Gamma \to Isom(X)$ est

$$T_\rho = \frac{1}{2\pi} \int_\Sigma \tilde{f}^* \Omega.$$

Alors

1. T_ρ dépend continument de ρ.
2. Il existe $\ell_X \in \mathbb{Q}$ tel que $T_\rho \in \ell_X \mathbb{Z}$.
3. $|T_\rho| \leq |\chi(\Sigma)||\mathrm{rank}(X)|$.

Exemple

Quand $X = H^1_{\mathbb{C}}$ *est une droite, l'inégalité* $|T_\rho| \leq |\chi(\Sigma)|$ *est due à J. Milnor (1958). De plus,* $\ell_X = 1$, T *prend toutes les valeurs entières entre* $-|\chi(\Sigma)|$ *et* $|\chi(\Sigma)|$.

Théorème

(W. Goldman, 1980). *Soit* $X = H^1_{\mathbb{C}}$. *Les ensembles de niveau de* T *coïncident avec les composantes connexes de la variété des caractères* $\chi(\Gamma, PU(1,1))$. *De plus,* $|T_\rho| = |\chi(\Sigma)|$ *si et seulement si* $\rho(\Gamma)$ *est discret et cocompact dans* $PU(1,1) = Isom(H^1_{\mathbb{C}})$.

Noter que toutes les composantes de $\chi(\Gamma, PU(1,1))$ ont la même dimension $3|\chi(\Sigma)|$.

Théorème

(D. Toledo, 1979, 1989). *Soit* $X = H^n_{\mathbb{C}}$ *un espace symétrique hermitien de rang 1. Alors* $|T_\rho| \leq |\chi(\Sigma)|$. *De plus,* $|T_\rho| = |\chi(\Sigma)|$ *si et seulement si* $\rho(\Gamma)$ *stabilise une droite complexe* $H^1_{\mathbb{C}}$ *in* X *et agit de façon cocompacte dessus.*

Par conséquent, lorsque $n \geq 2$, des composantes différentes de $\chi(\Gamma, PU(n,1))$ peuvent avoir des dimensions différentes.

Définition

Les actions ρ telles que $|T_\rho| = |\chi(\Sigma)| \mathrm{rank}(X)$ sont appelées représentations maximales.

Exemple

On choisit des actions cocompactes $\rho_1, \ldots, \rho_r$ de Γ sur $H^1_{\mathbb{C}}$. La représentation somme directe sur le polydisque $(H^1_{\mathbb{C}})^r$ est maximale. Quand le polydisque est plongé dans un autre espace symétrique de même rang r, elle reste maximale. Par conséquent, tout espace symétrique hermitien possède des représentations maximales.

Proposition

(Toledo, 1987). *Lorsque X est le demi-espace de Siegel (i.e. $Isom(X) = Sp(n, \mathbb{R})$), ces actions possèdent des déformations Zariski denses.*

En fait, le méthode du pliage (`bending`) s'applique (Burger, Iozzi, Wienhard, 2005). Cependant, il arrive que ça ne marche pas, pour d'espaces symétriques hermitiens.

Théorème

(L. Hernàndez Lamoneda, 1991, S. Bradlow, O. García-Prada, P. Gothen, 2003). *Les représentations maximales réductives de Γ dans $PU(p, q)$, $p \leq q$, tombent dans $P(U(p, p) \times U(q - p))$, à conjugaison près.*

Type tube

Définition

Un espace symétrique hermitien est de type tube *si on peut le réaliser comme domaine de* $\mathbb{C}^n$ *de la forme* $\mathbb{R}^n + iC$ *où* $C \subset \mathbb{R}^n$ *est un cone ouvert propre.*

Exemple

Le demi-espace de Siegel, la grassmannienne de groupe d'isométries $PO(2, q)$ *est de type tube.*
The grassmannienne $\mathcal{D}_{p,q}$, $p \leq q$, *de groupe d'isométries* $PU(p, q)$ *est de type tube ssi* $p = q$.
La grassmannienne de groupe d'isométries $SO^*(2n)$ *est de type tube ssi* n *est pair.*
L'espace symétrique hermitien exceptionnel de dimension 27 est de type tube, l'autre (de dimension 16) ne l'est pas.
Un produit d'espaces de type tube est de type tube, donc les polydisques sont de type tube.

Lemme

Les sous-espaces symétriques hermitiens de type tube maximaux dans un espace symétrique hermitien sont conjugués.

Exemple

Le sous-espace symétrique hermitien de type tube maximal dans $\mathcal{D}_{p,q}$ *est* $\mathcal{D}_{p,p}$.

Théorème

(Burger, Iozzi, Wienhard, 2003). *Soit Γ un groupe de surface et X un espace symétrique hermitien. Toute représentation maximale $\Gamma \to \mathrm{Isom}(X)$ stabilise un sous-espace symétrique hermitien de type tube Y et est Zariski dense dans $\mathrm{Isom}(Y)$.*

En particulier, les représentations maximales de groupes de surfaces dans des espaces symétriques hermitiens non de type tube sont globalement rigides.

Exemple

Lorsque X est la boule $\mathcal{D}_{1,n}$ (resp. $\mathcal{D}_{p,q}$), on retrouve le résultat de Toledo (resp. Barlow et al.).

Problème

Réciproquement, caractériser les actions localement rigides de groupes de surfaces sur des espaces symétriques (non nécessairement hermitiens).

Jusqu'à présent, les exemples connus de flexibilité s'obtenaient tous par pliage.

Exemple

(Burger, Iozzi, Wienhard). *Dans un espace symétrique hermitien de type tube, un groupe de surface stabilisant un polydisque maximal et agissant diagonalement dessus est flexible.*

Flexibilité

Théorème

Les représentations moyennables de groupes de surfaces dans des groupes de Lie semi-simples sont flexibles, dès que le genre est suffisamment grand, et à condition de les restreindre à des sous-groupes d'indice fini.

Théorème

Soit G un groupe de Lie simple. Soit $H \subset G$ un sous-groupe semi-simple. Soit Γ le groupe fondamental d'une surface de genre $\geq \dim(G)^2$. Soit $\rho : \Gamma \to H$ un homomorphisme Zariski dense.

1. *Soit $\mathfrak{s}$ un facteur de Levi semi-simple du centralisateur de H. Alors ρ est flexible dans le groupe semi-simple $G' = H \exp(\mathfrak{s})$, i.e., est une limite d'homomorphismes Zariski denses $\rho' : \Gamma \to G'$.*
2. *Si un tel ρ' est localement rigide dans G, alors l'espace symétrique de type non compact associé à G' est hermitien de type tube, et la représentation $\rho' : \Gamma \to G'$ est maximale.*
3. *Si le centralisateur $\mathfrak{z}$ de G' dans G est de dimension 1, alors ρ' est localement rigide dans G si et seulement si G' est hermitien de type tube et la représentation symplectique sur $\mathfrak{g}/(\mathfrak{z} \oplus \mathfrak{g}')$ est maximale.*

Commentaires

1. Lorsque G est de type hermitien et l'adhérence de Zariski de l'homomorphisme est semi-simple, on obtient l'exacte réciproque du résultat de Burger et al, à la restriction sur le genre près.

Exemple

Si $G = SU(p,q)$, $H = SU(p,p)$, alors $G' = S(U(p,p) \times U(q-p))$ a un centralisateur de dimension 1. Si le genre est $\geq (p+q)^2$, les représentations Zariski denses dans $SU(p,p)$ sont localement rigides dans $SU(p,q)$ si et seulement si elles sont maximales.

2. Le sens "rigidité" du dernier énoncé n'est pas satisfaisant. En effet, ρ' peut être flexible bien que ρ soit localement rigide.

3. Travail en cours : combiner les deux théorèmes en un seul résultat sans hypothèses sur les représentations.

4. Clause sur le genre : elle n'est probablement pas nécessaire, ce n'est qu'une commodité technique.

5. Non constructif : les déformations dont on affirme l'existence ne sont pas données par des formules explicites ni par des constructions géométriques.

Théorème

(W. Goldman, 1985). *Si* Γ *est un groupe de surface et* ρ *est réductif,* $Hom(\Gamma, G)/G$ *est, au voisinage de la classe de conjugaison de* ρ*, analytiquement équivalent à*

$$\{u \in H^1(\Gamma, \mathfrak{g}_{ad\circ\rho}) \,|\, [u,u] = 0\}/Z_G(\rho(\Gamma)),$$

où le crochet désigne le cup-produit $H^1(\Gamma, \mathfrak{g}_{ad\circ\rho}) \to H^2(\Gamma, \mathfrak{g}_{ad\circ\rho})$*.*

Remarque

Cela permet de prouver la flexibilité sans expliciter de déformations.

La dimension de $H^1(\Gamma, \mathfrak{g}_{ad\circ\rho})$ se calcule au moyen de la caractéristique d'Euler et de la dualité de Poincaré : $H^2(\Gamma, \mathfrak{g}) = (H^0(\Gamma, \mathfrak{g}^*))^*$.

Le cup-produit se calcule au moyen du

Théorème

(W. Meyer, 1972). *Soit* (E, Ω) *un fibré vectoriel symplectique sur* Σ*. La forme quadratique* $Q(a) = \int_\Sigma \Omega(a \smile a)$ *sur* $H^1(\Sigma, E)$ *est nondégénérée de signature* $4c_1(E, \Omega)$*.*

Notation

$\chi(\Gamma, G) = Hom(\Gamma, G)/G$.

Remarque

- *La dimension de* $\chi(\Gamma, G)$ *aux points dont le centralisateur est trivial est* $|\chi(\Sigma)|\mathrm{dim}(G)$.
- *Si le genre de* Σ *est assez grand, les homomorphismes non Zariski denses forment un sous-ensemble de* $\chi(\Gamma, G)$ *de dimension inférieure à* $|\chi(\Sigma)|\mathrm{dim}(G)$.
- *Par conséquent, il suffit de prouver la densité des points lisses au voisinage des homomorphismes de centralisateurs non triviaux.*

Remarque

On traite les centralisateurs semi-simples $\mathfrak{z}$ *en écrivant des classes de cohomologie* u *explicites telles que* $[u, u] = 0$, $[\cdot, \cdot]$ *est une submersion en* u *et* u *a un stabilisateur trivial dans* $\mathfrak{z}$.

En effet, Γ agit trivialement sur $\mathfrak{z}$. On choisit judicieusement un $u \in H^1(\Gamma) \otimes \mathfrak{z} = H^1(\Gamma, \mathfrak{z}) \subset H^1(\Gamma, \mathfrak{g})$.

Cela permet de grimper de H à $G' = H \exp(\mathfrak{s})$, dont le centralisateur est un tore.

Si le centralisateur $\mathfrak{z}$ est un tore, $\mathfrak{g}\otimes\mathbb{C}$ se décompose sous $\mathfrak{z}$ en espaces de racines G'-invariants $\mathfrak{g}_\lambda$. $H^1(\Gamma,\mathfrak{g})\otimes\mathbb{C}$ se décompose aussi.

Lemme

$[\cdot,\cdot]$ s'annule sur chaque $H^1(\Gamma,\mathfrak{g}_\lambda)$.
$H^1(\Gamma,\mathfrak{g}_\lambda)$ et $H^1(\Gamma,\mathfrak{g}_\mu)$ sont orthogonaux par rapport à $[\cdot,\cdot]$ sauf si $\lambda+\mu=0$.

Sur chaque $\mathfrak{g}_{\lambda,\mathbb{R}}=\mathfrak{g}\cap(\mathfrak{g}_\lambda\oplus\mathfrak{g}_{-\lambda})$, tous les ad_Z, $Z\in\mathfrak{z}$ sont proportionnels. Par conséquent, les formes alternées $(X,Y)\to Z\cdot[X,Y]$ sont proportionnelles à une seule forme symplectique G'-invariante Ω_λ. Sur $H^1(\Gamma,\mathfrak{g}_{\lambda,\mathbb{R}})$, tous les $Z\cdot[\cdot,\cdot]$ sont proportionnels à la forme quadratique $Q_\lambda(u,u)=\int_\Sigma\Omega_\lambda(u\smile u)$. Soit $\rho_\lambda:\Gamma\to Sp(\mathfrak{g}_{\lambda,\mathbb{R}},\Omega_\lambda)$ la représentation linéaire symplectique correspondante, et E_λ le fibré vectoriel symplectique associé sur Σ. La formule de Meyer donne

Lemme

Si $\lambda\neq 0$, Q_λ est non dégénérée et son indice est égal à $4c_1(E_\lambda)$. Par conséquent,

$$4|c_1(E_\lambda)|\leq\dim(H^1(\Gamma,\mathfrak{g}_\lambda))=-\chi(\Sigma)\mathrm{rank}(E_\lambda).$$

En particulier, Q_λ est définie si et seulement si ρ_λ est une représentation maximale.

Si toutes les inégalités sont strictes, on peut choisir dans chaque $H^1(\Gamma,\mathfrak{g}_\lambda)$, $\lambda\neq 0$, un vecteur non nul u_λ tel que $Q_\lambda(u_\lambda)=0$. Alors $u=\sum u_\lambda$ satisfait $[u,u]=0$, $[\cdot,\cdot]$ est une submersion en u, u a un stabilisateur trivial dans $\mathfrak{z}$. Par conséquent, u représente un point lisse de $\chi(\Gamma,G)$ proche de ρ'.

Si $\dim(\mathfrak{z}) = 1$, alors la forme quadratique scalaire $[\cdot,\cdot] = \sum_{\lambda>0} \lambda Q_\lambda$ est définie si et seulement si

$$4|\sum_{\lambda>0} c_1(E_\lambda)| = -\chi(\Sigma) \sum_{\lambda>0} \mathrm{rank}(E_\lambda) = -\chi(\Sigma)\dim(\mathfrak{g}/(\mathfrak{z} \oplus \mathfrak{g}')),$$

i.e. si et seulement si la représentation symplectique sur $\mathfrak{g}/(\mathfrak{z} \oplus \mathfrak{g}')$ est maximale.

Remarque

$\mathfrak{g}/(\mathfrak{z} \oplus \mathfrak{g}')$ *est l'espace tangent de l'orbite adjointe de* $\mathfrak{z}$*, équipée de la structure symplectique de Kirillov-Kostant-Souriau.*

Le fait que G' est hermitien de type tube résulte du théorème suivant.

Théorème

(Burger, Iozzi, Wienhard, 2007). *Soit S un groupe de Lie semi-simple dont l'espace symétrique est hermitien. Soit $\rho : \Gamma \to S$ une représentation maximale d'un groupe de surface. Alors ρ est tendue. Son adhérence de Zariski G' est réductive de type hermitien. Le plongement $G' \hookrightarrow S$ est tendu. Si S est de type tube, il en est de même de G'.*

Dans un groupe de Lie $G = KAN$, les sous-groupes moyennables maximaux sont, à conjugaison près, de la forme $G' = K'A'N'$ où $A' \subset A$, $N' \subset N$, le centralisateur de A s'écrit MA, et $K' = K \cap M$. De plus, $\mathfrak{a}'$ est engendré par son intersection avec la chambre de Weyl $\mathfrak{a}^+$ de $\mathfrak{a}$.

Quand on le conjugue par un groupe à un paramètre de $\exp(\mathfrak{a}^+)$, un homomorphisme $\rho : \Gamma \to G'$ converge vers un homomorphisme $\rho' : \Gamma \to K'A'$. Donc la densité des homomorphismes Zariski denses dans un voisinage de ρ' implique la même propriété pour ρ.

A indice fini près, on peut déformer ρ' de sorte que son adhérence de Zariski contienne K'. En effet, il n'y a pas de rigidité dans les groupes de Lie compacts connexes semi-simples. On écrit K'_0 comme extension centrale d'un groupe semi-simple. Comme ces extensions centrales sont classifiées par des H^2 qui sont discrets, les petites déformations se relèvent de la base à l'extension, donc il y a des déformations Zariski denses dans K'_0 aussi. C'est pour passer de K' à K'_0 qu'on peut avoir besoin de restreindre à un sous-groupe d'indice fini.

Ceci fait, le centralisateur de ρ' est A', qui est un tore. Comme on peut utiliser, pour définir les fibrés E_λ, des applications équivariantes qui factorisent à travers des plats, leurs premières classes de Chern s'annulent, il n'y a pas de représentations maximales, et la flexibilité en résulte.