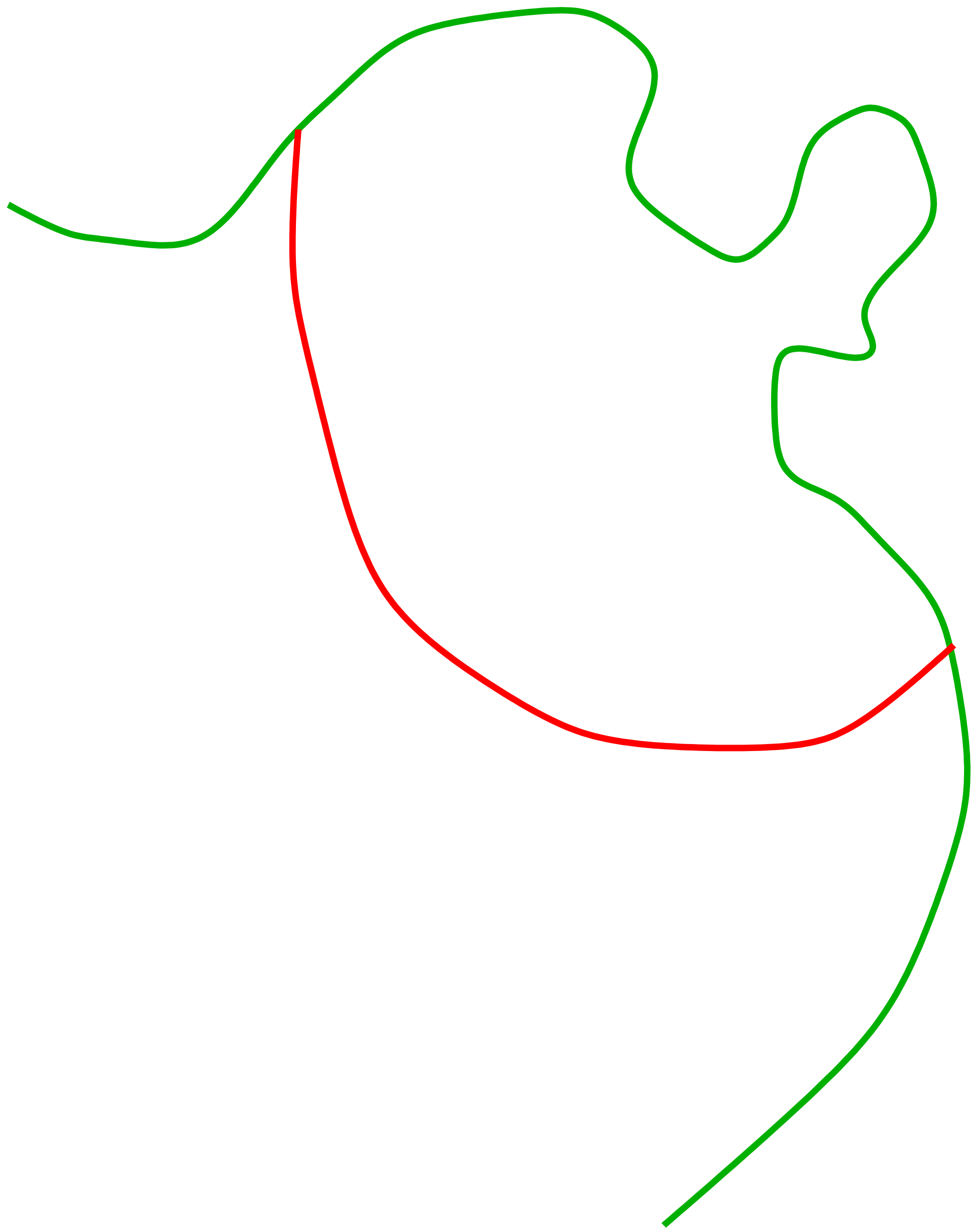
Le problème de Didon

Comment entourer, avec une corde de longueur fixée,
la plus grande aire possible ?

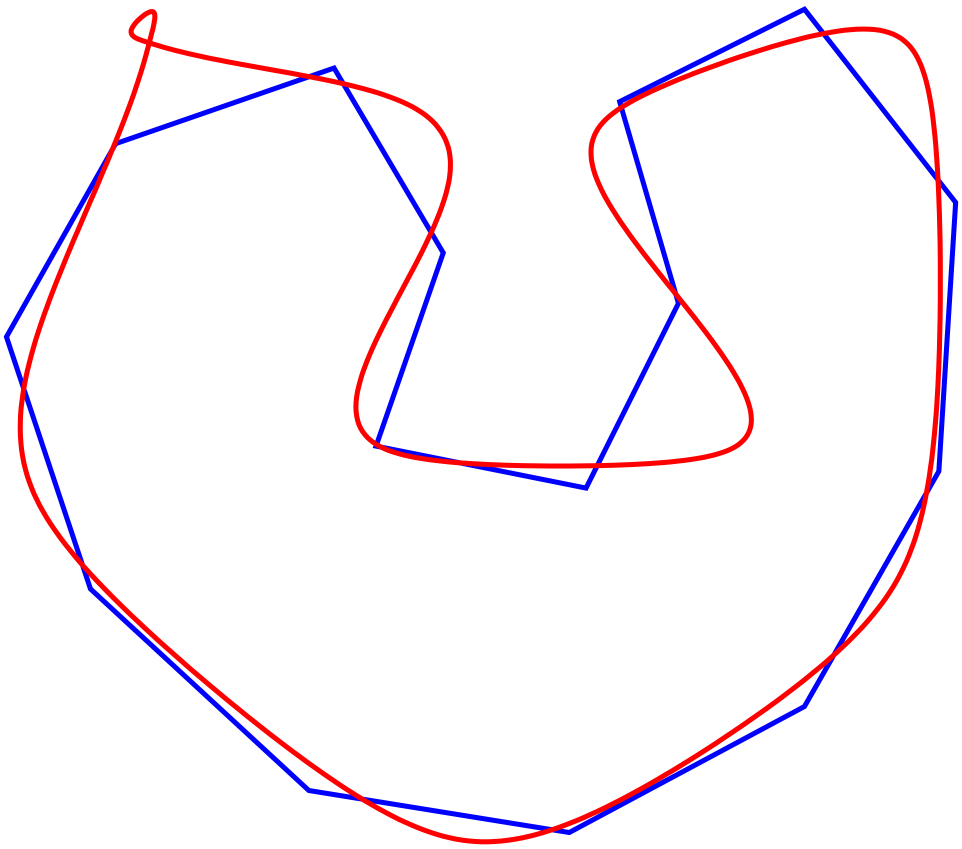


Solution : donner à la corde la forme

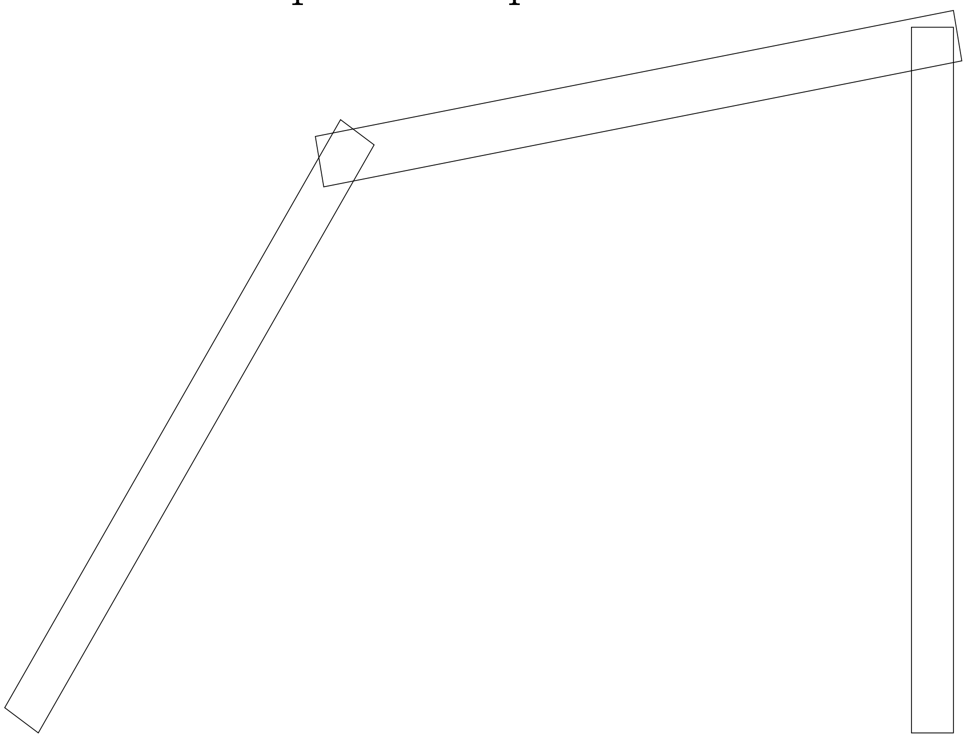
d'un arc de cercle

THEOREME : $Aire \geq \frac{1}{4\pi} Longueur^2$.

Première discrétisation
Remplacer une courbe par un polygone



Solution du problème isopérimétrique
pour un quadrilatère



THEOREME : Un quadrilatère flexible entoure une aire maximale lorsque ses sommets sont cocycliques.

COROLLAIRE : Un polygone flexible qui entoure une aire maximale est inscrit dans un cercle.

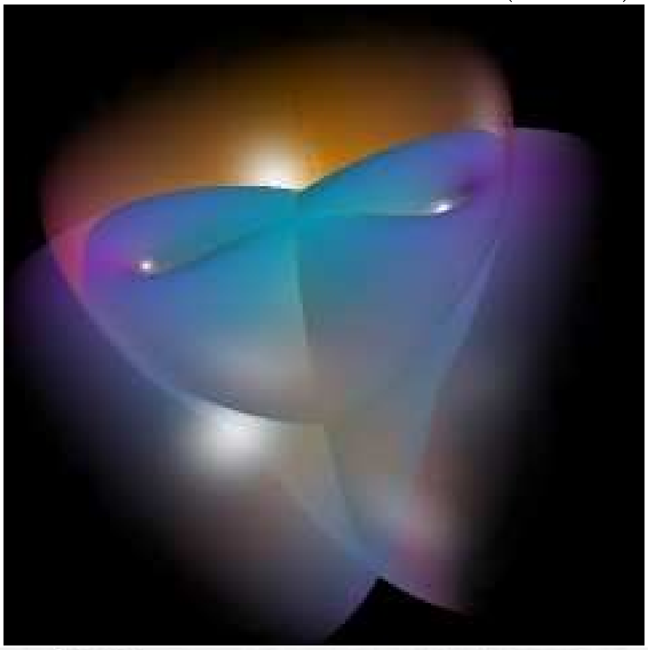
Equation différentielle des courbes ou des surfaces optimales

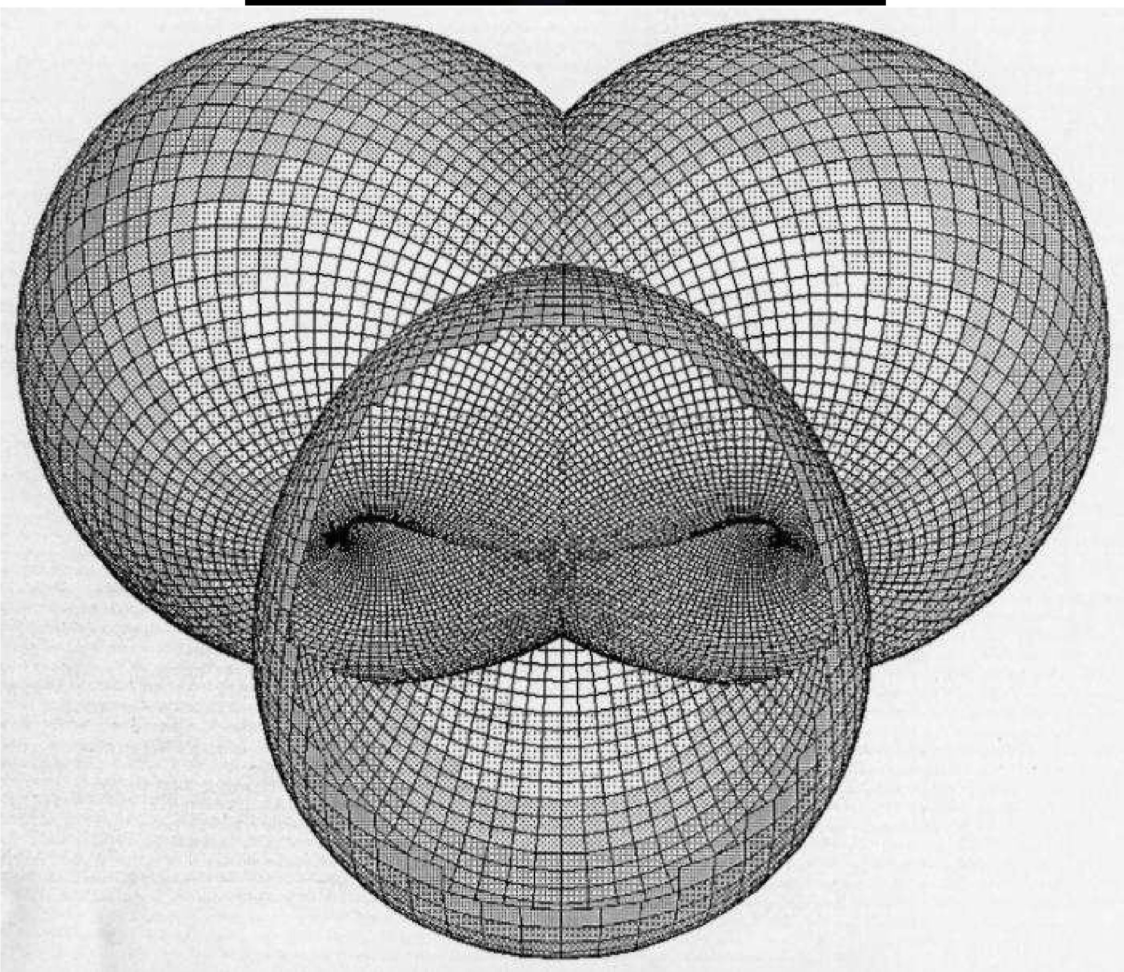
THEOREME (?) Une courbe qui entoure une aire maximale à longueur fixée doit avoir une courbure constante.

THEOREME (Euler, 1744) : Une surface qui entoure un volume maximal à aire fixée doit avoir une courbure moyenne constante.

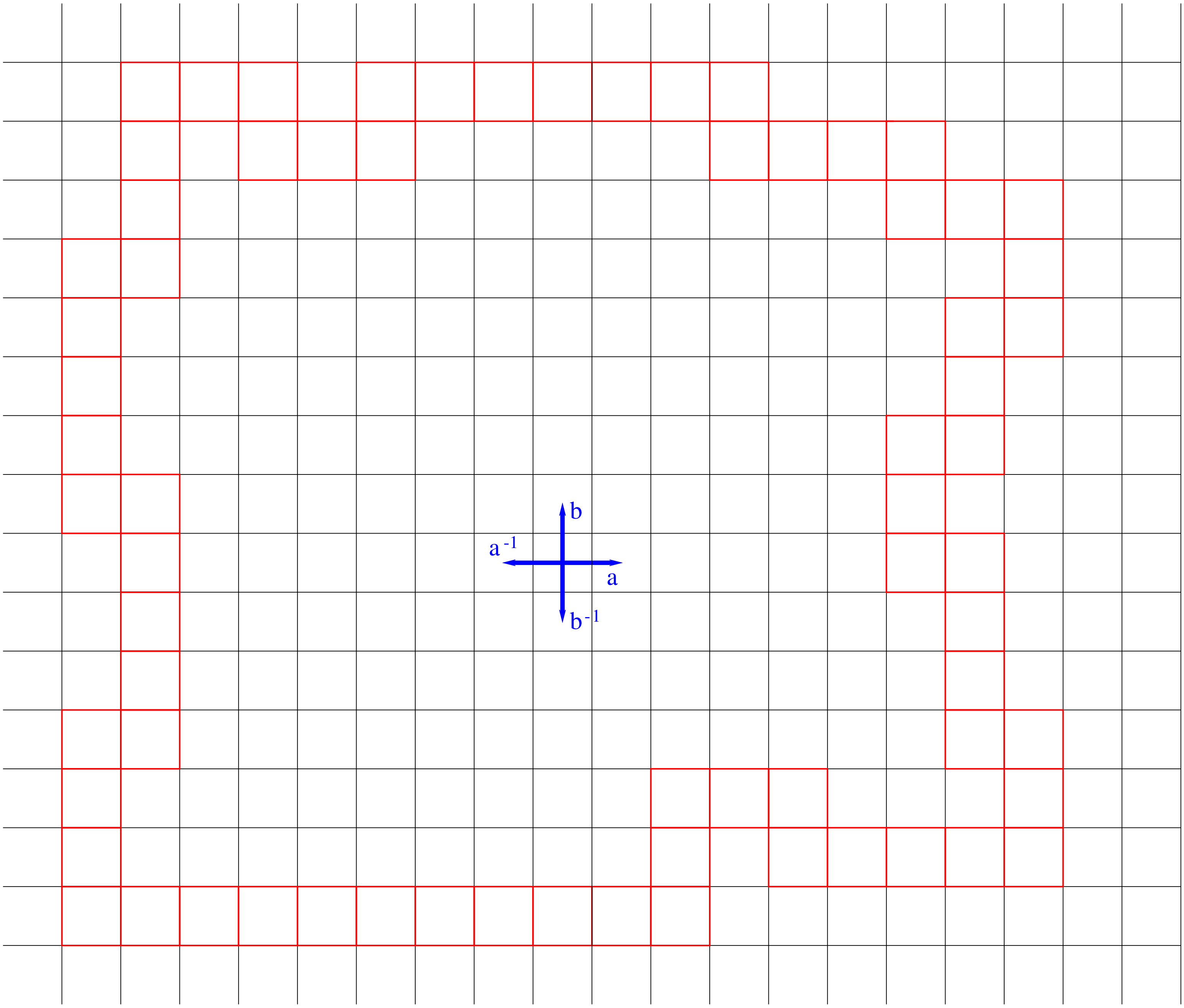
THEOREME (Aleksandrov, 1944) : Une surface à courbure moyenne constante qui ne se recoupe pas est une sphère.

Le tore de H. Wente (1986)





Deuxième discrétisation
Remplacer le plan euclidien par une grille



Relation : $aba^{-1}b^{-1}=1$

$$\text{Relation : } abab^{-1} = 1$$

$$\text{Aire} = \text{Longueur}^2$$

$$\text{Aire}(L) = L^2$$

Relations : $a^4=1$, $b^3=1$, $c^3=1$.

Aire = Longueur

Aire(L) = L

Remplissage dans les groupes

Une présentation finie d'un groupe : les mots en un alphabet fini a, a^{-1}, b, b^{-1}, ..., à réduction près par un nombre fini de règles de simplification.

Remplissage : Une courbe fermée dans un groupe, c'est un mot simplifiable. Ca a une longueur. Un remplissage, c'est la liste des règles utilisées pour simplifier. Ca a une "aire", le nombre de règles utilisées.

La fonction de Dehn donne l'aire Aire(L) nécessaire pour remplir toute courbe de longueur L.

THEOREME (Novikov-Adian, 1961) : il existe des groupes pour lesquels le problème des mots est indécidable. Pour un tel groupe, la fonction de Dehn n'est pas récursive.

THEOREME (Gromov, 1986) : La fonction de Dehn d'un groupe est ou bien linéaire ou bien au moins quadratique.

THEOREME (Birget, Rips, Sapir, 2000) :

Toute fonction temps (performance d'un ordinateur) au moins quartique est la fonction de Dehn d'un groupe.

THEOREME (Gromov, 1986) : Un groupe dont la fonction de Dehn est linéaire, i.e.

$$\mathrm{Aire}(\mathrm{L}) = \mathrm{L},$$

ressemble au plan hyperbolique : il possède un bord, les triangles sont minces, etc...

THEOREME (Gromov, 1992) : Presque tout groupe a une fonction de Dehn linéaire.