Cohomologie L^p et géométrie conforme à grande échelle

Pierre Pansu

19 décembre 2013

Conforme : difféomorphisme entre variétés riemanniennes dont la différentielle envoie sphères (infinitésimales) sur sphères.

Conforme : difféomorphisme entre variétés riemanniennes dont la différentielle envoie sphères (infinitésimales) sur sphères.

Exemples

L'espace euclidien est conforme à la sphère privée d'un point.
L'espace hyperbolique est conforme à une boule de l'espace euclidien.
Une boule de l'espace euclidien n'est pas conforme à l'espace euclidien.

Conforme : difféomorphisme entre variétés riemanniennes dont la différentielle envoie sphères (infinitésimales) sur sphères.

Exemples

L'espace euclidien est conforme à la sphère privée d'un point.
L'espace hyperbolique est conforme à une boule de l'espace euclidien.
Une boule de l'espace euclidien n'est pas conforme à l'espace euclidien.

Quasi-symétrique : homéomorphisme entre espaces métriques tel que

$$\forall x,\ \forall x',\ \forall x'', \quad \frac{d(f(x),f(x'))}{d(f(x),f(x''))} \leq \eta(\frac{d(x,x')}{d(x,x'')}),$$

où $\eta \in Homeo(\mathbb{R}_+)$.

Conforme : difféomorphisme entre variétés riemanniennes dont la différentielle envoie sphères (infinitésimales) sur sphères.

Exemples

L'espace euclidien est conforme à la sphère privée d'un point.
L'espace hyperbolique est conforme à une boule de l'espace euclidien.
Une boule de l'espace euclidien n'est pas conforme à l'espace euclidien.

Quasi-symétrique : homéomorphisme entre espaces métriques tel que

$$\forall x,\ \forall x',\ \forall x'',\quad \frac{d(f(x),f(x'))}{d(f(x),f(x''))} \leq \eta(\frac{d(x,x')}{d(x,x'')}),$$

où $\eta \in Homeo(\mathbb{R}_+)$.

Exemples

L'espace euclidien est quasi-symétrique à la sphère privée d'un point.
L'espace hyperbolique n'est pas quasi-symétrique à l'espace euclidien.

Plongement uniforme. Application entre espaces métriques telle que

$$\forall R,\ \exists T,\ \forall x,\ \forall x', \quad d(x,x') \le R \Rightarrow d(f(x),f(x')) \le T.$$

Quasi-isométrie. Paire de plongements uniformes entre espaces métriques telle que

$$\exists S,\ \forall x,\ \forall y, \quad d(x, g\circ f(x)) \le S,\ d(y, f\circ g(y)) \le S.$$

Plongement uniforme. Application entre espaces métriques telle que

$$\forall R,\ \exists T,\ \forall x,\ \forall x', \quad d(x,x') \leq R \Rightarrow d(f(x),f(x')) \leq T.$$

Quasi-isométrie. Paire de plongements uniformes entre espaces métriques telle que

$$\exists S,\ \forall x,\ \forall y, \quad d(x, g\circ f(x)) \leq S,\ d(y, f\circ g(y)) \leq S.$$

Conforme à grande échelle ? On cherche une classe d'applications entre espaces métriques

1. qui a les mêmes propriétés qualitatives que *conforme* ou *quasi-symétrique*,
2. stable par composition,
3. contient les quasi-isométries.

Plongement uniforme. Application entre espaces métriques telle que

$$\forall R,\ \exists T,\ \forall x,\ \forall x',\quad d(x,x')\leq R \Rightarrow d(f(x),f(x'))\leq T.$$

Quasi-isométrie. Paire de plongements uniformes entre espaces métriques telle que

$$\exists S,\ \forall x,\ \forall y,\quad d(x,g\circ f(x))\leq S,\ \ d(y,f\circ g(y))\leq S.$$

Conforme à grande échelle ? On cherche une classe d'applications entre espaces métriques

1. qui a les mêmes propriétés qualitatives que *conforme* ou *quasi-symétrique*,
2. stable par composition,
3. contient les quasi-isométries.

Elément de réponse dans un article de Itai Benjamini et Oded Schramm.

Empilement de boules : collections de boules d'intérieurs disjoints.
Graphe d'incidence : un sommet par boule, une arête lorsque 2 boules se touchent.

Définition

Un graphe est empilable dans $\mathbb{R}^d$ *si c'est le graphe d'incidence d'un empilement de boules de* $\mathbb{R}^d$.

Empilement de boules : collections de boules d'intérieurs disjoints.
Graphe d'incidence : un sommet par boule, une arête lorsque 2 boules se touchent.

Définition

Un graphe est empilable dans $\mathbb{R}^d$ si c'est le graphe d'incidence d'un empilement de boules de $\mathbb{R}^d$.

Théorème (Koebe 1931)

Un graphe est empilable dans $\mathbb{R}^2$ si et seulement si il est planaire (i.e. plongeable dans $\mathbb{R}^2$).

Interprétation : version mésoscopique du théorème de représentation conforme.

Empilement de boules : collections de boules d'intérieurs disjoints.
Graphe d'incidence : un sommet par boule, une arête lorsque 2 boules se touchent.

Définition

Un graphe est empilable dans $\mathbb{R}^d$ si c'est le graphe d'incidence d'un empilement de boules de $\mathbb{R}^d$.

Théorème (Koebe 1931)

Un graphe est empilable dans $\mathbb{R}^2$ si et seulement si il est planaire (i.e. plongeable dans $\mathbb{R}^2$).

Interprétation : version mésoscopique du théorème de représentation conforme.
D'ailleurs,

- Il y a des algorithmes rapides de calcul de l'empilement de Koebe.
- Lorsqu'on applique le théorème au graphe d'incidence de l'empilement de disques de même rayon contenu dans un domaine plan, ça converge vers la représentation conforme de ce domaine quand le rayon tend vers 0.
- C'est un bon procédé algorithmique pour calculer une approximation de la représentation conforme.

1-cocycle : fonction κ sur les couples de sommets telle que $\kappa(x,x') + \kappa(x',x'') = \kappa(x,x'')$. Exemple : $\kappa = du$ où u est une fonction sur les sommets.

Norme L^p : $\|\kappa\|_p = \left(\sum_{aretes\ xx'} |\kappa(x,x')|^p\right)^{1/p}$.

Définition

La cohomologie L^p d'un graphe, c'est $L^pH^1 = \{1\text{-cocycles } L^p\}/d\{fonctions\ L^p\}$. La cohomologie L^p réduite, c'est $L^p\bar{H}^1 = \{1\text{-cocycles } L^p\}/\overline{d\{fonctions\ L^p\}}$.

Exemples

- *Grille de $\mathbb{R}^d$. $L^pH^1 \neq 0$, $L^p\bar{H}^1 = 0$ pour tout $p > 1$.*
- *Graphe de Cayley d'un réseau uniforme de l'espace hyperbolique H^d : $L^pH^1 = 0 \Leftrightarrow L^p\bar{H}^1 = 0 \Leftrightarrow p \leq d-1$.*

Remarque

Invariant par quasi-isométrie.

p-volume. Une métrique sur un graphe, c'est une fonction positive m sur les arêtes. Son p-volume, c'est $\sum_{aretes\ e} m(e)^p$.

p-module d'une famille de courbes Γ. C'est la borne inférieure des p-volumes du graphe sur toutes les métriques qui donnent un 1-volume ≥ 1 à toutes les courbes $\gamma \in \Gamma$.

p-volume. Une métrique sur un graphe, c'est une fonction positive m sur les arêtes. Son p-volume, c'est $\sum_{aretes\ e} m(e)^p$.

p-module d'une famille de courbes Γ. C'est la borne inférieure des p-volumes du graphe sur toutes les métriques qui donnent un 1-volume ≥ 1 à toutes les courbes $\gamma \in \Gamma$.

Définition

Un graphe est p-parabolique si le p-module de la famille des courbes non bornées qui partent de l'origine est nul.

Remarque

Invariant par quasi-isométrie.

p-volume. Une métrique sur un graphe, c'est une fonction positive m sur les arêtes. Son p-volume, c'est $\sum_{aretes\ e} m(e)^p$.

p-module d'une famille de courbes Γ. C'est la borne inférieure des p-volumes du graphe sur toutes les métriques qui donnent un 1-volume ≥ 1 à toutes les courbes $\gamma \in \Gamma$.

Définition

Un graphe est p-parabolique si le p-module de la famille des courbes non bornées qui partent de l'origine est nul.

Remarque

Invariant par quasi-isométrie.

Proposition (Troyanov)

Le graphe de Cayley d'un groupe de type fini est p-parabolique si et seulement si la croissance du volume est polynômiale de degré $\leq p$.

p-volume. Une métrique sur un graphe, c'est une fonction positive m sur les arêtes. Son p-volume, c'est $\sum_{aretes\ e} m(e)^p$.

p-module d'une famille de courbes Γ. C'est la borne inférieure des p-volumes du graphe sur toutes les métriques qui donnent un 1-volume ≥ 1 à toutes les courbes $\gamma \in \Gamma$.

Définition

Un graphe est p-parabolique si le p-module de la famille des courbes non bornées qui partent de l'origine est nul.

Remarque

Invariant par quasi-isométrie.

Proposition (Troyanov)

Le graphe de Cayley d'un groupe de type fini est p-parabolique si et seulement si la croissance du volume est polynômiale de degré $\leq p$.

Démonstration. D'après Coulhon et Saloff-Coste, croissance du volume $> R^p \Rightarrow$ isopérimétrie meilleure que celle de $\mathbb{R}^p \Rightarrow$ (Ahlfors) non p-parabolique.

D'après Gromov, parabolique implique que le groupe est virtuellement nilpotent. Rare.

Théorème (Benjamini-Schramm 2012)

Soit G un graphe empilable dans $\mathbb{R}^d$. Alors

1. *ou bien G est d-parabolique,*
2. *ou bien $L^d\bar{H}^1(G) \neq 0$.*

Théorème (Benjamini-Schramm 2012)

Soit G un graphe empilable dans $\mathbb{R}^d$. Alors

1. *ou bien G est d-parabolique,*
2. *ou bien $L^d\bar{H}^1(G) \neq 0$.*

Exemples

La grille de $\mathbb{R}^{d+1}$ n'est pas empilable dans $\mathbb{R}^d$.

Théorème (Benjamini-Schramm 2012)

Soit G un graphe empilable dans $\mathbb{R}^d$. Alors

1. *ou bien G est d-parabolique,*
2. *ou bien $L^d\bar{H}^1(G) \neq 0$.*

Exemples

La grille de $\mathbb{R}^{d+1}$ n'est pas empilable dans $\mathbb{R}^d$.

$L^p\bar{H}^1$ est moins bien compris que la parabolicité, mais rare aussi. Par exemple,

Théorème (Pansu)

Pour un groupe de Lie G, $L^p\bar{H}^1(G) \neq 0 \Leftrightarrow G$ est commensurable à $R \times_\alpha N$ où α est une dérivation à valeurs propres $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$ positives, et $p > \dfrac{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n}{\lambda_1}$.

Exemple (Yu, Bourdon-Pajot)

Pour tout groupe hyperbolique non élémentaire, $L^p\bar{H}^1 \neq 0$ pour p assez grand.

(N,ℓ,R,S)-*empilement* : dans un espace métrique, c'est une collection de boules B_j de rayons $R \leq r_j \leq S$ telle que les ℓB_j forment un recouvrement de multiplicité $< N$.

Définition

Une application f entre espaces métriques (doublée d'une correspondance $B \mapsto B'$ entre boules telle que $f(B) \subset B'$) est conforme à grande échelle si, pour tous $R \leq S$, $N \geq 1$ et $\ell' > 1$, il existe $N' \geq 1$ et $\ell \geq 1$ tels que f envoie (N,ℓ,R,S)-empilements sur $(N',\ell',0,\infty)$-empilements.

Exemples

La composition d'un plongement uniforme et d'un homéomorphisme quasi-symétrique est conforme à grande échelle.
Le modèle de Poincaré de l'espace hyperbolique est (presque) une application conforme à grande échelle de H^d dans R^d.

Espace métrique p-Ahlfors-régulier : s'il existe une mesure de probabilité μ telle que $\mu(B(x,R)) \simeq R^p$ pour $R < R_0$.

Espace métrique p-Ahlfors-régulier : s'il existe une mesure de probabilité μ telle que $\mu(B(x,R)) \simeq R^p$ pour $R < R_0$.

p-énergie : si u est une application vers un espace métrique, $E_{p,N,\ell,R,S}(u)$ est le sup des sommes $\sum_j \mathrm{diam}(u(B_j))^p$ sur les (N,ℓ,R,S)-empilements. Exemple : sur un espace métrique d-Ahlfors-régulier, les applications lipschitziennes ont une d-énergie finie.

Espace métrique p-Ahlfors-régulier : s'il existe une mesure de probabilité μ telle que $\mu(B(x,R)) \simeq R^p$ pour $R < R_0$.

p-énergie : si u est une application vers un espace métrique, $E_{p,N,\ell,R,S}(u)$ est le sup des sommes $\sum_j \mathrm{diam}(u(B_j))^p$ sur les (N,ℓ,R,S)-empilements. Exemple : sur un espace métrique d-Ahlfors-régulier, les applications lipschitziennes ont une d-énergie finie.

p-module d'une famille de courbes Γ : c'est l'inf des p-énergies des applications u vers des espaces métriques telles que $\mathrm{long}(u \circ \gamma) \geq 1$ pour toute courbe $\gamma \in \Gamma$.

Espace métrique p-Ahlfors-régulier : s'il existe une mesure de probabilité μ telle que $\mu(B(x,R)) \simeq R^p$ pour $R < R_0$.

p-énergie : si u est une application vers un espace métrique, $E_{p,N,\ell,R,S}(u)$ est le sup des sommes $\sum_j \mathrm{diam}(u(B_j))^p$ sur les (N,ℓ,R,S)-empilements. Exemple : sur un espace métrique d-Ahlfors-régulier, les applications lipschitziennes ont une d-énergie finie.

p-module d'une famille de courbes Γ : c'est l'inf des p-énergies des applications u vers des espaces métriques telles que $\mathrm{long}(u \circ \gamma) \geq 1$ pour toute courbe $\gamma \in \Gamma$.

p-parabolicité : c'est lorsque le p-module de la famille des courbes non bornées issues d'un compact vaut 0.

Espace métrique p-Ahlfors-régulier : s'il existe une mesure de probabilité μ telle que $\mu(B(x,R)) \simeq R^p$ pour $R < R_0$.

p-énergie : si u est une application vers un espace métrique, $E_{p,N,\ell,R,S}(u)$ est le sup des sommes $\sum_j \mathrm{diam}(u(B_j))^p$ sur les (N,ℓ,R,S)-empilements. Exemple : sur un espace métrique d-Ahlfors-régulier, les applications lipschitziennes ont une d-énergie finie.

p-module d'une famille de courbes Γ : c'est l'inf des p-énergies des applications u vers des espaces métriques telles que $\mathrm{long}(u \circ \gamma) \geq 1$ pour toute courbe $\gamma \in \Gamma$.

p-parabolicité : c'est lorsque le p-module de la famille des courbes non bornées issues d'un compact vaut 0.

Norme L^p d'une cochaîne : c'est le sup des sommes $(\sum_j \sup |\kappa_{|B_j}|^p)^{1/p}$ sur les (N,ℓ,R,S)-empilements (on fixe N,ℓ,R,S).

Espace métrique p-Ahlfors-régulier : s'il existe une mesure de probabilité μ telle que $\mu(B(x,R)) \simeq R^p$ pour $R < R_0$.

p-énergie : si u est une application vers un espace métrique, $E_{p,N,\ell,R,S}(u)$ est le sup des sommes $\sum_j \mathrm{diam}(u(B_j))^p$ sur les (N,ℓ,R,S)-empilements. Exemple : sur un espace métrique d-Ahlfors-régulier, les applications lipschitziennes ont une d-énergie finie.

p-module d'une famille de courbes Γ : c'est l'inf des p-énergies des applications u vers des espaces métriques telles que $\mathrm{long}(u \circ \gamma) \geq 1$ pour toute courbe $\gamma \in \Gamma$.

p-parabolicité : c'est lorsque le p-module de la famille des courbes non bornées issues d'un compact vaut 0.

Norme L^p d'une cochaîne : c'est le sup des sommes $(\sum_j \sup |\kappa_{|B_j}|^p)^{1/p}$ sur les (N,ℓ,R,S)-empilements (on fixe N,ℓ,R,S).

Définition

La cohomologie L^p d'un espace métrique, c'est $L^pH^k = \{k\text{-cocycles } L^p\}/d\{(k-1)\text{-cochaînes } L^p\}$. *La cohomologie L^p réduite, c'est* $L^p\bar{H}^k = \{k\text{-cocycles } L^p\}/\overline{d\{(k-1)\text{-cochaînes } L^p\}}$.

Théorème

Soit Y un espace métrique compact, d-Ahlfors-régulier. S'il existe une application continue, conforme à grande échelle, de X dans Y, alors

1. *ou bien X est d-parabolique,*
2. *ou bien $L^d\bar{H}^1(X) \neq 0$.*

Théorème

Soit Y un espace métrique compact, d-Ahlfors-régulier. S'il existe une application continue, conforme à grande échelle, de X dans Y, alors

1. *ou bien X est d-parabolique,*
2. *ou bien $L^d\bar{H}^1(X) \neq 0$.*

Démonstration.

1. Naturalité : la composition avec une application f conforme à grande échelle préserve les fonctions d'énergie finie. En particulier, si Y est d-Ahlfors-régulier, $E_d(f) < \infty$.

Théorème

Soit Y un espace métrique compact, d-Ahlfors-régulier. S'il existe une application continue, conforme à grande échelle, de X dans Y, alors

1. *ou bien X est d-parabolique,*
2. *ou bien $L^d\bar{H}^1(X) \neq 0$.*

Démonstration.

1. Naturalité : la composition avec une application f conforme à grande échelle préserve les fonctions d'énergie finie. En particulier, si Y est d-Ahlfors-régulier, $E_d(f) < \infty$.
2. Si $L^d H^1(X) = 0$, toute application d'énergie finie vers un espace métrique complet possède une limite. Donc f possède une limite y.

Théorème

Soit Y un espace métrique compact, d-Ahlfors-régulier. S'il existe une application continue, conforme à grande échelle, de X dans Y, alors

1. *ou bien X est d-parabolique,*
2. *ou bien $L^d\bar{H}^1(X) \neq 0$.*

Démonstration.

1. Naturalité : la composition avec une application f conforme à grande échelle préserve les fonctions d'énergie finie. En particulier, si Y est d-Ahlfors-régulier, $E_d(f) < \infty$.
2. Si $L^dH^1(X) = 0$, toute application d'énergie finie vers un espace métrique complet possède une limite. Donc f possède une limite y.
3. Sur $Y \setminus \{y\}$, il existe une fonction v_y d'énergie finie qui tend vers $+\infty$ en y. Alors $v_y \circ f$ est d'énergie finie mais tend vers $+\infty$, contradiction.

Théorème

Soit Y un espace métrique compact, d-Ahlfors-régulier. S'il existe une application continue, conforme à grande échelle, de X dans Y, alors

1. *ou bien X est d-parabolique,*
2. *ou bien $L^d\bar{H}^1(X) \neq 0$.*

Démonstration.

1. Naturalité : la composition avec une application f conforme à grande échelle préserve les fonctions d'énergie finie. En particulier, si Y est d-Ahlfors-régulier, $E_d(f) < \infty$.
2. Si $L^d H^1(X) = 0$, toute application d'énergie finie vers un espace métrique complet possède une limite. Donc f possède une limite y.
3. Sur $Y \setminus \{y\}$, il existe une fonction v_y d'énergie finie qui tend vers $+\infty$ en y. Alors $v_y \circ f$ est d'énergie finie mais tend vers $+\infty$, contradiction.
4. Une application d'énergie finie possède une limite le long de presque toute courbe. En particulier, f possède une limite le long de presque toute courbe.

Théorème

Soit Y un espace métrique compact, d-Ahlfors-régulier. S'il existe une application continue, conforme à grande échelle, de X dans Y, alors

1. *ou bien X est d-parabolique,*
2. *ou bien $L^d \bar{H}^1(X) \neq 0$.*

Démonstration.

1. Naturalité : la composition avec une application f conforme à grande échelle préserve les fonctions d'énergie finie. En particulier, si Y est d-Ahlfors-régulier, $E_d(f) < \infty$.
2. Si $L^d H^1(X) = 0$, toute application d'énergie finie vers un espace métrique complet possède une limite. Donc f possède une limite y.
3. Sur $Y \setminus \{y\}$, il existe une fonction v_y d'énergie finie qui tend vers $+\infty$ en y. Alors $v_y \circ f$ est d'énergie finie mais tend vers $+\infty$, contradiction.
4. Une application d'énergie finie possède une limite le long de presque toute courbe. En particulier, f possède une limite le long de presque toute courbe.
5. Si $L^d \bar{H}^1(X) = 0$, cette limite est p-presque toujours la même, y.

Théorème

Soit Y un espace métrique compact, d-Ahlfors-régulier. S'il existe une application continue, conforme à grande échelle, de X dans Y, alors

1. *ou bien X est d-parabolique,*
2. *ou bien $L^d\bar{H}^1(X) \neq 0$.*

Démonstration.

1. Naturalité : la composition avec une application f conforme à grande échelle préserve les fonctions d'énergie finie. En particulier, si Y est d-Ahlfors-régulier, $E_d(f) < \infty$.
2. Si $L^d H^1(X) = 0$, toute application d'énergie finie vers un espace métrique complet possède une limite. Donc f possède une limite y.
3. Sur $Y \setminus \{y\}$, il existe une fonction v_y d'énergie finie qui tend vers $+\infty$ en y. Alors $v_y \circ f$ est d'énergie finie mais tend vers $+\infty$, contradiction.
4. Une application d'énergie finie possède une limite le long de presque toute courbe. En particulier, f possède une limite le long de presque toute courbe.
5. Si $L^d\bar{H}^1(X) = 0$, cette limite est p-presque toujours la même, y.
6. Alors $v_y \circ f$ est d'énergie finie mais tend vers $+\infty$ le long de presque toute courbe. Donc presque toute courbe $=$ aucune courbe, c'est la p-parabolicité.

Exemple (Shchur, généralisation du modèle de Poincaré)

Si G est un groupe hyperbolique, alors G se plonge (presque) conformément à grande échelle dans $\mathbb{R} \times \partial G$.

Corollaire

Soient $X = \mathbb{R} \times_\alpha N$ et $Y = \mathbb{R} \times_{\alpha'} N'$ deux groupes de Lie hyperboliques. S'il existe une application continue, conforme à grande échelle, de X vers Y, alors

$$\frac{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n}{\lambda_1} \leq \max\{\frac{\lambda'_1 + \cdots + \lambda'_{n'}}{\lambda'_1}, n' + 1\}.$$

Remarquer que $\frac{\lambda_1+\cdots+\lambda_n}{\lambda_1}$ est dimension conforme du bord à l'infini de X.

Exemple

Si $N < N'$ est un sous-groupe α'-invariant et $\alpha = \alpha'_{|\mathfrak{n}'}$, le plongement évident de X dans Y est uniforme et donc conforme à grande échelle.