Exercices

P. Pansu

27 juillet 2000

1 Intersections de surfaces

Exercice 1 Niveaux d'une forme quadratique *Pour quelles valeurs de ϵ l'ensemble X_ϵ des solutions de l'équation $x^2 + y^2 - z^2 = \epsilon$ est-il une surface lisse ?*

Exercice 2 Projection d'une courbe *Soit $t \mapsto c(t)$ une courbe dans l'espace, et π un plan. Montrer que la projection orthogonale de c sur π est localement une courbe lisse si et seulement si le vecteur vitesse n'est jamais orthogonal à π.*

Exercice 3 Paramétrisation de la sphère *Donner une paramétrisation locale non dégénérée pour la sphère au voisinage des pôles.*

Exercice 4 Plan tangent à un hyperboloïde *Quel est le plan tangent au paraboloïde hyperbolique d'équation $z = xy$ au point (u, v, uv) ?*

Exercice 5 Transversalité d'un tore avec une famille de plans parallèles *On considère le tore de révolution paramétré par*

$$(u, v) \mapsto X(u, v) = \begin{pmatrix} \cos(v)(2 + \cos(u)) \\ \sin(v)(2 + \cos(u)) \\ \sin(u) \end{pmatrix}.$$

Parmi les plans parallèles au plan $\{y = 0\}$, lesquels sont transverses au tore ?

Exercice 6 Ensembles de niveau d'une fonction sur une surface *Soit X une surface, P un point de X et f une fonction définie sur un voisinage de P dans $\mathbf{R}^3$, telle que $f(P) = 0$. Montrer que si la restriction au plan tangent $T_P X$ de la différentielle $d_P f$ ne s'annule pas, alors l'ensemble des points de X où f s'annule est une courbe au voisinage de P, dont la tangente en P est le noyau de la restriction de $d_P f$ à $T_P X$.*

2 Faces et orientation

Exercice 7 Aspect d'un domaine bordé par 2 surfaces transverses *Soit F un fermé propre de $\mathbf{R}^3$. On suppose qu'au voisinage du point P de F, le bord de F est contenu dans la réunion de deux surfaces transverses x_1 et x_2. Montrer que 2 cas se présentent. Au voisinage de P,*

- *ou bien ∂F est l'une des surfaces x_1 ou x_2 ;*
- *ou bien $\partial F = x_1 \cup x_2$;*
- *ou bien $F \cap x_1$ et $F \cap x_2$ sont des surfaces à bord.*

Exercice 8 Orientation induite sur le bord d'un hémisphère *On munit l'hémisphère nord $H = \{P \in \mathbf{R}^3 \,;\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\, z \geq 0\}$ de l'orientation normale sortante de la boule unité. Quelle est l'orientation tangente induite sur le bord ? Ecrire une paramétrisation du bord compatible avec cette orientation.*

Exercice 9 Orientations in duites sur une intersection *Soit F un fermé propre de $\mathbf{R}^3$. On suppose qu'au voisinage du point P de F, le bord de F est contenu dans la réunion de deux surfaces transverses x_1 et x_2. On suppose que $F \cap x_1$ et $F \cap x_2$ sont des surfaces à bord au voisinage de P (voir exercice 7). On oriente x_1 et x_2 par la normale sortante. Montrer que les orientations induites par les surfaces à bord $F \cap x_1$ et $F \cap x_2$ sur leur bord $x_1 \cap x_2$ sont opposées.*

Exercice 10 Coarêtes de la réunion de 2 cubes *Soit K le cube unité de $\mathbf{R}^3$, K' son translaté de vecteur $(1, 1, 1/2)$ et P le polyèdre $K \cup K'$. On oriente les facettes de P par la normale sortante. Déterminer les coarêtes $((A, B), F)$ telles que $A = (1, 1, 1/2)$ et $B = (1, 1, 1)$.*

Exercice 11 Espaces tangents à une bipyramide *Soit Q le polyèdre de $\mathbf{R}^3$ défini par les inéquations $\{x_i \geq 0, \sum x_i \leq 1\}$. Soit Q' le polyèdre obtenu en translatant S du vecteur $(1/3, 1/3, 1/3)$. On pose $P = Q \cup Q'$. Déterminer pour chaque point de P son espace tangent.*

Exercice 12 Facteur euclidien *Soit C un cône polyédral de sommet 0. Vérifier qu'il existe un cône polyédral $C' \subset (T_0C)^{\perp}$ tel que C soit le produit de C' et de l'espace affine T_0C.*

Exercice 13 Faces de l'intersection d'une boule et d'un cylindre *Soit F l'intersection de la boule unité et du cylindre droit d'axe $\{x = 0,\ y = 1\}$et de rayon 1. Quel est son cône tangent au point $P = (0, 0, 1)$? Quel est son espace tangent en ce point ? Faire la liste des faces de F.*

3 Validité d'une BRep

Exercice 14 Lien d'un orthant *Dessiner le sous-ensemble L de la sphère tel que le cône sur L soit un orthant.*

Exercice 15 Triangle sphérique *Sur la sphère unité de $\mathbf{R}^3$, soit $\theta_1 = (0, 0, 1)$ le pôle nord, soit $\theta_2 = (1, 0, 0)$ le point de l'équateur de longitude nulle et soit $\theta_3 = (0, 1, 1/\sqrt{2})$ le point de longitude 90^0 et de latitude 45^0. Dessiner l'enveloppe convexe de ces trois points sur la sphère.*

Exercice 16 Cônes dans la sphère *Dans $\mathbf{R}^3$, soit $\theta = (0, 0, 1)$ le pôle nord de la sphère unité. Soit L l'ensemble des points de l'équateur de longitude multiple de 15^0. Soit L' l'ensemble des points de l'équateur de longitude comprise entre 0 et 15^0. Dessiner le cône de sommet θ et de base L (resp. L').*

Exercice 17 Critère local de convexité *Montrer qu'un polyèdre propre P est convexe si et seulement si* $\mathrm{int}(\mathrm{P})$ *est connexe et pour tout $x \in P$,* $\mathrm{lien}(x, P)$ *est contenu dans une hémisphère. Que se passe-t-il si on affaiblit l'hypothèse* $\mathrm{int}(\mathrm{P})$ *connexe en P connexe ?*

Exercice 18 Transversalité de deux cubes *Soit P le cube unité de $\mathbf{R}^3$ et $Q_v = P + v$ le cube obtenu en translatant P du vecteur v. Montrer que P et Q_v sont transverses si et seulement si $v \notin \partial P$.*

4 Courbure des courbes

Exercice 19 Courbes de longueur finie *Soit $t \mapsto X(t)$, $t \in [a, b[$, une courbe dans $\mathbf{R}^n$. On suppose que la longueur de X est finie. Montrer que la limite $\lim_{t \to b} X(t)$ existe et vaut $X(a) + \int_a^b X'(t)\, dt$.*

Exercice 20 Accroissements finis *Soit $t \mapsto X(t)$, $t \in [a, b]$, une courbe dans $\mathbf{R}^n$. Soit f une fonction dont le gradient est de norme inférieure ou égale à 1 en tout point. Montrer que*

$$|f(X(b)) - f(X(a))| \leq \mathrm{Longueur}(X).$$

Exercice 21 La longueur en coordonnées polaires *Soit c la courbe plane d'équation polaire $r = f(\theta)$. Paramétrer c et exprimer sa longueur en fonction de f.*

Exercice 22 Abscisse curviligne le long d'une parabole *Calculer l'abscisse curviligne d'origine* $(0,0)$ *sur la parabole* $t \mapsto (t, t^2)$.

Exercice 23 Courbure d'un graphe *Soit* $t \mapsto (t, f(t))$ *le graphe d'une fonction réelle d'une variable réelle. Calculer sa courbure. Dans quelles conditions la dérivée seconde de* f *donne-t-elle une bonne approximation de la courbure ?*

Exercice 24 Courbure d'une courbe en coordonnées polaires *Soit* c *la courbe plane définie par l'équation polaire* $r = f(\theta)$. *On introduit le repère tournant*

$$e_r(r,\theta) = (\cos(\theta), \sin(\theta)), \quad e_\theta(r,\theta) = (-\sin(\theta), \cos(\theta)).$$

Paramétrer la courbe c. *Au moyen de ce repère, exprimer la tangente à la courbe* c. *Calculer la courbure.*

Exercice 25 *Montrer qu'une courbe plane a une courbure constante si et seulement si c'est une droite ou un cercle.*

Exercice 26 *Vérifier que si* $s \mapsto X(s)$, $s \in I$ *est de classe* C^2 *et paramétrée par son abscisse curviligne, alors la courbe équidistante* $X_\epsilon(s) = X(s) + \epsilon\nu(s)$ *satisfait*

$$X'_\epsilon(s) = (1 - \epsilon\kappa(s))\tau(s).$$

On suppose la courbure bornée. En déduire que

$$\frac{\partial}{\partial\epsilon}\mathrm{Longueur}(X_\epsilon)_{|\epsilon=0} = -\int_I \kappa(s)\,ds.$$

Exercice 27 *Soit* $t \mapsto D(t)$ *une famille de droites du plan. On appelle* enveloppe *de cette famille une courbe* $t \mapsto c(t)$ *telle que pour tout* t, c *est tangente à* $D(t)$ *en* $c(t)$.

On suppose que $D(t)$ *est la droite passant par un point* $P(t)$ *et de vecteur unitaire directeur* $u(t)$. *Montrer que si la dérivée* u' *ne s'annule pas, alors la famille* $D(t)$ *admet une enveloppe.*

Soit $s \mapsto X(s)$ *une courbe de classe* C^2 *paramétrée par son abscisse curviligne. Montrer que si* X *n'a pas de point d'inflexion, la famille de ses normales possède une enveloppe appelée* développée *de* X. *Montrer que le la développée est le lieu des centres des cercles osculateurs.*

Exercice 28 Roulement d'un disque le long d'une courbe *Soit* γ *une courbe plane fermée de classe* C^2, *de rayon d'injectivité normal* i. *Soit* $\epsilon < i$. *Montrer qu'on peut faire glisser deux disques de rayon* ϵ *le long de* γ, *un de chaque côté.*

Exercice 29 Nombre d'enroulement *Soit* $s \mapsto X(s)$, $t \in \mathbf{R}/L\mathbf{Z}$, *une courbe plane* fermée *de classe* C^3, *paramétrée par son abscisse curviligne. Montrer qu'il existe un entier* $w \in \mathbf{Z}$ *tel que*

$$\int_0^1 \kappa(s)\,ds = 2\pi w.$$

Ce nombre s'appelle nombre d'enroulement `(winding number)` *de la courbe.*

Donner pour chaque entier $m \in \mathbf{Z}$ *un exemple de courbe de nombre d'enroulement égal à* m.

Montrer que si la courbe $X(\mathbf{R}/L\mathbf{Z})$ *est strictement convexe, i.e. qu'elle borde un convexe* C *et ne contient pas de segment de droite, alors* $w = \pm 1$.

Exercice 30 Caractérisation des courbes planes *La torsion d'une courbe sans point d'inflexion est nulle si et seulement si celle-ci est contenue dans un plan.*

Exercice 31 Caractérisation des hélices *Une* hélice *est une courbe qui, dans un repère orthonormé, admet une paramétrisation de la forme*

$$t \mapsto (R\cos t, R\sin t, \alpha t)$$

où $R > 0$ *et* $\alpha \neq 0$ *sont des constantes. Calculer la courbure et la torsion de cette hélice. Montrer qu'une courbe a une courbure et une torsion constante si et seulement si c'est un cercle ou une hélice.*

Exercice 32 Courbure et torsion de la courbe normale *Calculer la courbure et la torsion de la courbe* $t \mapsto X(t) = (t, t^2, t^3)$. *Quel est le plan osculateur en* $t = 0$ *? la normale ? la binormale ?*

5 Courbure des surfaces

Exercice 33 Première forme fondamentale de la sphère *On paramètre la sphère unité par la latitude* θ *et la longitude* ϕ. *Ecrire cette paramétrisation. La normale orientée sort elle ou rentre-t-elle dans la sphère ? Ecrire la première forme fondamentale. Calculer la longueur d'un parallèle. Calculer l'aire de la sphère unité.*

Exercice 34 Distance intrinsèque sur la sphère *Si* P *et* Q *sont deux points de la sphère unité de* $\mathbf{R}^3$, *on définit leur distance* $d(P,Q)$ *comme la borne inférieure des longueurs des courbes tracées sur la sphère qui relient* P *à* Q. *Montrer que* $d(P,Q) = \mathrm{Arccos}(P\cdot Q)$, *i.e. que la borne inférieure est atteinte par un des arcs du grand cercle passant par* P *et* Q.

Exercice 35 *Calculer l'aire d'une surface de révolution générale, puis dans le cas particulier du tore de révolution dont la méridienne est un cercle de rayon* r_2 *dont le centre est situé à distance* $r_1 > r_2$ *de l'axe.*

Exercice 36 *Calculer la seconde forme fondamentale de la sphère unité au pôle nord.*

Exercice 37 *Soit* $t \mapsto c(t)$ *une courbe tracée dans le plan horizontal* $\{z = 0\}$ *de* $\mathbf{R}^3$. *Soit* C *le cylindre droit sur c, i.e. la réunion des droite verticales coupant la courbe c. Calculer la seconde forme fondamentale du cylindre* C *en l'un de ses points.*

Exercice 38 *Supposons que la surface* X *contient la droite* D. *Montrer que* D *est une direction asymptotique de* X

Exercice 39 *Soit* X *le paraboloïde hyperbolique d'équation* $z = xy$. *Calculer sa seconde forme fondamentale, ses courbures principales. Quelles sont les directions asymptotiques ? On utilisera deux systèmes de coordonnées différents,* $(u,v) \mapsto X(u,v) = (u,v,uv)$ *et* $(u',v') \mapsto X_1(u',v') = (u'/v', v', u')$ *et on comparera les résultats obtenus.*

Exercice 40 *Soit c une courbe tracée dans le plan* $\{z = 0\}$. *Soit* $V = (0,0,1)$, *soit* X *le cône de sommet* V *et de base c. Calculer sa seconde forme fondamentale. Quelle est sa signature ?*

Exercice 41 *Soit c une courbe tracée sur la sphère unité. Soit* X *le cône de sommet l'origine et de base c. Calculer sa seconde forme fondamentale.*

Exercice 42 *Montrer qu'une surface a en un point* P *un contact d'ordre 2 avec un plan si et seulement si la seconde forme fondamentale* II_P *est nulle. Montrer qu'une surface a en un point* P *un contact d'ordre 2 avec une sphère si et seulement si en* P *les courbures principales sont égales et non nulles.*

Exercice 43 *Soit* X *la surface de révolution décrite par une courbe plane située dans un plan vertical (la* méridienne*) qu'on fait tourner autour de l'axe des* z. *Paramétrer* X, *calculer les courbures principales et les directions principales. Traiter le cas particulier du tore de révolution de méridienne circulaire.*

Exercice 44 *Soit c une courbe gauche sans point d'inflexion. Dans le plan affine passant par* $c(t)$ *et orthogonal à la tangente à c, on trace un cercle de rayon* ϵ. *Soit* X *la surface de décrite par ce cercle. En utilisant le repère de Frenet de c, paramétrer* X, *calculer l'aire, l'intégrale par rapport à l'élément d'aire de la courbure de Gauss ainsi que de sa valeur absolue, les courbures principales et les directions principales.*

Exercice 45 Contour apparent *Soit* X *une surface et* π *un plan de* $\mathbf{R}^3$. *Le* contour apparent dans X *est l'ensemble des points de* X *où la projection orthogonale sur* π *n'est pas une submersion. Montrer que le contour apparent dans* X *est une courbe lisse, sauf peut-être aux points où la courbure de Gauss s'annule. Le* contour apparent dans π *est la projection dans* π *du contour apparent dans* X. *Montrer que le contour apparent dans* π *est lisse sauf peut-être aux points où la normale à* π *est une direction asymptotique de* X.

Exercice 46 Raccord de deux tubes *Soient c_1 et c_2 deux courbes, soit $\epsilon > 0$ et soient x_1, x_2 les tubes de rayon ϵ autour de c_1 et c_2. Montrer que x_1 et x_2 se raccordent G^0 si et seulement si les courbes c_1 et c_2 se raccordent G^1. Montrer que les tubes se raccordent G^2 si et seulement si les courbent se raccordent G^2.*

6 Approximation

Exercice 47 B-splines uniformes.

On pose, pour $i \in \mathbf{Z}$, $t_i = i$. Montrer que pour tout $i \in \mathbf{Z}$, $k \geq 1$ et $t \in \mathbf{R}$,

$$B_{i,k}(t+1) = B_{i-1,k}(t) \quad et \quad B_{0,k}(k+1-t) = B_{0,k}(t).$$

Calculer et représenter graphiquement les $B_{i,k}$ pour $k \leq 3$ sur l'intervalle $[0,6]$.

Exercice 48 Fonctions B-splines pour le vecteur de noeuds 001234 *On pose $t_0 = t_1 = 0$, $t_2 = 1$, $t_3 = 2$, $t_4 = 3$, etc..*

Calculer et représenter graphiquement $B_{i,k}$ pour $k \leq 2$ et $0 \leq i \leq 3-k$.

Exercice 49 Fonctions B-splines pour le vecteur de noeuds 000123 *On pose $t_0 = t_1 = t_2 = 0$, $t_3 = 1$, $t_4 = 2$, $t_5 = 3$, etc..*

Calculer et représenter graphiquement $B_{i,k}$ pour $k \leq 2$ et $0 \leq i \leq 3-k$.

Exercice 50 Fonctions B-splines pour le vecteur de noeuds 000012 *On pose $t_0 = t_1 = t_2 = t_3 = 0$, $t_4 = 1$, $t_5 = 2$, $t_6 = 3$, etc..*

Calculer et représenter graphiquement $B_{i,k}$ pour $k \leq 2$ et $0 \leq i \leq 3-k$.

Exercice 51 Fonctions B-splines pour le vecteur de noeuds 0123345 *On pose $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, $t_2 = 2$, $t_3 = t_4 = 3$, $t_5 = 4$, $t_6 = 5$, $t_7 = 6$ et $t_8 = 7$.*

Calculer et représenter graphiquement $B_{i,k}$ pour $k \leq 2$ et $0 \leq i \leq 5$, ainsi que $B_{0,3}$ et $B_{1,3}$.

Montrer que $\omega_{i,k}(6-t) = 1 - \omega_{7-k-i,k}(t)$. En déduire que (sauf pour t entier si $k = 0$) $B_{i,k}(6-t) = B_{6-k-i,k}(t)$.

Exercice 52 Fonctions de Bézier cubiques *On pose $t_0 = t_1 = t_2 = t_3 = 0$, $t_4 = t_5 = t_6 = t_7 = 1$. Calculer et représenter graphiquement les fonctions $B_{i,k}$ pour $k \leq 3$ et $0 \leq i \leq 7-k$.*

Exercice 53 Cubique passant par 2 points donnés avec des tangentes orientées donnée *Construire un vecteur de noeuds et des points de contrôle (le moins possible) dans le plan de sorte que la B-spline de degré 3 associée passe par les points $M = (1,0)$ et $N = (3,0)$ avec en ces deux points une tangente dirigée par $(1,1)$.*

Exercice 54 Tangence aux côtés du polygone de contrôle *Montrer qu'une B-spline de degré 2 relative à un vecteur de noeuds simple est toujours tangente aux côtés de son polygone de contrôle. Montrer que si les points P_i, P_{i-1} et P_{i-2} sont sur une même droite D, alors la courbe x_3 est tangente à D en $t = t_{i+1}$.*

Exercice 55 *Soit $t_0 = t_1 = t_2 = t_3 = 0$, $t_4 = t_5 = t_6 = t_7 = 1$, $P_0 = (1,0)$, $P_1 = (2,1)$, $P_2 = (2,-1)$, $P_3 = (3,0)$. Au moyen de l'algorithme de de Casteljau, calculer $x_3(t)$ pour $t \in [0,1[$. Faire la construction géométrique pour $t = 1/2$ et $t = 1/4$.*

Exercice 56 *Construire une courbe de classe C^2 reliant $P = (-2,0)$ à $Q = (2,0)$ avec tangente horizontale aux extrémités, en forme de bosse (resp. de boucle). Au moyen de l'algorithme de de Casteljau, calculer le point courant. Placer exactement quelques points au moyen de la construction géométrique et donner une idée de l'allure de la courbe.*

Exercice 57 *Construire une courbe B-spline fermée de classe C^2 tangente aux côtés du carré de sommets $O = (0,0)$, $P = (2,0)$, $Q = (2,2)$ et $R = (0,2)$. Est-ce un cercle ?*

Exercice 58 *Montrer qu'aucune courbe convexe ne satisfait les conditions aux limites de l'exercice 53. Construire une solution de l'exercice 53 qui coupe toute droite en au plus* 3 *points.*

Exercice 59 Courbure à l'origine d'une courbe de Bézier *Calculer la courbure au point M de la courbe de Bézier construite dans l'exercice 53.*

Exercice 60 *Une* cônique *est une courbe plane définie par une équation du second degré (i.e. le lieu des zéros d'un polynôme en deux variables de degré total 2). Soit C une cônique non vide et non dégénérée (i.e. non réduite à une ou 2 droites) et P un point de C. En coupant C par les droites passant par P, montrer que C admet une paramétrisation rationnelle.*

Exercice 61 *Vérifier que la courbe B-spline rationnelle de degré 2 associée au polygone de contrôle $P_0 = (1,1)$, $P_2 = (0,1)$, $P_2 = (-1,1)$, $P_3 = (-1,0)$, $P_4 = (-1,-1)$, $P_5 = (0,-1)$, $P_6 = (1,-1)$, $P_7 = (1,0)$ et $P_{i+8} = P_i$, aux poids $w_{2j+1} = 1$, $w_{2j} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et au vecteur de noeuds $t_{2j} = t_{2j+1} = j$ est une paramétrisation périodique de période 4 du cercle unité.*

Exercice 62 *Montrer que toute courbe de Bézier rationnelle de degré 2 est contenue dans une cônique.*

Exercice 63 *Sans changer de polygone de contrôle, peut on déformer la courbe de Bézier cubique de l'exercice 53 en une courbe de Bezier cubique rationnelle γ telle qu'en raccordant γ à sa translatée de vecteur $(2,0)$, on obtienne une courbe de classe GC^2 ?*