L'oeuvre de Misha Gromov

P. Pansu, Université Paris-Sud 11

21 septembre 2009

Quelques jalons

années 1960 : "h-principe"

années 1970 : cohomologie bornée, convergence de variétés riemanniennes

années 1980 : groupes hyperboliques, courbes pseudo-holomorphes

années 1990 : espaces métriques mesurés, dimension moyenne

années 2000 : groupes aléatoires, intérêt pour la biologie

Quelques jalons

années 1960 : "h-principe"
équations aux dérivées partielles

années 1970 : cohomologie bornée, convergence de variétés riemanniennes
topologie, algèbre, informatique

années 1980 : groupes hyperboliques, courbes pseudo-holomorphes
algèbre, géométrie algébrique, physique théorique

années 1990 : espaces métriques mesurés, dimension moyenne
probabilités, analyse fonctionnelle, systèmes dynamiques

années 2000 : groupes aléatoires, intérêt pour la biologie
algèbres d'opérateurs

Quelques jalons

années 1960 : "h-principe"
équations aux dérivées partielles

années 1970 : cohomologie bornée, convergence de variétés riemanniennes
topologie, algèbre, informatique

années 1980 : groupes hyperboliques, courbes pseudo-holomorphes
algèbre, géométrie algébrique, physique théorique

années 1990 : espaces métriques mesurés, dimension moyenne
probabilités, analyse fonctionnelle, systèmes dynamiques

années 2000 : groupes aléatoires, intérêt pour la biologie
algèbres d'opérateurs

Quelques jalons

années 1960 : "h-principe"
équations aux dérivées partielles

années 1970 : cohomologie bornée, convergence de variétés riemanniennes
topologie, algèbre, informatique

années 1980 : groupes hyperboliques, courbes pseudo-holomorphes
algèbre, géométrie algébrique, physique théorique

années 1990 : espaces métriques mesurés, dimension moyenne
probabilités, analyse fonctionnelle, systèmes dynamiques

années 2000 : groupes aléatoires, intérêt pour la biologie
algèbres d'opérateurs

Problème

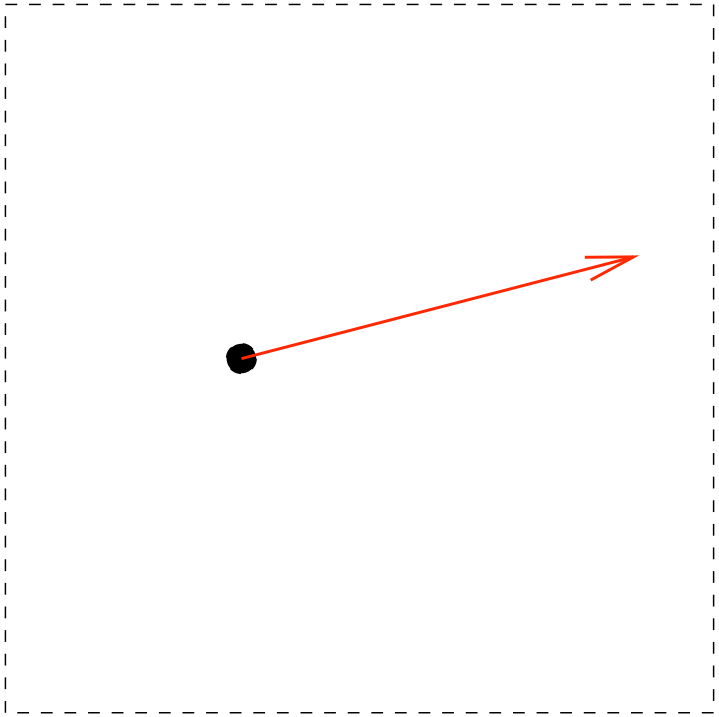
Peut on imaginer un espace qui, à petite échelle, est rigoureusement euclidien, mais se referme sur lui-même ?

Problème

Peut on imaginer un espace qui, à petite échelle, est rigoureusement euclidien, mais se referme sur lui-même ?

Solution

Oui : un espace périodique.

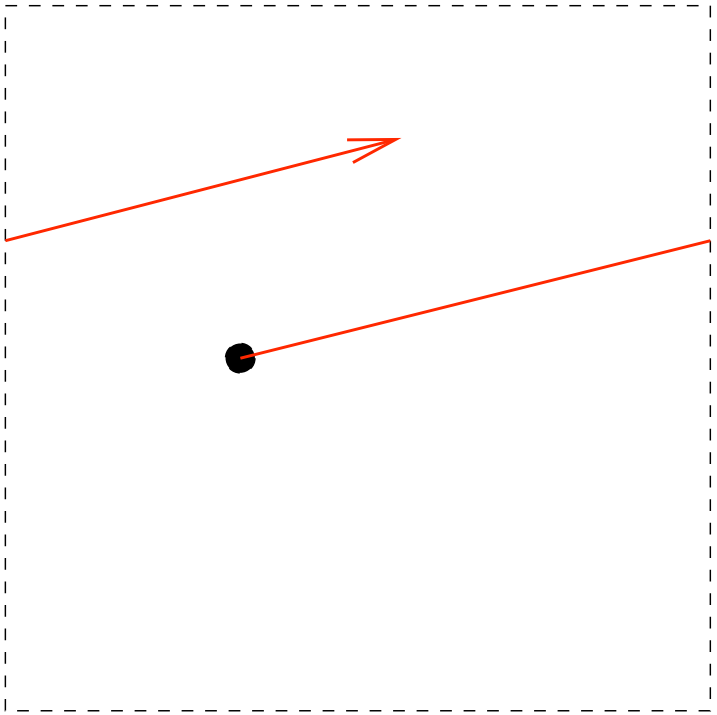


Problème

Peut on imaginer un espace qui, à petite échelle, est rigoureusement euclidien, mais se referme sur lui-même ?

Solution

Oui : un espace périodique.

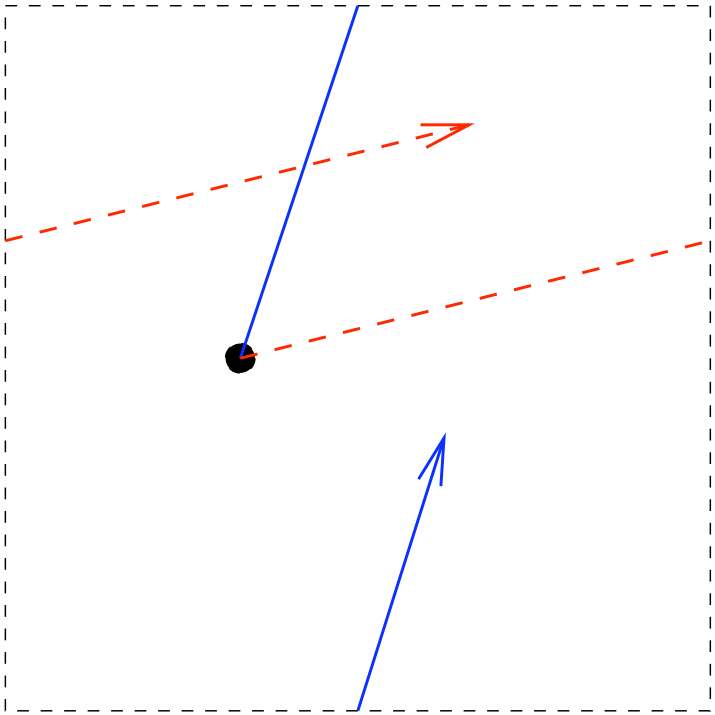


Problème

Peut on imaginer un espace qui, à petite échelle, est rigoureusement euclidien, mais se referme sur lui-même ?

Solution

Oui : un espace périodique.

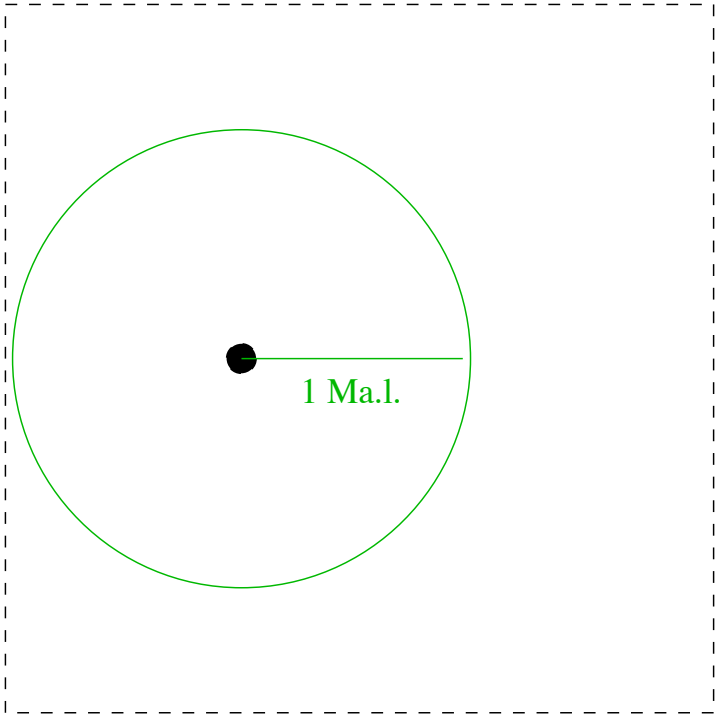


Problème

Peut on imaginer un espace qui, à petite échelle, est rigoureusement euclidien, mais se referme sur lui-même ?

Solution

Oui : un espace périodique.



Problème

Peut on imaginer un espace qui, à petite échelle, est rigoureusement euclidien, mais se referme sur lui-même ?

Solution

Oui : un espace périodique.

En 2 dimensions d'espace, il y a 2 modèles possibles.

Problème

Peut on imaginer un espace qui, à petite échelle, est rigoureusement euclidien, mais se referme sur lui-même ?

Solution

Oui : un espace périodique.

En 2 dimensions d'espace, il y a 2 modèles possibles.

En 3 dimensions d'espace, il y a 10 modèles. C'est connu depuis le XIXème siècle.

Problème

Peut on imaginer un espace qui, à petite échelle, est rigoureusement euclidien, mais se referme sur lui-même ?

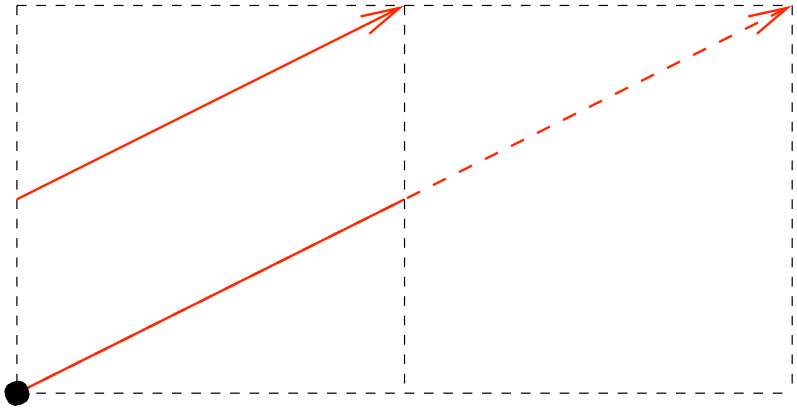
Solution

Oui : un espace périodique.

En 2 dimensions d'espace, il y a 2 modèles possibles.

En 3 dimensions d'espace, il y a 10 modèles. C'est connu depuis le XIXème siècle.

Rayons qui reviennent à leur point de départ.



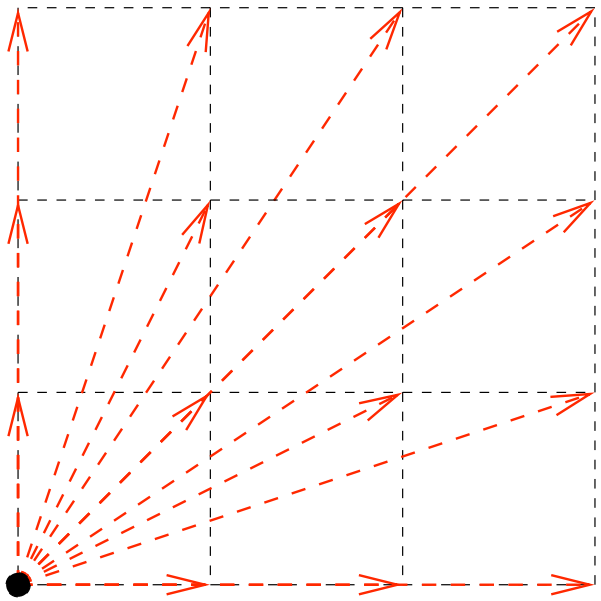
Problème

Peut on imaginer un espace qui, à petite échelle, est rigoureusement euclidien, mais se referme sur lui-même ?

Solution

Oui : un espace périodique.

Les rayons qui reviennent à leur point de départ



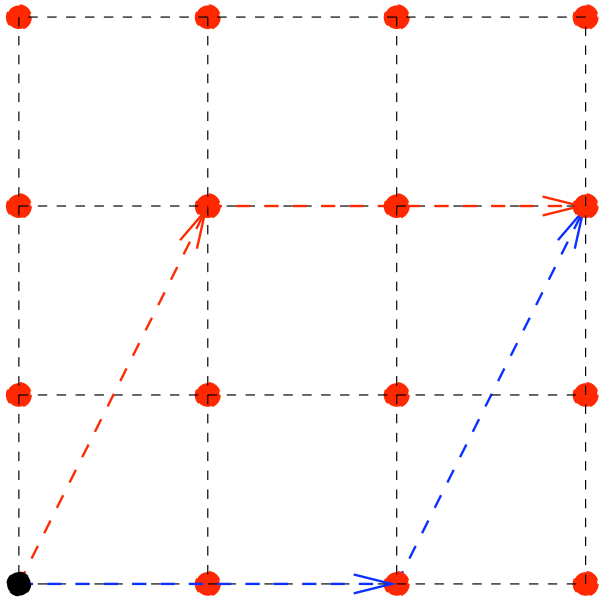
Problème

Peut on imaginer un espace qui, à petite échelle, est rigoureusement euclidien, mais se referme sur lui-même ?

Solution

Oui : un espace périodique.

Les rayons qui reviennent à leur point de départ forment un *groupe abélien*, comme les symétries de translation d'un cristal.



Problème

Peut on imaginer d'autres espaces qui, à petite échelle, sont approximativement euclidiens, et se referment sur eux-mêmes ?

Problème

Peut on imaginer d'autres espaces qui, à petite échelle, sont approximativement euclidiens, et se referment sur eux-mêmes ?

Solution

(Gromov, années 1978). *Oui : il existe de tels espaces. On peut les décrire tous. Ce sont les espaces qui possèdent une symétrie périodique, avec un groupe presque abélien, nilpotent.*

Problème

Peut on imaginer d'autres espaces qui, à petite échelle, sont approximativement euclidiens, et se referment sur eux-mêmes ?

Solution

(Gromov, années 1978). *Oui : il existe de tels espaces. On peut les décrire tous. Ce sont les espaces qui possèdent une symétrie périodique, avec un groupe presque abélien, nilpotent.*

Preuve

Dans un tel espace, les rayons qui reviennent à leur point de départ forment presque un groupe, automatiquement nilpotent, c'est forcément un groupe.

Problème

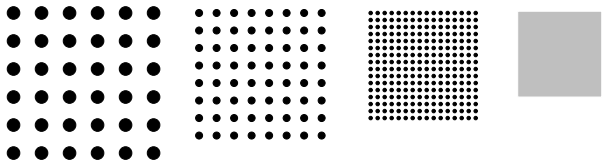
Peut on imaginer d'autres espaces qui, à petite échelle, sont approximativement euclidiens, et se referment sur eux-mêmes ?

Solution

(Gromov, années 1978). *Oui : il existe de tels espaces. On peut les décrire tous. Ce sont les espaces qui possèdent une symétrie périodique, avec un groupe presque abélien, nilpotent.*

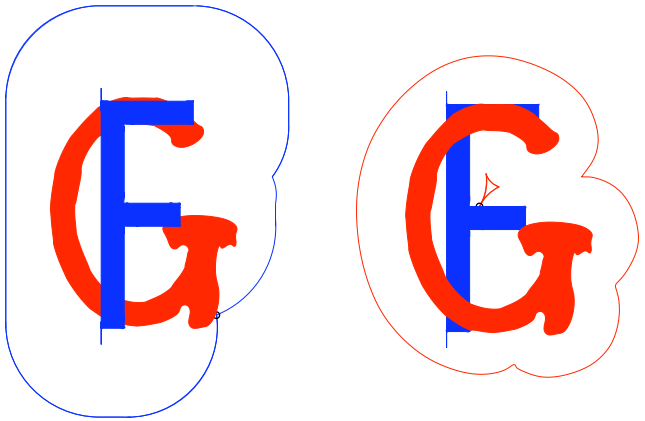
Preuve

Dans un tel espace, les rayons qui reviennent à leur point de départ forment presque un groupe, automatiquement nilpotent, c'est forcément un groupe. A très grande échelle, l'image se brouille, et l'espace continu se confond avec le groupe.

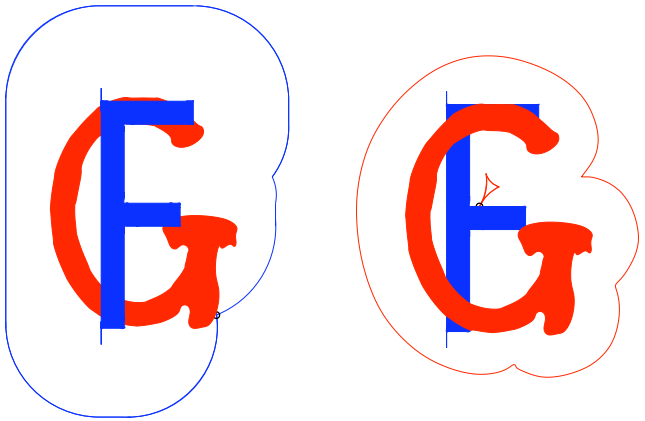


Objectif : préciser la phrase : deux espaces se confondent lorsque l'image se brouille.

Objectif : préciser la phrase : deux espaces se confondent lorsque l'image se brouille. Une *figure*, c'est un dessin tracé dans un espace muni d'une notion de distance. La distance de Hausdorff entre deux figures F et G est le plus petit rayon r tel que les disques de rayon r centrés sur F recouvrent G et réciproquement.



Objectif : préciser la phrase : deux espaces se confondent lorsque l'image se brouille. Une *figure*, c'est un dessin tracé dans un espace muni d'une notion de distance. La distance de Hausdorff entre deux figures F et G est le plus petit rayon r tel que les disques de rayon r centrés sur F recouvrent G et réciproquement.



Gromov introduit, pour la première fois, une mesure de l'écart entre deux espaces abstraits munis chacun d'une notion de distance (*espaces métriques*).

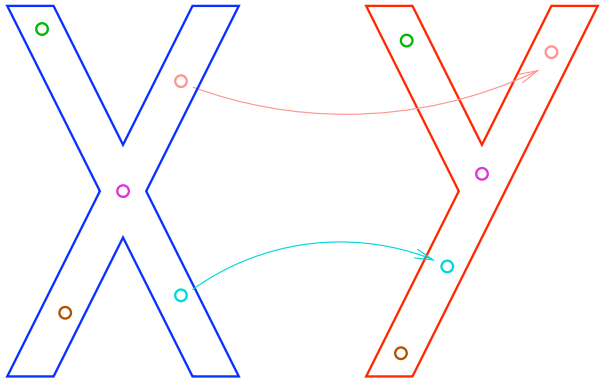
Définition

(Gromov). *La distance de Gromov-Hausdorff entre deux espaces métriques X et Y est le plus petit rayon r tel qu'il existe un espace métrique Z et des figures F et G de Z, F isométrique à X, G isométrique à Y, de distance de Hausdorff inférieure à r.*

La distance de Gromov-Hausdorff se calcule en remplaçant les espaces continus par des approximations finies.

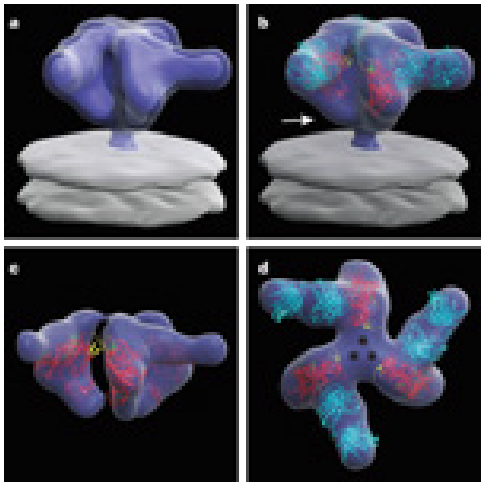
Proposition

(Gromov). *La distance de Gromov-Hausdorff entre deux espaces métriques X et Y est inférieure à r si et seulement si on peut placer dans X un ensemble fini F et dans Y un ensemble fini G et faire correspondre un point de G à chaque point de F sans que les différences de distances dépassent r. On demande en plus que tout point de X soit à distance au plus r d'un point de F (et de même pour Y et G).*

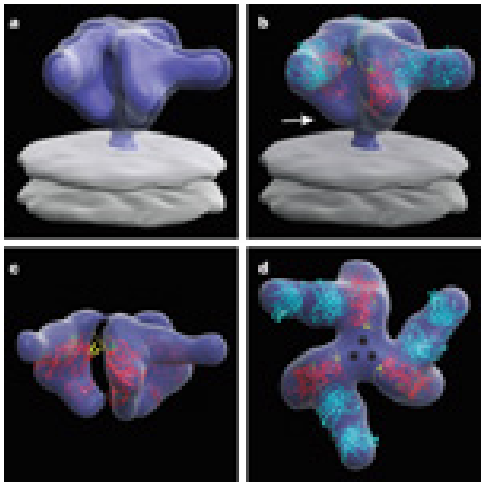


On peut donc traiter sur un pied d'égalité des objets discrets et des objets continus.

Les protéines sont des objet mobiles et déformables mais non élastiques. Comment décider si deux images représentent la même protéine ?



Les protéines sont des objet mobiles et déformables mais non élastiques. Comment décider si deux images représentent la même protéine ?



Pour Guillermo Sapiro (Department of Electrical and Computer Engineering, University of Minnesota, Minneapolis) et ses collaborateurs, un objet mobile et déformable mais non élastique est caractérisé par les distances entre ses parties. Autrement dit, c'est un espace métrique. La distance de Gromov-Hausdorff est un bon candidat pour comparer des images. Toutefois, elle est lourde à calculer, ce qui conduit Sapiro à étudier des variantes.

Sans le vouloir, Gromov a fourni le cadre conceptuel à des méthodes prometteuses en traitement d'images.

Gromov a développé l'idée qu'un groupe de transformations doit être vu comme un espace métrique (à condition de prendre du recul).

Gromov a développé l'idée qu'un groupe de transformations doit être vu comme un espace métrique (à condition de prendre du recul).

- En 1981, il a caractérisé les groupes nilpotents par une propriété métrique : les boules y croissent à vitesse polynômiale, comme en géométrie euclidienne.
- A l'inverse, en 1986, il a introduit une classe de groupes qui, du point de vue métrique, se comportent comme la géométrie non euclidienne de Lobatchevski et Bolyai. En 1993 et en 2003, il a montré qu'un groupe tiré au hasard appartient à cette classe.

Gromov a développé l'idée qu'un groupe de transformations doit être vu comme un espace métrique (à condition de prendre du recul).

- En 1981, il a caractérisé les groupes nilpotents par une propriété métrique : les boules y croissent à vitesse polynômiale, comme en géométrie euclidienne.
- A l'inverse, en 1986, il a introduit une classe de groupes qui, du point de vue métrique, se comportent comme la géométrie non euclidienne de Lobatchevski et Bolyai. En 1993 et en 2003, il a montré qu'un groupe tiré au hasard appartient à cette classe.

Un groupe peut être vu comme un ensemble de règles de réécriture, à l'instar du compilateur d'un ordinateur. Les compilateurs dont les règles sont tirées au hasard semblent donc obéïr à la géométrie non euclidienne.

Son style

- Un technicien : ses textes contiennent des démonstrations techniquement difficiles (virtuosité, usage d'idées venues de tous les coins des mathématiques).

Son style

- Un technicien : ses textes contiennent des démonstrations techniquement difficiles (virtuosité, usage d'idées venues de tous les coins des mathématiques).
- Un passeur : lorsqu'il emprunte une idée, il la restitue nettoyée, clarifiée, insérée dans un programme.

Son style

- Un technicien : ses textes contiennent des démonstrations techniquement difficiles (virtuosité, usage d'idées venues de tous les coins des mathématiques).
- Un passeur : lorsqu'il emprunte une idée, il la restitue nettoyée, clarifiée, insérée dans un programme.
- Un visionnaire : sa conversation et ses textes fourmillent de questions, d'exemples, de suggestions.

Son style

- Un technicien : ses textes contiennent des démonstrations techniquement difficiles (virtuosité, usage d'idées venues de tous les coins des mathématiques).
- Un passeur : lorsqu'il emprunte une idée, il la restitue nettoyée, clarifiée, insérée dans un programme.
- Un visionnaire : sa conversation et ses textes fourmillent de questions, d'exemples, de suggestions.
- Tout sauf un maître à penser : il laisse son interlocuteur libre de choisir des sujets de recherche dans son oeuvre.