

Plongements quasiisométriques du groupe de Heisenberg dans L^p , d'après Cheeger, Kleiner, Lee, Naor

P. Pansu

4 mai 2007

Définition

Un espace métrique est doublant s'il existe une mesure μ et une constante C telles que pour toute boule B , $\mu(2B) \leq C \mu(B)$.

Exemple

Le groupe d'Heisenberg (\mathbb{H}, d) muni de sa métrique de Carnot est doublant.

Théorème

(P. Assouad, 1982). Soit (X, d) un espace métrique doublant. Alors pour tout $\alpha < 1$ et tout $p \geq 1$, (X, d^α) admet un plongement bilipschitzien dans L^p .

Théorème

(J. Cheeger, B. Kleiner, 2006). Le groupe d'Heisenberg (\mathbb{H}, d) n'admet pas de plongement bilipschitzien dans L^1 .

Plan de l'exposé

1. Résultats antérieurs sur le problème de plongement
2. Preuve du théorème de non plongement dans L^1
3. Motivation provenant de l'informatique théorique

Théorème

(Semmes, 1996). \mathbb{H} ne se plonge pas quasiisométriquement dans un espace de Banach de dimension finie.

(Pauls, 2001). \mathbb{H} ne se plonge pas quasiisométriquement dans un espace de Hilbert, ni, plus généralement, dans un espace CAT(0).

(Cheeger-Kleiner, 2006). \mathbb{H} ne se plonge pas quasiisométriquement dans un espace de Banach qui possède la propriété de Radon-Nikodym (cela couvre les deux séparables).

Définition

(Heinonen-Koskela, 1996). On dit qu'un espace métrique est PI s'il est doublant et s'il satisfait une inégalité de Poincaré $(1, p)$,

$$\oint_B |f - \oint_B f| \leq \text{const.} \cdot \text{diameter}(B) \left(\oint_{2B} |\nabla f|^p \right)^{1/p},$$

pour tous les sur-gradients $|\nabla f|$ de f .

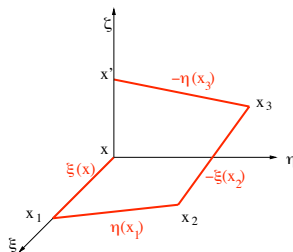
Théorème

(Cheeger-Kleiner, 2006). Les espaces PI dont les cônes tangents ont une dimension de Hausdorff strictement supérieure à leur dimension topologique ne se plongent pas bi-lipschitz dans les espaces de Banach qui sont bien approchés par des espaces de dimension finie. Cette classe contient ℓ^1 . Noter qu'il existe des espaces PI qui se plongent dans L^1 .

Définition

Le groupe d'Heisenberg \mathbb{H} est le groupe de Lie de dimension 3 dont l'algèbre de Lie a pour base ξ , η et ζ tels que $[\xi, \eta] = \zeta$. Les champs de vecteurs invariants à gauche ξ et η engendrent un champ de plans H . La distance de Carnot $d(x, x')$ est l'inf des longueurs des courbes tangentes à H joignant x à x' . L'homothétie δ_t est l'automorphisme induit par $\delta_t(\xi) = t\xi$, $\delta_t(\eta) = t\eta$, $\delta_t(\zeta) = t^2\zeta$. Elle multiplie les distances de Carnot par t .

La finitude de la distance de Carnot résulte de la figure suivante.



Remarque

1. $d(x, x \exp(t^2\zeta)) = td(1, \exp(\zeta)) = \text{const. } t$.
2. $\text{volume}B(x, t) = t^4 \text{volume}B(x, 1) = \text{const. } t^4$, donc la dimension de Hausdorff est 4.

Non plongéabilité du groupe de Heisenberg dans les espaces de Banach RNP

1. *Une application lipschitzienne possède des dérivées partielles horizontales presque partout.*
Par définition de la propriété de Radon-Nikodym.
2. *Ces dérivées sont approximativement continues presque partout.*
C'est général pour les espaces doublants.
3. *En un tel point x , $d(f(x), f(x')) = o(d(x, x'))$ si x' est sur la droite verticale passant par x .*

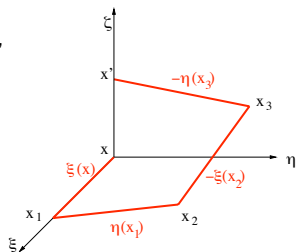
Soit $x' = x \exp(t^2 \zeta)$, de sorte que $d(x, x') \sim t$. On joint x à x' par des courbes intégrales de ξ , η , $-\xi$, $-\eta$, d'extrémités $x = x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 = x'$. Alors

$$f(x_1) - f(x) \sim t\xi f(x), \quad f(x_3) - f(x_2) \sim -t\xi f(x),$$

d'où

$$f(x_1) - f(x) + f(x_3) - f(x_2) = o(t).$$

De même $f(x_2) - f(x_1) + f(x') - f(x_3) = o(t)$. En additionnant, $f(x') - f(x) = o(t)$.



Remarque

L^1 n'a pas la propriété de Radon-Nikodym.

En effet, $t \mapsto 1_{[0,t]}, \mathbb{R}_+ \rightarrow L^1(\mathbb{R}_+)$, est isométrique, mais nulle part différentiable.

Schema de la preuve

de la non plongeabilité dans L^1 .

1. A une application $f : X \rightarrow L^1(Y, \nu)$, on associe une famille canonique de sous-ensembles $S \subset X$, généralisant les ensembles de niveau.
2. f est à variation bornée si et seulement si presque tout S est de périmètre fini.
3. (Franchi, Serapioni, Serra-Cassano, 2001). Si $S \subset \mathbb{H}$ est de périmètre fini, alors, en presque tout point, les dilatés par δ_t de S convergent vers des demi-espaces verticaux.
4. Au voisinage des bons points, à petite échelle, f factorise approximativement par $\mathbb{H}/[\mathbb{H}, \mathbb{H}]$, ce qui l'empêche d'être bilipschitzienne.

Définition

Une semi-distance de coupure élémentaire sur X , c'est $d_S(x, x') = |1_S(x) - 1_S(x')|$ où $S \subset X$ est une coupure. Une semi-distance de coupure est une somme de semi-distances de coupure élémentaires, i.e.

$$d(x, x') = \int_{\{S\}} d_S(x, x') d\mu_d(S)$$

où μ_d est une mesure sur l'ensemble des coupures.

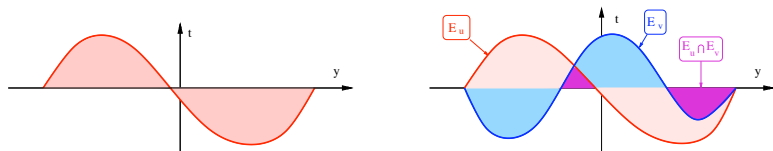
Lemme

(P. Assouad, 1977). Une semi-distance d sur X est induite par une application $f : X \rightarrow L^1(Y, \nu)$ si et seulement si c'est une semi-distance de coupure.

Preuve du lemme d'Assouad, \Leftarrow . Supposons que d est une semi-distance de coupure. Fixons une origine $o \in X$. Soit $S(x)$ l'ensemble des coupures qui séparent x de o . Alors $x \mapsto 1_{S(x)}$ plonge (X, d) isométriquement dans $L^1(\{S\}, \mu_d)$.

Définition

L'épigraphe d'une fonction $u : Y \rightarrow \mathbb{R}$ est $E_u = \{(y, t) \in Y \times \mathbb{R} \mid t^{-1}u(y) > 1\}$.



Lemme

Si $u, v \in L^1(Y, \nu)$, $\|u - v\|_{L^1} = (\nu \otimes dt)(E_u \Delta E_v)$.

Preuve du lemme d'Assouad, \Rightarrow . Soit $f : X \rightarrow L^1(Y, \nu)$. A chaque $(y, t) \in Y \times \mathbb{R}$, correspond une coupure $S(y, t) = \{x \in X \mid (y, t) \in E_{f(x)}\} = \{x \in X \mid t^{-1}f(x)(y) > 1\}$. Soit $\mu_f = S_*(\nu \otimes dt)$. Alors pour tous $x, x' \in X$,

$$\begin{aligned}
 d(f(x), f(x')) &= \|f(x) - f(x')\|_{L^1} = (\nu \otimes dt)(E_{f(x)} \Delta E_{f(x')}) \\
 &= \int_{Y \times \mathbb{R}} |1_{E_{f(x)}}(y, t) - 1_{E_{f(x')}}(y, t)| d\nu(y) dt \\
 &= \int_{Y \times \mathbb{R}} |1_{S(y, t)}(x) - 1_{S(y, t)}(x')| d\nu(y) dt \\
 &= \int_{\{S\}} |1_S(x) - 1_S(x')| d\mu_f(S).
 \end{aligned}$$

$\text{area}(\text{graphe}(h)) = \int \sqrt{1 + |\nabla h|^2} \sim \|\text{Liph}\|_{L^1}$. Toute limite L^1 de fonctions h de norme $\|\text{Liph}\|_{L^1}$ bornée conduit à une surface d'aire finie. Cela a conduit Tonelli à la

Définition

Soit X un espace PI, Y un espace métrique. Une application $L^1 f : X \rightarrow Y$ est à variation bornée si c'est la limite L^1 d'une suite de fonctions localement lipschitziennes h_i telles que Liph_i reste borné dans L^1 . L'inf des limites des $\int \text{Liph}_i$ sur toutes les approximations h_i s'appelle la variation de f .

Un sous-ensemble $S \subset X$ a un périmètre fini si sa fonction caractéristique 1_S est à variation bornée. Le périmètre de S est égal à la variation of 1_S .

Pour les fonctions BV à valeurs réelles, la formule de la coaire donne

$$\text{variation}(h) = \int_{\mathbb{R}} \text{périmètre}(\{h > t\}) dt.$$

Cela s'étend aux applications $X \rightarrow L^1(Y, \nu)$ comme suit.

Théorème

(Cheeger-Kleiner). Soit X un espace PI. Soit $f \in L^1(X, L^1(Y, \nu))$. Alors f est à variation bornée si et seulement si μ_f -presque toute coupure est de périmètre fini. De plus

$$\int_{\{S\}} \text{périmètre}(S) d\mu_f(S) = \int_Y \text{variation}(f(\cdot, y)) d\nu(y) \leq \text{const. variation}(f).$$

Désormais, $X = \mathbb{R}^n$ ou $X = \mathbb{H}$. Un *demi-espace* dans \mathbb{H} est l'image réciproque de \mathbb{R}_+ par un homomorphisme de groupes $\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$ (il est borné par un plan **vertical**).

Notation

Pour $S \subset X$, $x \in \partial S$, soit $\alpha(S, x, r) = \min_{H \text{ demi-espace passant par } x} \int_{B(x,r)} |1_S - 1_H|$.

On dit qu'un point x est (ϵ, R) -mauvais pour S , et on note $x \in \text{Bad}_{\epsilon,R}(S)$, s'il existe $r < R$ tel que $\alpha(S, x, r) > \epsilon$.

Pour tout S , le *périmètre* de S est une mesure $\|\partial S\|$ sur X , portée par la frontière de S . On peut la restreindre aux mauvais points. Etant donnée une mesure μ sur l'ensemble des coupures de périmètre fini, la *mesure du mauvais périmètre* $\lambda_{\mu,\epsilon,R}$ est définie sur une fonction continue u par

$$\int_X u(x) d\lambda_{\mu,\epsilon,R}(x) = \int_{\{S\}} \int_{\text{Bad}_{\epsilon,R}(S)} u(x) d\|\partial S\|(x) d\mu(S).$$

Théorème

(Franchi, Serapioni, Serra-Cassano, 2001). Soit S un ensemble de périmètre fini dans \mathbb{H} . Le périmètre de l'ensemble $\text{Bad}_{\epsilon,R}(S)$ tend vers 0 quand R tend to 0.

Corollaire

Soit μ une mesure sur l'ensemble des coupures de périmètre fini. La masse totale de la mesure $\lambda_{\mu,\epsilon,R}$ tend vers 0 quand R tend to 0.

Approximation d'une mesure de coupure par une mesure portée par les demi-plans

Soit μ une mesure sur l'ensemble des coupures de périmètre fini, soit d_μ la semi-distance correspondante. Etant donné $x \in X$ et $r > 0$, soit $\delta_{x,r}^* d_\mu$ la distance distance composée avec l'homothétie de rapport r et de centre x .

Théorème

(Cheeger-Kleiner). *Pour presque tout $x \in X$, il existe des mesures μ_r portées par les demi-espaces telles que $\|\frac{1}{r}\delta_{x,r}^* d_\mu - d_{\mu_r}\|$ tend vers 0 dans $L^1(X \times X)$.*


Preuve. Par différentiation de la mesure du mauvais périmètre, on obtient pour presque tout x un ensemble de mesure presque pleine dans la boule $B(x, r)$ de points où la plupart (au sens de μ) des coupures sont proches de demi-espaces. Pour une telle coupure S , on choisit le demi-espace $HS(S)$ le plus proche de S , et on pose $\mu_r = \frac{1}{r}(HS \circ \delta_{x,r})_* \mu$.

Preuve du théorème de non-plongement. Si $f : \mathbb{H} \rightarrow L^1$ est un plongement bilipschitzien, de mesure de coupure μ , $d_\mu(x', x'') = d(f(x'), f(x'')) \geq \text{const.} \cdot d(x', x'')$, donc

$$\frac{1}{r} \delta_{x,r}^* d_\mu(x', x'') \geq \text{const.} \cdot d(x', x'').$$

En revanche, une distance de coupure concentrée sur les demi-espaces satisfait

$$d_{\mu_r}(x', x'') = d_{\mu_r}(x' \bmod Z(\mathbb{H}), x'' \bmod Z(\mathbb{H})).$$

Deux telles semi-distances ne peuvent pas être L^1 -proches. 

La normale unitaire d'un ensemble de périmètre fini

On donne la preuve du théorème de rectifiabilité de Franchi, Serapioni et Serra-Cassano. Ici, $X = \mathbb{R}^n$ or \mathbb{H} . Soit $S \subset X$ un ensemble de périmètre fini. On utilise la formule de la divergence pour définir la normale au bord. Dans \mathbb{H} , la divergence d'un champ de vecteurs horizontal est définie comme suit :

$$\phi = \phi_\xi \xi + \phi_\eta \eta, \operatorname{div}(\phi) = \xi \phi_\xi + \eta \phi_\eta.$$

Lemme

(De Giorgi, 1954). *Il existe un champ de vecteurs unitaire (horizontal) mesurable ν tel que pour tout champ de vecteur à support compact (horizontal) ϕ ,*

$$-\int_S \operatorname{div}(\phi) = \int_X \langle \nu, \phi \rangle d\|\partial S\|.$$

Preuve. Pour une fonction lipschitzienne h , la formule de la divergence entraîne

$$\left| \int_S h \operatorname{div}(\phi) \right| \leq \|\phi\|_{L^\infty} \int_X \operatorname{Lip} h.$$

Cela montre que $\phi \mapsto -\int_S \operatorname{div}(\phi)$ est une mesure de Radon à valeurs vectorielles dont la masse est bornée par la variation de (h) . Ce fait s'étend aux fonction à variation bornée, en particulier à 1_S . Dans ce cas, la mesure de Radon est absolument continue par rapport à la mesure de périmètre, et ν est sa densité (Riesz).

Lemme

(Ambrosio, 2001). *En $\|\partial S\|$ -presque tout point x , la $\|\partial S\|$ -mesure d'une boule $B(x, r)$ est $\sim r^3$.*

Cela entraîne que les fonctions mesurables comme ν sont approximativement continues presque partout.

Par compacité, on peut extraire une sous-suite convergente des dilatés $\delta_{x,1/r}(S)$. La limite est un ensemble E de périmètre localement fini. Les normales unitaires convergent aussi $\|\partial S\|$ -presque partout, donc la normale unitaire de E est presque partout constante.

Lemme

Un ensemble E de périmètre localement fini dont la normale unitaire est presque partout égale à ξ est un demi-espace (vertical).

En effet, si on se déplace depuis l'origine, dans les deux sens le long des orbites de η , et positivement le long des orbites de ξ , on atteint exactement tous les points d'un demi-espace (vertical).

Théorème

(Franchi, Serapioni and Serra-Cassano, 2001). *A un ensemble de mesure de Hausdorff 3-dimensionnelle nulle près, le bord d'un ensemble de périmètre fini est une réunion dénombrable de morceaux compacts de surfaces définies par des équations $g = 0$ de classe C^1 , dont le gradient horizontal ne s'annule pas.*

Un plongement d'un espace métrique fini dans l'espace euclidien ou/et dans ℓ^1 intervient souvent dans les algorithmes de base de l'informatique théorique. On va le voir pour le problème Sparsest Cut.

Le meilleur algorithme connu pour une résolution approchée de Sparsest Cut, SDP (je vais l'expliquer), donne, dans le pire des cas, pour un graphe à n sommets, une réponse qui diffère de l'optimum d'un facteur au plus égal à la constante L_n définie comme suit.

Notation

On considère tous les espaces métriques à n points (X, d) tels que $(X, d^{1/2})$ se plonge isométriquement dans l'espace euclidien. Soit L_n le plus petit L tel que tous ces espaces admettent un plongement L -lipschitzien et qui augmente les distances dans ℓ^1 .

M.X. Goemans (in 1997) et N. Linial (in 2002) ont demandé si L_n est borné indépendamment de n .

En 2005, S. Khot et N. Vishnoi ont donné un contre-exemple.

Les boules du graphe de Cayley du groupe de Heisenberg discret fournissent d'autres contre-exemples, plus naturels et ayant des propriétés supplémentaires.

Problème

Sparsest Cut consiste à calculer la constante de Cheeger d'un graphe fini.

Une *coupure* dans un graphe pondéré G est une partition des sommets en $G^0 = S \cup \bar{S}$.

$$\Phi(S) = \frac{\#\partial S}{\#S \#\bar{S}}.$$

La *constante de Cheeger* de G est $\Phi^*(G) = \min_{\emptyset \subsetneq S \subsetneq G^0} \Phi(S)$.

Le calcul exact de Φ^* est NP-difficile. Mais une coupure (presque) optimale est fréquemment utilisée dans des algorithmes.

Arithmétisation

$$\Phi(S) = \frac{\sum_{\text{arêtes } uv} m(uv) |1_S(u) - 1_S(v)|}{\sum_u \sum_v |1_S(u) - 1_S(v)|}.$$

Soit $d(u, v) = |1_S(u) - 1_S(v)|$. C'est une semi-distance sur G^0 , induite par une application vers l'espace métrique à 2 points $\{0, 1\}$. L'enveloppe convexe de ces semi-distances est exactement l'ensemble des semi-distances plongeables dans ℓ^1 . Par conséquent,

$$\begin{aligned} \Phi^* &= \min_{d \text{ plongeable dans } \ell^1} \frac{\sum_{\text{arêtes } uv} m(uv) d(u, v)}{\sum_u \sum_v d(u, v)} \\ &= \min \left\{ \sum_{\text{arêtes } uv} m(uv) d(u, v) \mid d \text{ plongeable dans } \ell^1, \sum_u \sum_v d(u, v) = 1 \right\}. \end{aligned}$$

Malheureusement, le problème de décider si un espace métrique fini est plongable ou non dans ℓ^1 est NP-complet.

Relaxation. Oublions la condition de plongabilité dans ℓ^1 . Cela ramène à un problème de programmation linéaire, noté LP, pour lequel il existe des algorithmes polynômiaux. Soit Φ^{LP} le minimum de ce problème.

Théorème

(J. Bourgain, 1985). *Tout espace métrique à n points se plonge dans L^2 (et donc dans ℓ^1) avec distorsion au plus $O(\log(n))$. C'est optimal.*

Corollaire

$$\Phi^{LP} \leq \Phi^* \leq C \log(n) \Phi^{LP},$$

ce qui montre que LP fournit une approximation de Φ^ à un facteur multiplicatif $\log(n)$ près.*

Preuve. La métrique d' plongable dans ℓ^1 qui est $O(\log(n))$ -proche de la solution d de LP satisfait

$$\Phi^* \leq \Phi(d') \leq C \log(n) \Phi^* = C \log(n) \Phi^{LP}.$$

Procédure d'arrondi. (N. Linial, E. London, Y. Rabinovich, 1995). Le plongement de Bourgain est calculable en temps polynômial, on peut en tirer une coupure S qui réalise approximativement Φ^{LP} .

Arithmétisation.

$$\Phi(S) = \frac{\sum_{\text{edges } uv} m(uv) |1_S(u) - 1_S(v)|^2}{\sum_u \sum_v |1_S(u) - 1_S(v)|^2}.$$

Relaxation. On autorise des fonctions $x : G^0 \rightarrow L^2$ et non seulement à valeurs dans $\{0, 1\}$, en gardant la contrainte

$$\forall u, v, w \in G^0, \quad |x(u) - x(v)|^2 \leq |x(u) - x(w)|^2 + |x(w) - x(v)|^2,$$

satisfaite par les fonctions caractéristiques. Cela ramène à un problème de programmation semi-définie, noté SDP, pour lequel il existe des algorithmes polynômiaux. Soit $\Phi^{SDP} = \Phi(x)$ son minimum.

Soit $d(u, v) = |x(u) - x(v)|^2$. C'est une semi-distance sur G^0 , et $d^{1/2}$ est induite par un plongement dans l'espace euclidien. Par conséquent,

$$\Phi^{SDP} = \min \left\{ \sum_{\text{arêtes } uv} m(uv) d(u, v) \mid d \text{ distance, } \sqrt{d} \text{ plongable dans } L^2, \sum_u \sum_v d(u, v) = 1 \right\}.$$

Clairement,

$$\Phi^{SDP} \leq \Phi^* \leq L_n \Phi^{SDP},$$

ce qui montre que Φ^* est calculable en temps polynômial à un facteur multiplicatif L_n près.

Théorème

(S. Arora, J. Lee, A. Naor, 2005). Soit (X, d) un espace métrique à n points. On suppose que $(X, d^{1/2})$ se plonge isométriquement dans L^2 . Alors (X, d) se plonge aussi dans L^2 avec distorsion $O(\sqrt{\log(n)} \log(\log(n)))$.

Remarque

C'est presque optimal, puisque l'ensemble des sommets du n -cube ℓ^1 ne se plonge pas dans L^2 avec distorsion $< \sqrt{n}$ (Enflo, 1969).

Corollaire

$L_n = O(\sqrt{\log(n)} \log(\log(n)))$.

En effet, L^2 se plonge isométriquement dans L^1 .

Remarque

La non plongeabilité du groupe de Heisenberg entraîne une borne inférieure sur L_n . Cheeger, Kleiner and Naor annoncent qu'elle peut être rendue effective. Conjecturalement, $L_n = \Omega(\log(\log(n))^\delta)$ pour un $\delta > 0$.

Conclusion

L'approche SDP donne actuellement la meilleure solution connue du problème Sparsest Cut général. Dans le cas particulier où les poids sont tous égaux, S. Arora, E. Hazan, S. Kale (2004) donnent un algorithme polynômial différent qui calcule Φ^* à une facteur $O(\sqrt{\log(n)})$ près.

Proposition

L'impossibilité de plonger le groupe d'Heisenberg dans L^1 entraîne que L_n tend vers $+\infty$.

Preuve. Le lemme suivant remonte à Kakutani (et résulte du lemme d'Assouad).

Lemme

L'ensemble des semi-distances plongeables dans L^1 est fermé. De plus, un espace semi-métrique X se plonge isométriquement dans L^1 si et seulement si tout sous-ensemble fini de X se plonge isométriquement dans L^1 .

Supposons que la boule de rayon n de $(\mathbb{H}_{\mathbb{Z}}, d_{\mathbb{Z}})$ admette un plongement L -bilipschitzien dans L^1 . Comme les distances induites d_n sont bornées, on peut supposer qu'elles convergent simplement vers une distance d' . Alors d' se plonge dans L^1 , elle est L -équivalente à $d_{\mathbb{Z}}$. Donc $(\mathbb{H}_{\mathbb{Z}}, d_{\mathbb{Z}})$ admet un plongement L -bilipschitzien dans L^1 .

Lemme

(Kakutani, 1939, Bretagnolle, Dacunha-Castelle, Krivine, 1966). *Tout ultraproduit d'espaces L^p est à nouveau un espace L^p .*

En particulier, tout cône asymptotique de L^1 est isométrique à L^1 . Par conséquent, un plongement bilipschitzien (ou quasiisométrique) de $(\mathbb{H}_{\mathbb{Z}}, d_{\mathbb{Z}})$ dans L^1 donne un plongement bilipschitzien de (\mathbb{H}, d) dans L^1 .

Théorème

(J. Lee, A. Naor, 2006). *Il existe une distance invariante à gauche d' équivalente à d sur le groupe d'Heisenberg telle que $(\mathbb{H}, d'^{1/2})$ se plonge isométriquement dans L^2 .*