1 Le problème

Considérons l'ellipse $\mathcal{E}_1$ de centre l'origine, de grands axe 1 et 2 parallèles aux axes (allongée vers le haut) et son image $\mathcal{E}_2$ par la rotation de 90^0 suivie de la translation de 4 vers la droite. On va calculer leurs *équisécantes*. Il s'agit des droites les partageant en régions de mêmes aires.

Définition (Monge). Soient Ω_1 et Ω_2 deux régions du plan de même aire finie. Une droite D est une *équisécante* de Ω_1 et Ω_2 si, pour chaque demi-plan P bordé par D,

$$\text{Aire}(P \cap \Omega_1) = \text{Aire}(P \cap \Omega_2).$$

2 La théorie

Les droites qui partagent une ellipse en deux parties dont le rapport des aires est fixé sont les tangentes à une ellipse homothétique. En effet, c'est vrai pour le cercle (par symétrie) et cette propriété est conservée par les applications affines. Donc les équisécantes sont les droites tangentes simultanément à deux ellipses.

L'ensemble des droites projectives du plan (projectif) est à nouveau un plan projectif. L'ensemble des tangentes à une cônique est une cônique du plan des droites. Il s'agit de calculer l'intersection de deux telles côniques, i.e. de résoudre des équations du second degré. On peut donc espérer obtenir des formules avec des racines carrées. Il y a typiquement 4 solutions, donc il y aura des $\pm$ dans les formules. Il faudra choisir les signes correctement, car seulement 2 des 4 solutions sont des équisécantes (les deux autres ont une fraction f de l'aire de $\mathcal{E}_1$ sur leur droite et une fraction f de l'aire de $\mathcal{E}_2$ sur leur gauche).

3 Le calcul

$\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ sont les images du cercle unité $\mathcal{C}$ par les applications affines de matrices respectives

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit $r \in]0,1]$. La tangente au cercle de rayon r, $r\mathcal{C}$, au point $(r\cos\theta, r\sin\theta)$, a pour équation cartésienne

$$\cos\theta\, x + \sin\theta\, y - r = 0.$$

En notation matricielle,

$$\cos\theta\, x + \sin\theta\, y - r = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & -r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La tangente D à $r\mathcal{E}_1 = M_1(r\mathcal{C})$, au point $M_1 \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 1 \end{pmatrix}$, a pour équation cartésienne

$$\cos\theta\, x + \sin\theta\, y - r = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & -r \end{pmatrix} M_1^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

D est tangente à $r\mathcal{E}_2 = M_2(r\mathcal{C})$ si et seulement si $M_2^{-1}D$ est tangente à $r\mathcal{C}$. Remarquer qu'une droite d'équation $ax + by + c = 0$ est tangente au cercle de centre C et de rayon r si et seulement si le carré de sa distance à C vaut r^2, i.e.

$$\frac{(ax_C + by_C + c)^2}{a^2 + b^2} = r^2.$$

Or l'équation de $M_2^{-1}D$ est

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & -r \end{pmatrix} M_1^{-1} M_2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

On calcule

$$M_1^{-1} M_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

puis l'équation de $M_2(D)$,

$$2\cos\theta\, x + \frac{1}{2}\sin\theta\, y + 4\cos\theta - r = 0.$$

On trouve que D est tangente à $r\mathcal{E}_2$ si et seulement si

$$(4\cos\theta - r)^2 = r^2(4\cos^2\theta + \frac{1}{4}\sin^2\theta),$$

ce qui s'écrit comme une équation du second degré en $\cos\theta$,

$$(16 - \frac{15}{4}r^2)\cos^2\theta - 8r\cos\theta + \frac{3}{4}r^2 = 0.$$

Le discriminant réduit vaut

$$16r^2 - (16 - \frac{15}{4}r^2)\frac{3}{4}r^2 = r^2(4 + \frac{45}{16}r^2).$$

Les solutions de cette équation sont

$$\cos(\theta) \quad = \quad r\frac{4 \pm \sqrt{4 + \frac{45}{16}r^2}}{16 - \frac{15}{4}r^2}.$$

La solution avec $\pm = +$ est celle qui tourne le plus vite. Au voisinage du centre $(4,0)$ de $\mathcal{E}_2$, elle passe en dessous de ce point, ce n'est pas la bonne. Donc on continue avec le choix $\pm = -$.

$$\begin{aligned}\cos(\theta) &= r\frac{4-\sqrt{4+\frac{45}{16}r^2}}{16-\frac{15}{4}r^2},\\ \sin(\theta) &= \pm\sqrt{1-r^2(\frac{4-\sqrt{4+\frac{45}{16}r^2}}{16-\frac{15}{4}r^2})^2}.\end{aligned}$$

L'équation de la droite variable D s'écrit

$$\cos(\theta)x+\frac{1}{2}\sin(\theta)y-r=0.$$

Changer le signe $\pm$ remplace une équisécante par l'équisécante symétrique par rapport à l'axe des centres. Le même effet est obtenu en changeant le signe de r. Par conséquent, en choisissant le signe $\pm = +$ et en faisant varier r dans $]-1,1[$, on décrit toutes les équisécantes.

4 Le tracé

Formules à copier/coller dans Geogebra, après avoir défini un curseur $r \in]-1,1[$:

```
c=r*((4-sqrt(4+(45/16)r^2))/(16-(15/4)r^2))
s=sqrt(1-c^2)
c*x+(1/2)*s*y-r=0
```
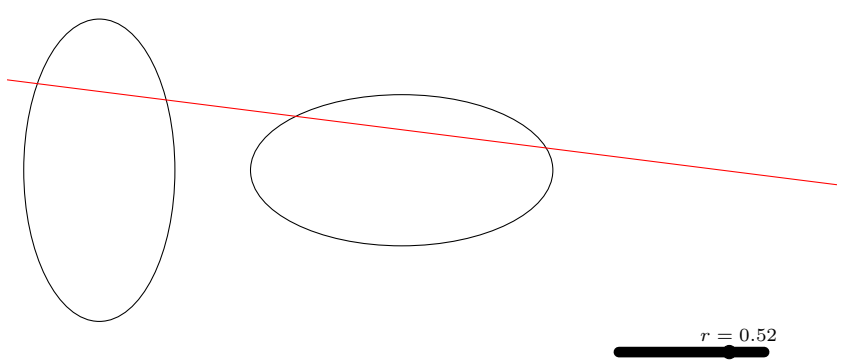
Figure obtenue pour $r = 0.52$.