References

1. Blaschke, W.: *Vorlesungen über Differentialgeometrie II, Affine Differentialgeometrie*, Springer, Berlin, 1923.
2. Calabi, E.: Complete affine hyperspheres I, *Sympos. Math.* **10** (1972), 19–38.
3. Carter, S. and West, A.: Tight and taut immersions, *Proc. London Math. Soc.* **25** (1972), 701–720.
4. Cecil, T. and Ryan, P.: Tight and taut immersions of manifolds, *Research Notes in Math.* **107**, Pitman, London, 1985.
5. Chern, S. S. and Lashof, R.: On the total curvature of immersed manifolds I, *Amer. J. Math.* **79** (1957), 306–318.
6. Deicke, A.: Über die Finsler-Räume mit $A_i = 0$, *Arch. Math.* **4** (1953), 45–51.
7. Kobayashi, S. and Nomizu, K.: *Foundations of Differential Geometry*, Vol. 2, Wiley-Interscience, New York, 1969.
8. Milnor, J.: *Morse Theory*, Ann. Math. Stud. 51, Princeton University Press, Princeton, 1963.
9. Nomizu, K.: On completeness in affine differential geometry, *Geom. Dedicata* **20** (1986), 43–49.
10. Nomizu, K.: *Introduction to Affine Differential Geometry, Part I,* Lecture Notes, MPI preprint MPI 88-37, 1988; revised: Department of Mathematics, Brown University, 1989.
11. Nomizu, K. and Rodriguez, L.: Umbilical submanifolds and Morse functions, *Nagoya Math. J.* **48** (1972), 197–201.
12. Schneider, R.: Zur affinen Differentialgeometrie im Grossen I, *Math. Z.* **101** (1967), 375–406.

Geometriae Dedicata **50:** 301–307, 1994.
© 1994 *Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands.*

Sur la régularité de la fonction croissance d'une variété riemannienne*

RENATA GRIMALDI[1] et PIERRE PANSU[2]
[1]*Università di Palermo, Dipartimento di Matematica ed Applicazioni, Via Archirafi 34, I-90123 Palermo, Italie*
[2]*URA 1169 du CNRS, Mathématiques, Université Paris-Sud, F-91405 Orsay, France*
e-mail: pansu@cmep.polytechnique.fr

(Reçu: 7 juin 1993)

Résumé. On étudie la différentiabilité de la fonction croissance d'une variété riemannienne complète. En général, elle a la même régularité qu'une fonction concave: la dérivée peut avoir des sauts pour lesquels on donne une formule. Dans le cas analytique réel, la fonction croissance est de classe C^1. Un exemple montre qu'elle n'est pas nécessairement C^2. A titre d'application, nous construisons, pour toute variété ouverte paracompacte M et toute fonction croissante v de classe C^1, une métrique continue de croissance égale à v et une métrique de classe C^∞ sur M de croissance proche de v en topologie C^1-fine.

Mathematics Subject Classification (1991). 53C20.

1. Différentiabilité de la fonction croissance

1. THÉORÈME. *Soit (M, g) une variété riemannienne complète de classe C^2, de dimension n, et x un point de M. On note $v(r) = \mathrm{vol}(B(x, r))$ la fonction croissance en x, et v' sa dérivée.*

(i) *Si la courbure de Ricci est bornée inférieurement,*

$$\mathrm{Ricci} \geq -(n-1)a^2$$

alors la fonction

$$r \mapsto v'(r)\sinh(ar)^{1-n}$$

est décroissante (au sens large). Par conséquent, la fonction v' a, pour toute valeur de r, une limite à gauche $v'(r-)$ et une limite à droite $v'(r+)$.

(ii) *Les sauts de la dérivée v' sont donnés par la formule*

$$v'(r+) - v'(r-) = -2\,\mathrm{vol}_{n-1}(\partial B(x, r) \cap \mathrm{Cutlocus}(x))$$

* Travail réalisé avec l'aide financière du MURST d'Italie.

où Cutlocus(x) *désigne le lieu de coupure de* x.

Preuve de (i). Il s'agit de l'amélioration apportée par M. Gromov au théorème de comparison de R. Bishop, voir [G, p. 65], [B]. Soit $\Theta(\theta,\ r)$ la densité de l'élément de volume en coordonnées polaires d'origine x. L'inégalité de R. Bishop s'énonce comme suit:

Si $\Theta(\theta,\ t) \neq 0$ pour tout $t \in]0,\ r[$, alors la fonction

$$t \mapsto \Theta(\theta,\ t)\sinh(at)^{1-n}$$

est décroissante sur $[0,\ r]$.

Dans la sphère unité de l'espace tangent en x, définissons l'ouvert U_t des directions θ telles que la géodésique $s \mapsto \exp_x(s\theta)$, $s \in [0,\ t]$, est minimisante. Notons 1_t la fonction caractéristique de U_t, et n_t la fonction 'multiplicité': $n_t(\theta)$ est le nombre (éventuellement infini) de solutions distinctes de l'équation $\exp_x(t\phi) = \exp_x(t\theta)$. On note $\chi_t = 1_t/n_t$. A θ fixé, la fonction $s \to \chi_s(\theta)$ est décroissante. En effet, elle vaut

$$\chi_s(\theta) = \begin{cases} 1, & \text{si } s < \mathrm{cut}(\theta) \text{ la } \textit{distance de coupure}, \\ 1/n_{\mathrm{cut}(\theta)}(\theta), & \text{pour } s = \mathrm{cut}(\theta), \\ 0, & \text{pour } s > \mathrm{cut}(\theta). \end{cases}$$

Le volume de la sphère $\partial B(x,\ r)$ est donné par

$$v'(r) = \mathrm{vol}_{n-1}(\partial B(x,\ r)) = \int_{S^{n-1}} \Theta(\theta,\ r)\chi_r(\theta)\,\mathrm{d}\theta.$$

Comme la famille de fonctions

$$\theta \mapsto \sinh(ar)^{1-n}\Theta(\theta,\ r)\chi_r(\theta)$$

est décroissante, il en est de même des intégrales.

Etant donné une variété riemannienne complète de classe C^2, comme la courbure de Ricci est bornée inférieurement sur toute boule, l'argument précédent s'applique, et la dérivée v' admet une limite à gauche et à droite en tout point.

Preuve de (ii). Posons

$$\chi_{r-}(\theta) = \lim_{t \nearrow r} \chi_t(\theta),$$

$$\chi_{r+}(\theta) = \lim_{t \searrow r} \chi_t(\theta).$$

Clairement,

$$v'(r\pm) = \int_{S^{n-1}} \Theta(\theta,\ r)\chi_{r\pm}\,\mathrm{d}\theta,$$

et $\chi_{r-} - \chi_{r+}$ est la fonction caractéristique de

$$D_r = \bigcap_{t<r} U_t \Big\backslash \bigcup_{t>r} U_t.$$

En effet, par définition, $\chi_{r+}(\theta) = \chi_{r-}(\theta)$ sauf si $r = \mathrm{cut}(\theta)$, auquel cas la différence vaut 1. Comme

$$\theta \in D_r \Leftrightarrow \exp(r\theta) \in \mathrm{Cutlocus}(x),$$

on a

$$v'(r-) - v'(r+) = \int_{D_r} \Theta(r,\ \theta)\,\mathrm{d}\theta = \int_{\partial B(x,r)\cap \mathrm{Cutlocus}(x)} N(y)\,\mathrm{d}y$$

où $N(y)$ est le nombre de géodésiques minimisantes de longueur r reliant x à y.

La formule (ii) résulte du fait que, presque tout point y du lieu de coupure de x est relié à x par exactement deux géodésiques minimisantes. C'est l'objet du lemme suivant. □

1.1. LEMME (Structure de l'intersection du lieu de coupure avec une sphère). *On peut décomposer l'intersection d'une sphère et du lieu de coupure comme suit*:

$$\partial B(x,\ r) \cap \mathrm{Cutlocus}(x) = W \cup Z$$

où

(i) $\mathrm{vol}_{n-1} W = 0$;

(ii) $Z = \exp_x(V)$ *où* V *est contenu dans la sphère de rayon* r *de l'espace tangent en* x, *l'application exponentielle est une immersion de* V *sur* Z *dont chaque fibre a exactement deux éléments, et, pour tout* $v \in V$, $\exp_x(2v) = x$.

Par conséquent, pour presque tout $y \in \partial B(x,\ r) \cap \mathrm{Cutlocus}(x)$, *la multiplicité* $N(y)$ *vaut* 2.

Preuve. On décompose la sphère en valeurs critiques et non critiques de l'application exponentielle $e_r = \exp_x$: $S(r) \to M$:

$$\partial B(x,\ r) = Z_c \cup Z_{nc}$$

où $\mathrm{vol}_{n-1}(Z_c) = 0$, et Z_{nc}, ensemble des valeurs non critiques, est une réunion dénombrable de sous-variétés plongées Σ_j, de classe C^1.

Les valeurs non critiques se décomposent à nouveau en

$$Z_{nc} = Z_1 \cup Z_{2t} \cup Z_{2nt} \cup Z_3$$

où Z_1 est l'ensemble des points atteints une fois seulement par e_r; Z_{2t} est l'ensemble des points atteints exactement deux fois, i.e., $z \in \Sigma_i \cap \Sigma_j$ et les hypersurfaces plongées Σ_i et Σ_j s'intersectent transversalement en z; Z_{2nt} est l'ensemble des points atteints exactement deux fois, mais où les plans tangents à Σ_i et Σ_j coïncident; Z_3 est l'ensemble des points atteints au moins trois fois.

Clairement, Z_{2t} est une réunion dénombrable de sous-variétés plongées de codimension 2, donc $\mathrm{vol}_{n-1}(Z_{2t}) = 0$.

Soit $z \in \Sigma_i \cap \Sigma_j$, i.e. il arrive en z deux géodésiques minimisantes γ_i (orthogonale à Σ_i en z) et γ_j (orthogonale à Σ_j en z). Si Σ_i et Σ_j ont même plan tangent en z, nécessairement γ_i et γ_j sont opposées en z. Autrement dit, tout point de Z_{2nt} est l'image par e_τ d'exactement deux vecteurs v_1 et v_2 où $\exp_x(2v_1) = \exp_x(2v_2) = x$, c'est la condition de l'énoncé.

Etant données trois hypersurfaces Σ_i, Σ_j et Σ_k, en chaque point de l'intersection, au moins deux d'entre elles sont transverses, donc $\Sigma_i \cap \Sigma_j \cap \Sigma_k$ est contenu dans une sous-variété de codimension 2. On conclut que $\mathrm{vol}_{n-1}(Z_3) = 0$.

Enfin, l'intersection de la sphère et du lieu de coupure est contenue dans $Z_c \cup Z_{2t} \cup Z_{2nt} \cup Z_3$, donc diffère de l'ensemble Z_{2nt} par un ensemble de mesure nulle. □

1.2. EXEMPLE. Une variété de classe C^∞ dont la fonction croissance n'est pas de classe C^1.

Soit $\mathbf{R}P^2$ le plan projectif réel muni de sa métrique standard, soient $x,\ y \in \mathbf{R}P^2$ tels que y ne se trouve pas sur la droite projective l opposée à x. On effectue en changement conforme dans un petit voisinage de y, qui diverge en y, pour obtenir une métrique de classe C^∞, complète, sur $M = \mathbf{R}P^2 \backslash \{y\}$. Dans la nouvelle métrique, le lieu de coupure de x et la sphère de rayon $\pi/2$ contiennent toujours une grande partie de la droite projective l, donc la dérivée de la fonction croissance est discontinue en $\pi/2$.

2. THÉORÈME. *Si $(M,\ g)$ est complète, non compacte et analytique réelle, alors la fonction croissance en tout point est de classe C^1.*

En effet, si la dérivée v' est discontinue en r, alors $\partial B(x,\ r) \cap \mathrm{Cutlocus}(x)$ est de mesure positive. D'après le lemme 1.1, il y a un ensemble V de mesure positive dans la sphère de rayon r, $S(r)$, de l'espace tangent en x, tel que $\exp_x(2v) = x$ pour tout $v \in V$. Comme l'application exponentielle est analytique réelle, les $v \in S(r)$ tels que $\exp_x(2v) = x$ forment un ensemble analytique. Nécessairement $\exp_x(2v) = x$ pour tout $v \in S(r)$, et on conclut que le diamètre de $(M,\ g)$ est inférieur à $2r$, ce qui contredit l'hypothèse M non compacte. □

1.3. EXEMPLE. Une variété analytique réelle dont la fonction croissance n'est pas de classe C^2

Pour le cylindre plat $\mathbf{R} \times \mathbf{R}/\mathbf{Z}$, la dérivée de la fonction croissance est

$$v'(r) = \begin{cases} 2\pi r, & \text{si } r \leq 1/2, \\ 4r \operatorname{Arcsin}(1/2r), & \text{si } r \geq 1/2, \end{cases}$$

qui n'est pas de classe C^1.

Question. La fonction croissance d'une variété riemannienne analytique réelle est-elle toujours localement sous-analytique (en particulier, analytique par morceaux)?

Dans la suite, on aura besoin d'une variante du théorème 2.

1.4. PROPOSITION. *Soit $(M,\ g)$ une variété riemannienne complète, non compacte, analytique réelle, soit $x \in M$ et M_ρ un voisinage tubulaire du lieu de coupure de x,*

$$M_\rho = \{y \mid \mathrm{dist}(y,\ \mathrm{Cutlocus}(x)) < \rho\}.$$

Alors la fonction croissance relative des sphères

$$w_\rho(r) = \mathrm{vol}(\partial B(x,\ r) \cap M_\rho)$$

est continue.

Preuve. En utilisant le fait que l'ensemble M_ρ est sous-analytique, on généralise le théorème 1 à la fonction croissance relative w_ρ. L'absence de saut découle ensuite de la preuve du théorème 2.

On montre d'abord que w_ρ a des limites à gauche et à droite en tout point. En gardant les notations du théorème 1, on a

$$w_\rho(r) = \int_{S^{n-1}} \Theta(\theta,\ r)\chi_r(\theta)\phi_\rho(r,\ \theta)\, \mathrm{d}\theta,$$

où $\phi_\rho(r,\ \theta) = 1$ si $\exp_x(r\theta) \in M_\rho, = 0$ sinon. Pour chaque θ fixé, l'ensemble des valeurs de r telles que $\exp_x(r\theta) \in M_\rho$ est un ouvert sous-analytique, donc localement il n'a qu'un nombre fini de composantes connexes. Par conséquent, la fonction $r \mapsto \phi_\rho(r,\ \theta)$ a une limite à gauche et à droite pour tout r, qui ne diffèrent que si $\exp_x(r\theta) \in \partial M_\rho$. Il en est de même de l'intégrale w_ρ, et

$$|\ w_\rho(r+) - w_\rho(r-)\ | \leq \mathrm{vol}_{n-1}(\partial B(x,\ r) \cap \partial M_\rho).$$

On montre que ce volume est toujours nul. Comme au lemme 1.1, on a

$$\partial B(x,\ r) \cap \partial M_\rho = Z \cup W$$

où $\mathrm{vol}_{n-1}(W) = 0$ et, le long de Z, les hypersurfaces $\partial B(x,\ r)$ et ∂M_ρ sont lisses et tangentes. En particulier, il existe un fermé $V \subset S(r)$, la sphère de rayon r dans l'espace tangent en x, tel que $Z \subset \exp_x(V)$, et, pour $v \in V$, $t = r + \rho/r$, $\exp_x tv \in \mathrm{Cutlocus}(x)$. Sachant, par le théorème 2, que

$$\mathrm{vol}_{n-1}(\partial B(x,\ t) \cap \mathrm{Cutlocus}(x)) = 0,$$

on conclut que le rang de l'exponentielle n'est pas maximum en presque tout point de tV. Cette condition définit un ensemble analytique propre de $S(r)$, donc $\mathrm{vol}_{n-1}(V) = 0$ et

$$\mathrm{vol}_{n-1}(\partial B(x,\ r) \cap \partial M_\rho) = 0.$$

On conclut que la fonction w'_ρ est continue en r. □

2. Construction d'une métrique de croissance donnée

3. THÉORÈME. *Soit M une variété différentiable paracompacte, non compacte, de dimension $n \geq 2$ et x un point de M. Soit v une fonction de classe C^1 sur $\mathbf{R}_+$, telle que $v' > 0$ sur $]0, +\infty[$; $\lim_{r\to 0} v'(r)/v'_{\mathbf{R}^n}(r) = 1$, où $v_{\mathbf{R}^n}(r)$ est le volume d'une boule euclidienne de rayon r.*

Alors il existe sur M une métrique continue dont la fonction croissance en x est exactement v.

2.1. COROLLAIRE. *Sous les mêmes hypothèses, pour toute fonction ϵ continue strictement positive sur $\mathbf{R}_+$, il existe une métrique riemannienne complète de classe C^∞ sur M dont la croissance $\tilde{v}$ vérifie*

$$| v - \tilde{v} | < \epsilon \quad et \quad | v' - \tilde{v}' | < \epsilon.$$

En particulier, on voit que tout *type de croissance* est réalisé par des métriques de classe C^∞. Le corollaire 2.1 apporte donc une réponse complète à une question posée dans [Gri].

Preuve du Théorème 3. On part d'une métrique complète analytique réelle g sur M, on utilise ses coordonnées polaires d'origine x pour modifier g. On ne peut le faire qu'en dehors d'un voisinage du lieu de coupure de x. Considérons les voisinages tubulaires M_ρ. D'après la proposition 1.2, la fonction $w_\rho(r) = \mathrm{vol}_{n-1}(\partial B(x, r) \cap M_\rho$ est continue, décroît avec ρ, donc elle converge uniformément vers 0 sur les intervalles bornés. La fonction v étant donnée, on peut donc construire un voisinage X du lieu de coupure tel que, pour tout r,

$$\mathrm{vol}_{n-1}(\partial B(x, r) \cap X) < v'.$$

Soit ψ une fonction C^∞ sur M, à valeurs dans [0, 1], qui s'annule sur un voisinage de Cutlocus(x), et vaut 1 en dehors de X. En coordonnées polaires, la métrique g s'écrit

$$g = \mathrm{d}r^2 + g_r.$$

On cherche la nouvelle métrique $\tilde{g}$ sous la forme

$$\tilde{g} = \mathrm{d}r^2 + (1 + f\psi)^2 g_r,$$

où f ne dépend que de r. Elle est positive dès que $f > -1$ et de classe C^0 (resp. C^∞) si f l'est, sauf peut-être à l'origine. Ses boules sont les mêmes que celle de g, donc sa croissance satisfait

$$\mathrm{vol}_{\tilde{g}}(\partial B(x, r)) = \int_{S^{n-1}} (1 + f\psi)^{n-1} \Theta(r, \theta) \chi_r(\theta)\, \mathrm{d}\theta.$$

A r fixé, cette expression est une fonction continue strictement croissante de l'inconnue $f \in [-1, +\infty[$. Elle tend vers $+\infty$ lorsque f tend vers l'infini; pour $f = -1$ elle vaut moins que

$$\mathrm{vol}_{n-1}(\partial B(x, r) \cap X) < v';$$

par conséquent, l'équation

$$\int_{S^{n-1}} (1 + f\psi)^{n-1} \Theta(r, \theta) \chi_r(\theta)\, \mathrm{d}\theta = v'$$

a une solution unique $f = f(r)$ pour tout r. On montre que cette solution dépend continument de r. Pour chaque r, il existe un ouvert $O \subset S^{n-1}$ et un voisinage $]s, t[$ de r tel que, pour $\theta \notin O$ et $s < u < t$, $\psi(u, \theta) = 0$. Posant

$$F(u, f) = \int_O (1 + f\psi)^{n-1} \Theta(u, \theta)\, \mathrm{d}\theta,$$

on voit que f est la solution de

$$F(u, f) = v' - \int_{S^{n-1}\setminus O} \Theta(u, \theta) \chi_u(\theta)\, \mathrm{d}\theta.$$

Comme $\partial F/\partial u > 0$ et le second membre est continu d'après le théorème 2, f est continue. Il reste à montrer la continuité de la métrique $\tilde{g}$ en x. A l'origine, le lieu de coupure n'interfère pas, $\psi = 1$ et f tend vers 0, ce qui garantit la continuité. □

Preuve du Corollaire 2.1. Il reste à approcher f par une fonction C^∞ $\tilde{f}$, de façon que $\tilde{f}(r) = r$ pour r assez petit, et que

$$\left| \int_{S^{n-1}} (1 + \tilde{f}\psi)^{n-1} \Theta(r, \theta)\, \mathrm{d}\theta - v' \right| < \epsilon. \qquad \square$$

Remarques. Quelle relation doit-on attendre entre régularité d'une métrique et différentiabilité de la fonction croissance? L'article [GP] donne une réponse complète pour une classe de métriques peu régulières, la classe L^n_{loc}. Le théorème 3 suggère que, dès qu'il existe sur M une métrique de classe C^{k-1} dont la fonction croissance est de classe C^k, alors toute fonction v de classe C^k à dérivée positive est la croissance en x d'une métrique de classe C^{k-1} sur $M \setminus x$. Toutefois, sur une variété non difféomorphe à $\mathbf{R}^n$, il n'est pas clair qu'il existe une métrique dont la croissance est de classe C^2.

Références

(B) Bishop, R. and Crittenden, R.: *Geometry of Manifolds*, Academic Press, New York, 1964.

(Gri) Grimaldi, R.: Sur l'existence d'une infinité de structures asymptotiques sur $\mathbf{R}^2$, *J. Math. Pures Appl.* **67** (1988), 405–410.

(GP) Grimaldi, R. et Pansu, P.: Sur la croissance du volume dans une classe conforme, *J. Math. Pures Appl.* **71** (1992), 1–19.

(G) Gromov, M.: Structures métriques pour les variétés riemanniennes, Notes de cours rédigées par P. Pansu et J. Lafontaine, CEDIC – Soc. Math. de France, Paris, 1981.