Approximations par des fractions rationnelles

D'après des recherches de Florian Da-Silva, Aurélien Perdriaud

15 octobre 2023

1 Généralités

On revisite ici l'approximabilité des fonctions avec des fractions rationnelles, en particulier des fonctions continues et par l'intermédiaire de fonctions en escalier. On redémontre qu'une fonction continue sur un intervalle est approximable par des fonctions escaliers (1), mais qu'une fonction en escalier (ici "créneau") n'est pas uniformément approchable par des fonctions continues (2), bien qu'elle le soit non-uniformément par des fractions rationnelles (4) (qui sont continues). On démontre à partir de là un résultat similaire au théorème de Stone-Weierstrass mais utilisant des fractions rationnelles (1). Enfin, on démontre que la possibilité de cette approximation est liée au caractère non-borné du degré des fractions (impossible si borné), de deux faç ons différentes (2, 3). Et en bonus on finit de caractériser l'adhérence des fractions rationnelles en montrant qu'on peut toujours contrôler par un nombre fini de points (4).

1.1 Les approximations de fonctions

On se place dans l'espace des fonctions réelles. On note $\mathcal F$ l'ensemble des fractions rationnelles, $\mathcal E$ l'ensemble des fonctions escaliers, et on note e la fonction $t \to \Pi(t-\frac12)$ où Π est la fonction porte, on l'appelle la fonction créneau. Les fonctions en escalier sont de faç on équivalente des sommes de fonctions créneaux.

1.1.1 Définition/noms des distances et approximabilité

Définition 1 (Indice d'Erreur Absolue).

$$D_1(\lambda, \eta) = \int_E |\lambda(t) - \eta(t)| dt$$

Il s'agit de la distance de la norme ||.||. Elle respecte en particulier l'inégalité triangulaire.

Définition 2 (Indice d'Erreur Maximale).

$$D_{\infty}(\lambda, \eta) = \sup\{|\lambda(t) - \eta(t)| : t \in E\}$$

Il s'agit de la distance de la norme $||.||_{\infty}$. Elle respecte en particulier l'inégalité triangulaire.

Une fonction $f \in E_2$ est ε -près approximable (avec $\varepsilon > 0$) au sens de D par E_1 si $\exists g \in E_1, d(f,g) < \varepsilon$, et approximable si ε -près approximable pour tout $\varepsilon > 0$. De faç on équivalente $\exists (f_n) \in E_1^{\mathbb{N}}, \lim_{n \to +\infty} D(f_n, g) = 0$.

1.1.2 Propriétés des indices d'approximation

Propriété 1 (Minoration de \underline{D}_{∞}). Soit $\underline{\lambda}$ une fonction et η une fonction continue qui approxime λ . Si $\alpha, \beta \in \{\overline{\lim_{x \to a^+}} \lambda(x), \underline{\lim_{x \to a^-}} \lambda(x), \overline{\lim_{x \to a^+}} \lambda(x), \underline{\lim_{x \to a^+}} \lambda(x), \underline{\lim_{x \to a^+}} \lambda(x), \lambda(a)\}$ avec $\alpha < \beta$ alors $d(\lambda, \eta) \ge \frac{\beta - \alpha}{2}$.

 $D\'{e}monstration. \text{ On prend } (\alpha,\beta) = (\underbrace{\lim_{x \to a^-}}_{x \to a^-} \lambda(x), \underbrace{\overline{\lim}}_{x \to a^+} \lambda(x)) \text{ en supposant } \alpha < \beta. \text{ Etudions d'abord le cas } \eta(a) \leq 1$

 $\frac{\alpha+\beta}{2}$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe une suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ qui admet pour limite à droite a et telle que $\lambda(x_k)$ admet pour $k \to \infty$ comme limite β , et donc il existe k_0 tel que pour tout $k \ge k_0$, $\beta - \frac{\varepsilon}{2} < \lambda(x_k) < \beta + \frac{\varepsilon}{2}$. De plus par définition de la continuité il existe δ tel que $\forall x \in]a; a + \delta[$, $\eta(a) - \frac{\varepsilon}{2} < \eta(x) < \eta(a) + \frac{\varepsilon}{2}$, et vu que par définition de la limite il existe k_1 tel que $\forall k \ge k_1, x_k \in]a; a + \delta[$, on a que pour tout $k \ge k_1, \eta(a) - \frac{\varepsilon}{2} < \eta(x_k) < \eta(a) + \frac{\varepsilon}{2}$. Et donc en prenant $k_2 = \max(k_0, k_1)$ on a que $\forall k \ge k_2, \beta - \frac{\varepsilon}{2} < \lambda(x_k) < \beta + \frac{\varepsilon}{2}$ et $-\eta(a) - \frac{\varepsilon}{2} < -\eta(x_k) < -\eta(a) + \frac{\varepsilon}{2}$, ce qui donne en additionnant $\beta - \eta(a) - \varepsilon < \lambda(x_k) - \eta(x_k) < \beta - \eta(a) + \varepsilon$.

On trouve grâce à cet encadrement que $\sup\{|\lambda(x) - \eta(x)| : x \in E\} \ge \beta - \eta(a)$ car pour tout $\varepsilon > 0$, il existe k tel que $\sup\{|\lambda(x) - \eta(x)| : x \in E\} \ge \lambda(x_k) - \eta(x_k) \ge \beta - \eta(a) - \varepsilon$, et on a donc $\forall \varepsilon > 0$, $\sup\{|\lambda(x) - \eta(x)| : x \in E\}$

 $E\} \ge \beta - \eta(a) - \varepsilon \implies \sup\{|\lambda(x) - \eta(x)| : x \in E\} \ge \beta - \eta(a), \text{ et par ailleurs } \beta - \eta(a) \ge \beta - \frac{1}{2}(\beta + \alpha) = \frac{1}{2}(\beta - \alpha), \text{ comme voulu. Le cas } \eta(a) \le \frac{\beta - \alpha}{2} \text{ est similaire mais on on compare plutôt } \eta(a) \text{ avec } \alpha.$

Les autres choix de (α, β) se traitent soit plus simplement avec des arguments similaires (ceux avec $\lambda(a)$), soit est un cas plus faible $(\underset{x \to a^+}{\underline{\lim}} et \underset{x \to a^-}{\overline{\lim}})$, soit se déduisent par symétrie des autres cas (d'axes x = 0 et y = 0). \square

1.1.3 Approximabilité de certaines classes de fonctions

Proposition 1. Si une fonction λ est uniformément continue sur un intervalle [a,b], elle est approximable au sens de D_1 par des fonctions en escalier.

Démonstration. On considère la séquence de fonctions $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies sur [a,b] telles que pour $x\in[a+\frac{k}{n}(b-a);a+\frac{k+1}{n}(b-a)[$ avec $k\in[0,n-1]$, on aie $\eta_n(x)=\lambda(a+\frac{k}{n}(b-a)),$ et $\eta_n(b)=\lambda(a+\frac{n-1}{n}(b-a)).$ Il s'agit bien de fonctions en escalier.

On cherche à démontrer que D_1 pour λ et η_n tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Soit $\varepsilon>0$, vu que λ est uniformément continue il existe $\delta>0$ tel que $|x-y|\leq \delta \implies |\lambda(x)-\lambda(y)|\leq \frac{\varepsilon}{b-a}$, de plus il existe (par l'axiome d'archimède) n_0 tel que $\forall n\geq n_0, \frac{1}{n}\leq \frac{\delta}{b-a}\iff \frac{b-a}{n}\leq \delta$ et donc $|x-y|\leq \frac{b-a}{n}\implies |x-y|\leq \delta \implies |\lambda(x)-\lambda(y)|\leq \frac{\varepsilon}{(b-a)}$. Notons que pour un tel n:

$$x \in [a + \frac{k}{n}(b-a); a + \frac{k+1}{n}(b-a)] \implies |x - (a + \frac{k}{n}(b-a))| \le \frac{b-a}{n} \implies |\lambda(x) - \lambda(a + \frac{k}{n}(b-a))| \le \frac{\varepsilon}{b-a}$$

Et donc on a:

$$\int_{a}^{b} |\lambda(x) - \eta_{n}(x)| dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a + \frac{k}{n}(b-a)}^{a + \frac{k+1}{n}(b-a)} |\lambda(x) - \eta_{n}(x)| dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a + \frac{k}{n}(b-a)}^{a + \frac{k+1}{n}(b-a)} |\lambda(x) - \lambda(a + \frac{k}{n}(b-a))| dx$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a + \frac{k}{n}(b-a)}^{a + \frac{k+1}{n}(b-a)} \frac{\varepsilon}{b-a} dx \leq \sum_{k=0}^{n-1} \left(a + \frac{k+1}{n}(b-a) - (a - \frac{k}{n}(b-a))\right) \frac{\varepsilon}{b-a} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n}(b-a) \frac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon$$

On a bien pour tout $\varepsilon > 0$ qu'il existe n_0 tel que pour tout $n \ge n_0$, D_1 pour λ et η_n est inférieure à ε . \square

Proposition 2. Si une fonction λ est discontinue en un point a, elle n'est pas approximable au sens de D_{∞} par des fonctions continues en ce point a.

Démonstration. Soit η une fonction continue en a. Si λ était continue en a on aurait $\overline{\lim}_{x \to a^+} \lambda(x) = \underline{\lim}_{x \to a^-} \lambda(x) = \overline{\lim}_{x \to a^+} \lambda(x) = \underline{\lim}_{x \to a^+} \lambda(x) = \underline{\lim}_{x \to a^+} \lambda(x) = \lambda(a)$, donc au moins deux valeurs α, β de ces cinq quantités sont différentes, spdg $\alpha < \beta$. D'après 1 on a alors $D_{\infty}(\lambda, \eta) \geq \frac{\beta - \alpha}{2}$: approximation impossible à $\frac{\beta - \alpha}{2} > 0$ près. \square

La proposition suivante est importante.

Proposition 3 (Transitivité de l'approximabilité). Soit une distance D. Soient deux classes E_1 et E_2 de fonctions. Si E_1 approxime λ , et que E_2 approxime chaque fonction de E_1 , alors E_2 approxime λ .

 $D\acute{e}monstration$. Par hypothèse, il existe $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\in E_1^{\mathbb{N}}$ telles que $\lim_{n\to\infty}D(\lambda,\eta_n)=0$ et pour chaque η_n il existe $(\zeta_{m,n})_{m\in\mathbb{N}^*}$ telles que $\lim_{m\to\infty}d(\eta_n,\zeta_{m,n})=0$. Par définition de la limite on note que pour chaque $k\in\mathbb{N}^*$, pour chaque $\varepsilon>0$, il existe $\varphi(k,\varepsilon)\in\mathbb{N}^*$ tel que $d(\eta_k,\zeta_{\varphi(k,\varepsilon),k})<\varepsilon$.

On rappelle que D respecte l'inégalité triangulaire. On considère la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}=(\zeta_{\varphi(k,k^{-1}),k})_{k\in\mathbb{N}}\in E_2^{\mathbb{N}}$. On a :

$$0 < D(\lambda, u_k) = D(\lambda, \zeta_{\varphi(k, k^{-1}), k}) \le D(\lambda, \eta_k) + D(\eta_k, \zeta_{\varphi(k, k^{-1}), k}) < D(\lambda, \eta_k) + k^{-1}$$

La limite du membre de droite est nulle, et donc par les gendarmes on a bien $\lim_{k\to\infty} D(\lambda, u_k) = 0$ pour $(u_k)_{k\in\mathbb{N}^*} \in E_2^{\mathbb{N}^*}$ ce qui conclut.

La proposition est en particulier vraie pour D_1 et D_{∞} . Aussi presque par définition, si une fonction est approximable par C au sens de D_{∞} alors on peut trouver une suite de fonctions de C qui converge uniformément vers notre fonction λ .

$\mathbf{2}$ Premiers exemples

2.1Fonction créneau

Formule 1 (Approximation de la fonction créneau).

$$f_n(x) = \frac{1}{(2x-1)^{2n} + 1}.$$

Proposition 4. La formule 1 fournit une approximation de la fonction créneau au sens de D_1 .

Démonstration.

$$\lim_{n \to \infty} (2x - 1)^{2n} = \begin{cases} +\infty & \text{si } |2x - 1| > 1 \\ 1 & \text{si } |2x - 1| = 1 \\ 0 & \text{si } |2x - 1| < 1 \end{cases}$$

$$\implies \lim_{n \to \infty} \frac{1}{(2x - 1)^{2n} + 1} = \begin{cases} 0 & \text{si } x > 1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = \frac{1}{2} \\ 1 & \text{si } -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = \frac{1}{2} \\ 0 & \text{si } x < -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Remarque 1 (Points égaux). Avec l'approximation 1, on a, pour tout k

$$f_k(0) = \frac{1}{1 + (2 \times 0 - 1)^{2k}} = \frac{1}{1 + (-1)^{2k}} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1 + 1^{2k}} = \frac{1}{1 + (2 \times 1 - 1)^{2k}} = f_k(1)$$

En particulier $f_k(0) = e(0) = f_k(1) = e(1)$.

Approximabilité de fonctions uniformément continues 2.2

On sait que la fonction créneau est approximable par des fractions rationnelles de degré libre. Aussi, vu que la suite (f_n) approxime la fonction créneau, il existe aussi en considérant $\gamma f_n(\alpha x - \beta)$ des suites dans $\mathcal{F}^{\mathbb{N}^*}$ qui approximent toute fonction de la classe C des fonctions créneaux, et en les sommant elles approximent aussi clairement toute fonction de la classe \mathcal{E} des fonctions générées par somme finie de C, au sens de D_1 en tout cas. Or la proposition 1 nous indique que les fonctions de \mathcal{E} approximent toute fonction uniformément continue au sens de D_1 . Donc d'après la proposition 3, les fonctions de \mathcal{F} approximent toute fonction uniformément continue (sur un certain intervalle borné prédéfini). Cette méthode échoue pour D_{∞} , mais le résultat reste vrai comme on le démontre ci-dessous.

Théorème 1. Toute fonction continue sur \mathbb{R} de limite 0 en $+\infty$ et en $-\infty$, est approximable au sens de D_{∞} par des fractions rationnelles.

Pour commencer, en s'appuyant sur l'approximation 1, on démontre le résultat suivant :

Lemme 1. Soit $g \in \mathcal{E}$ une fonction en escalier de pas constant a > 0. Si son saut est borné, de supremum p, alors

$$\exists f \in \mathcal{F}, \quad D_{\infty}(f,g) < 2p.$$

Mais avant, on va devoir démontrer quelques inégalités sur certaines fractions rationnelles.

Lemme 2. Pour tout $\varepsilon \in]0, \frac{1}{2}[$, la formule 1 approxime la fonction créneau au sens de D_{∞} sur $I = \mathbb{R} \setminus (]$ $\varepsilon, \varepsilon[\cup]1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon[)$

Démonstration. Si $x \in I$, il y a trois cas.

1) Si $x \le -\varepsilon$, $2x - 1 < -2\varepsilon - 1$, et vu que $\varepsilon > 0$, on a $(2x - 1)^{2n} \ge (1 + 2\varepsilon)^{2n}$ donc $0 < f_n(x) \le \frac{1}{(1 + 2\varepsilon)^{2n+1}}$. Et

vu que x < 0 on a en fait $|f_n(x) - e(x)| = f_n(x) \le \frac{1}{(1+2\varepsilon)^{2n}+1}$. 2) Si $\varepsilon \le x \le 1-\varepsilon$, alors on a $2\varepsilon - 1 \le 2x - 1 \le 1-2\varepsilon$, en outre $(2x-1)^{2n} \le (1-2\varepsilon)^{2n}$ et $1 \ge f_n(x) \ge \frac{1}{(1-2\varepsilon)^{2n}+1}$.

Et vu que 0 < x < 1 on a alors $|f_n(x) - e(x)| = 1 - f_n(x) \le 1 - \frac{1}{(1-2\varepsilon)^{2n}+1} = \frac{(1-2\varepsilon)^{2n}}{(1-2\varepsilon)^{2n}+1} = \frac{1}{\left(\frac{1}{1-2\varepsilon}\right)^{2n}+1}$. Or on trouve que $\frac{1}{1-2\varepsilon} > 1+2\varepsilon$, en effet on a $0 < 1-2\varepsilon < 1$ et donc $\frac{1}{1-2\varepsilon} > 1+2\varepsilon > 0 \iff 1 > 1-4\varepsilon^2 > 0$, et le dernier

encadrement est en fait vrai car $4\varepsilon^2 < 4\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1$. On a donc plus grossièrement $|f_n(x) - e(x)| \le \frac{1}{(1+2\varepsilon)^{2n}+1}$.

3) f_n et e ont clairement un axe de symétrie $x = \frac{1}{2}$, ce qui permet de directement conclure à partir de la 2) que

si $x > 1 + \varepsilon$, on a $|f_n(x) - e(x)| \le \frac{1}{(1+2\varepsilon)^{2n}+1}$. On a au final $\forall x \in I, |e(x) - f_n(x)| \le \frac{1}{\left(\frac{1}{1-2\varepsilon}\right)^{2n}+1}$ donc $D_{\infty}(e, f_n) < \frac{1}{(1+2\varepsilon)^{2n}+1}$ et vu que $1 + 2\varepsilon > 1$, on a par les gendarmes $\lim_{n\to+\infty} D_{\infty}(e,f_n) = \frac{1}{+\infty+1} = 0$, ce qui montre l'approximabilité!

Lemme 3.

$$\forall x \in]-1,1[,\frac{1-((x+1)(x-1))^{2k}}{(1+(x+1)^{2k})(1+(x-1)^{2k})} < \frac{1}{k-1}.$$

Démonstration. Tout d'abord on remarque aisément que l'expression ci-dessus est une fonction paire et que pour x = 0 l'expression vaut 0. Il suffit donc de démontrer l'inégalité pour $x \in]0,1[$.

Ensuite on peut écrire $((x+1)(x-1))^{2k} = (x^2-1)^{2k} = (1-x^2)^{2k}$, et vu que $x^2 < 1$, on a $-x^2 > -1$ et, par l'inégalité de Bernoulli, $(1-x^2)^{2k} > 1-2kx^2$. En développant $(x+1)^{2k}$ avec le binôme de Newton, on n'a que des termes positifs car $x \ge 0$, avec un terme strictement positif 1 > 0, donc en particulier on a $(x+1)^{2k} > {2k \choose 2}x^2 = k(2k-1)x^2$. Au final, vu que $1 + (x-1)^{2k} > 1$, on déduit de tout ç a :

$$\frac{1 - (1 - x^2)^{2k}}{(1 + (x - 1)^{2k})(1 + (x + 1)^{2k})} < \frac{1 - (1 - 2kx^2)}{1 \times (k(2k - 1)x^2)} = \frac{2}{2k - 1} < \frac{2}{2k - 2} = \frac{1}{k - 1},$$

ce qui conclut.

Corollaire 1. Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, alors pour tout $\varepsilon > 1$, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout k > N:

$$\forall x \in]-1,1[, \left| \left[\frac{1}{1 + (x-1)^{2k}} + \frac{\alpha}{1 + (x+1)^{2k}} \right] - 1 \right| < |\alpha - 1| + \varepsilon$$

Démonstration.

$$\begin{split} \frac{1}{1+(x-1)^{2k}} + \frac{\alpha}{1+(x+1)^{2k}} &= \frac{1+(x+1)^{2k}+\alpha(1+(x-1)^{2k})}{(1+(x-1)^{2k})(1+(x+1)^{2k})} \\ &= \frac{1+(x+1)^{2k}+1+(x-1)^{2k}+(\alpha-1)(1+(x-1)^{2k})}{(1+(x-1)^{2k})(1+(x+1)^{2k})} \\ &= \frac{(1+(x-1)^{2k})(1+(x+1)^{2k})+(\alpha-1)(1+(x-1)^{2k})+1-(x+1)^{2k}(x-1)^{2k}}{(1+(x-1)^{2k})(1+(x+1)^{2k})} \\ &= 1+\frac{\alpha-1}{1+(x+1)^{2k}} + \frac{1-((x-1)(x+1))^{2k}}{(1+(x-1)^{2k})(1+(x+1)^{2k})}. \end{split}$$

Or $\left|\frac{1}{1+(x+1)^{2k}}\right| < 1$ et par le lemme 3, $\frac{1-((x-1)(x+1))^{2k}}{(1+(x-1)^{2k})(1+(x+1)^{2k})} < \frac{1}{k-1}$. Donc, par l'inégalité triangulaire,

$$\forall x \in]-1,1[, \left| \left[\frac{1}{1+(x-1)^{2k}} + \frac{\alpha}{1+(x+1)^{2k}} \right] - 1 \right| < |\alpha - 1| + \frac{1}{k-1}.$$

Vu que $\varepsilon > 0$ (axiôme d'Archimède) il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall k \geq N, \frac{1}{k-1} < \varepsilon$ et donc au final on a bien

$$\forall k \ge N, \forall x \in]-1, 1[, \left| \left[\frac{1}{1 + (x-1)^{2k}} + \frac{\alpha}{1 + (x+1)^{2k}} \right] - 1 \right| < |\alpha - 1| + \varepsilon.$$

Corollaire 2. On considère deux fonctions créneaux de hauteurs différentes mais de même largeur, i.e on considère $0 \neq \alpha \neq \beta \neq 0$ (les hauteurs), l > 0 (la largeur), $d \in \mathbb{R}$ (le décalage) et la fonction $\alpha e(\frac{x-d}{l})$ + $\beta e(\frac{x-d}{l}-1)$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq N$, on ait

$$\forall x \in](d+l) - \frac{l}{2}, (d+l) + \frac{l}{2}[, \left| \left[\alpha f_k(\frac{x-d}{l}) + \beta f_k(\frac{x-d}{l} - 1) \right] - \left[\alpha e(\frac{x-d}{l}) + \beta e(\frac{x-d}{l} - 1) \right] \right| < |\alpha - \beta| + \varepsilon$$

Démonstration. Avec le changement de variable $y = \frac{x-d}{l}$, on revient à l'inégalité

$$\forall y \in]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[, |[\alpha f_k(y) + \beta f_k(y-1)] - [\alpha e(y) + \beta e(y-1)]| < |\alpha - \beta| + \varepsilon.$$

Notons que si y=1, alors on obtient $\alpha f_k(0) + \beta f_k(1) - \alpha e(0) - \beta e(1) = 0 < 2$ d'après la remarque 1. On a alors deux possibilités.

Cas 1: y > 1

En posant $\gamma = \frac{\alpha}{\beta} \neq 1$, on revient à l'inégalité

$$\forall y \in]1, \frac{3}{2}[, \quad |[\gamma f_k(y) + f_k(y-1)] - [\gamma e(y) + e(y-1)]| < |\gamma - 1| + \left|\frac{\varepsilon}{\beta}\right|]$$

On a e(y) = 0 car y > 1 et e(y - 1) = 1 car 0 < y - 1 < 1. On se ramène donc à étudier

$$\forall y \in]1, \frac{3}{2}[, \quad \left| \frac{\gamma}{1 + (2y - 1)^{2k}} + \frac{1}{1 + (2(y - 1) - 1)^{2k}} - 1 \right| < |\gamma - 1| + \left| \frac{\varepsilon}{\beta} \right|$$

Avec le changement de variable z=2y-2, on revient à démontrer pour $\left|\frac{\varepsilon}{\beta}\right|>0$ qu'il existe $N'\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $k\geq N'$:

$$\forall z \in]0,1[, \quad \left|\frac{\gamma}{1+(z+1)^{2k}} + \frac{1}{1+(z-1)^{2k}} - 1\right| < |\gamma-1| + \left|\frac{\varepsilon}{\beta}\right|.$$

Ce qui est vrai en vertu du corollaire 1, vu que $]0,1[\subset]-1,1[$.

Cas 2: y < 1

En posant $\gamma = \frac{\beta}{\alpha} \neq 1$, on se ramène à l'inégalité :

$$\forall y \in]\frac{1}{2}, 1[, \quad |[f_k(y) + \gamma f_k(y-1)] - [e(y) + \gamma e(y-1)]| < |\gamma - 1| + \left|\frac{\varepsilon}{\alpha}\right|.$$

Or e(y) = 1 car 0 < y < 1 et e(y - 1) = 0 car y - 1 < 0. On doit donc étudier

$$\forall y \in]\frac{1}{2},1[, \quad \left|\frac{1}{1+(2y-1)^{2k}}+\frac{\gamma}{1+(2(y-1)-1)^{2k}}-1\right|<|\gamma-1|+\left|\frac{\varepsilon}{\alpha}\right|.$$

En effectuant le changement de variable z=2-2y, on a $(2y-1)^2=(-(2-2y)+1)^2=(1-z)^2=(z-1)^2$, et $(2(y-1)-1)^2=(2y-3)^2=(-(2-2y)-1)^2=(-z-1)^2=(z+1)^2$. On revient à démontrer que pour $\left|\frac{\varepsilon}{\alpha}\right|>0$, il existe $N''\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $k\geq N''$,

$$\forall z \in]-1,0[, \quad \left| \frac{1}{1+(z-1)^{2k}} + \frac{\gamma}{1+(z+1)^{2k}} - 1 \right| < |\gamma - 1| + \left| \frac{\varepsilon}{\alpha} \right|.$$

Ce qui est vrai en vertu du corollaire 1, vu que $]-1,0[\subset]-1,1[$.

En prenant $N = \max(N', N'')$ a bien pour tout k > N l'inégalité voulue!

On a maintenant tout ce qu'il faut pour démontrer qu'on peut approximer une fonction en escalier par des fractions rationnelles, à 2p près.

Preuve du lemme 1.

$$g(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i e(\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i})$$

On a $\forall i, |\alpha_{i+1} - \alpha_i| \leq p$. On peut approximer cette function grâce à l'approximation 1 :

$$G_k(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f_k(\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i})$$

Soit $\delta < \frac{1}{2} \min\{x_{i+1} - x_{i+1} : i \in [0, n]\}.$

On démontre qu'il existe $M \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sup\{|G_M(x) - g(x)| : x \in \mathbb{R}\} < 2p$. Si on a un nombre fini d'intervalles I dont la réunion est \mathbb{R} , de faç on à ce que pour chaque intervalle il existe m tel que $\{|G_m(x) - g(x)| : x \in \mathbb{R}\} < 2p$, alors il suffit de prendre M comme le plus grand de ces m obtenus. On regarde alors les cas de différents intervalles.

Cas 1) $I = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket}]x_i - \delta, x_i + \delta[$

Dans ce cas on a pour $x \in I$ que pour chaque i, si $x \le x_i - \delta$, alors, $\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \le \frac{-\delta}{x_{i+1} - x_i}$, si $x_i + \delta < x < x_{i+1} - \delta$, alors $\frac{\delta}{x_{i+1} - x_i} < \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} < 1 - \frac{\delta}{x_{i+1} - x_i}$ si $x \ge x_{i+1} + \delta[$, alors $\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \ge \frac{\delta}{x_{i+1} - x_i} + 1$. Donc en appliquant le lemme 2 avec $\frac{\delta}{x_{i+1} - x_i} > 0$, on a que $|f_{m_i}\left(\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}\right) - e\left(\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}\right)|$ peut être arbitrairement petit avec $x \in I$. Prenons maintenant la quantité $\frac{p}{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n} > 0$, on considère pour chaque i un entier m_i tel que $\forall x \in I$, $|f_{m_i}\left(\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}\right) - e\left(\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}\right)| < \frac{p}{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n}$, et en prenant $m = \max\{m_i : i \in [0, n]\}$ il vient

$$\forall x \in I, |G_m(x) - g(x)| \le \sum_{i=0}^n \alpha_i \left| f_m \left(\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \right) - e \left(\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \right) \right| < \sum_{i=0}^n \alpha_i \frac{p}{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n} = p.$$

Ce qui conclut le Cas 1).

Cas 2) $I = \bigcup_{i \in [\![0,n-1]\!]}]x_i - \delta, x_i + \delta[$ On démontre qu'on a un tel M pour chaque intervalle $]x_i - \delta, x_i + \delta[$, ce qui concluera. Si $x \in]x_i - \delta, x_i + \delta[$, on a pour tout $j \neq i, i-1$ que $f_k(\frac{x-x_j}{x_{j+1}-x_j})$ peut être arbitrairement petit avec k grand, la preuve est similaire à quand on démontre que les termes sont arbitrairement petits dans le Cas 1. Maintenant on étudie le terme $t_k(x) = \alpha_{i-1} f_k\left(\frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}\right) + \alpha_i f_k\left(\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\right)$. Le pas est constant donc on a $a = x_i - x_{i-1} = x_{i+1} - x_i$, et en particulier $x_i = x_{i-1} + a$ et donc on peut réécrire

$$t_k(x) = \alpha_{i-1} f_k\left(\frac{x - x_{i-1}}{a}\right) + \alpha_i f_k\left(\frac{x - x_i}{a} - 1\right),$$

$$\alpha_{i-1} e\left(\frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}\right) + \alpha_i e\left(\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}\right) = \alpha_{i-1} e\left(\frac{x - x_{i-1}}{a}\right) + \alpha_i e\left(\frac{x - x_i}{a} - 1\right).$$

Soit un réel ε avec $0 < \varepsilon < p$, on a 0 . D'après le corollaire 2, il existe bien un entier <math>M' tel que pour tout $k \geq M'$,

$$\forall x \in]x_i - \delta, x_i + \delta[, \left| t_k(x) - e\left(\frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}\right) - e\left(\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}\right) \right| < |\alpha_{i-1} - \alpha_i| + p - \varepsilon \le 2p - \varepsilon.$$

D'après la remarque ci-dessus, pour chaque $j \neq i, i-1$, il existe m_i tel que pour tout $k \geq m_i$,

$$\left| f_k \left(\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \right) - e \left(\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \right) \right| < \frac{\varepsilon}{2(n-1)}.$$

En prenant $M = \max(M', m_1, ..., m_n)$ on a donc finalement par l'inégalité triangulaire

$$\forall k \ge M, \forall x \in]x_i - \delta, x_i + \delta[, |G_m(x) - g(x)| < (n + 1 - 2) \times \frac{\varepsilon}{2(n - 1)} + 2p - \varepsilon = 2p - \frac{\varepsilon}{2} < 2p - \varepsilon$$

Ce qui conclut!

On peut maintenant faire la démonstration.

Preuve du théorème 1. Soit g une telle fonction. Par le théorème de Heine, on sait que g est uniformément continue. Il suffit de démontrer que pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver une fonction f telle que sup{|f(x) - g(x)|: $x \in \mathbb{R}$ $\leq \varepsilon$ (on peut alors construire une approximation en prenant les fonctions obtenues en prenant $\varepsilon = \frac{1}{n}$ quand n parcourt \mathbb{N}^*).

Soit $\varepsilon > 0$. On pose $\delta = \frac{\varepsilon}{3} > 0$. On va d'abord construire une fonction créneau c telle que $D_{\infty}(g,c) \leq \delta$. Puis on construire une fraction rationnelle f telle que $D_{\infty}(c,g) < 2\delta$. Par l'inégalité triangulaire on aura alors $D_{\infty}(g,f) < 3\delta = \varepsilon$, ce qui concluera

Il existe deux réels a < b tels que $\forall x < a, |g(x)| < \delta$ et $\forall x > b, |g(x)| < \delta$. Ainsi, si une approximation c est telle que $\forall x \in]-\infty, a[\cup]b, \infty[, c(x)=0, \text{ on a } \forall x \in]-\infty, a[\cup]b, \infty[, |f(x)-g(x)|=|-g(x)|<\delta, \text{ ce qui signifie que }$ l'approximation est correcte sur cet ensemble.

Maintenant pour l'intervalle [a, b], on approxime la fonction $f_{|[a,b]}$ par une suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de fonctions en escalier de pas $\frac{1}{n}$. Par continuité uniforme, on peut prendre $\delta > 0$ tel que $\forall x,y \in [a,b], |x-y| < \delta \implies |f(x)-f(y)| < \epsilon$. Vu que $\frac{\delta}{b-a} > 0$, par archimède, il existe n tel que $\frac{1}{n} < \frac{\delta}{b-a}$. On considère alors la fonction en escalier $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$c(x) = \begin{cases} c_n(x) & \text{si } x \in [a, b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- 1) Le saut de c est d'au plus δ . En effet, on a pour tout $k \in [0, n-1]$, que avec $x, y \in [a+\frac{k+1}{n}(b-a), a+\frac{k+1}{n}(b-a)]$, on a $|x-y| \leq |[a+\frac{k}{n}(b-a)] [a+\frac{k}{n}(b-a)]| = \frac{b-a}{n} < \delta$, donc en particulier $|g(a+\frac{k+1}{n}(b-a)) g(a+\frac{k}{n}(b-a))| < \delta$ (et ce pour tout k): pour l'approximation c_n , cela revient à dire que son saut est borné par δ . On a même mieux, par définition de a, b on a $|c(a) - 0| = |g(a)| < \delta$ et $|c(b) - 0| = |g(b)| < \delta$, donc le saut de la fonction c est bien plus petit que δ .
- 2) On va avoir $D_{\infty}(g,c) < \delta$. Quand $x \notin]a,b[$ on a $|g(x)-c(x)|=|g(x)-0| \le \delta$ comme vu plus haut. Maintenant quand $x \in]a+\frac{k}{n}(b-a), a+\frac{k+1}{n}(b-a)[$, en prenant $y=a+\frac{k}{n}(b-a),$ on a g(y)=c(x) et on a (voir 1.) que $|g(x)-g(y)|<\delta$, i.e (définition de c_n) $|g(x)-c(x)|<\delta$. Et enfin quand $x=a+\frac{k}{n}(b-a)$ pour $k\geq 1$, on a :

$$|g(x) - c(x)| = |g(x) - \left[\frac{1}{2}g(x) + \frac{1}{2}g(x - \frac{b - a}{n})\right]| = \frac{1}{2}|g(x) - g(x - \frac{b - a}{n})| < \frac{\delta}{2} < \delta$$

En effet x et $x - \frac{b-a}{n}$ sont dans l'intervalle $[a + \frac{k-1}{n}(b-a), a + \frac{k}{n}(b-a)]$. Cela conclut la première partie de la démo.

On peut en fait conclure. Par le lemme 1 appliqué à la fonction c, ayant un saut d'au plus δ d'après 1), on peut prendre une fraction rationnelle f telle que $D_{\infty}(c,f) < 2\delta$, ce qui joint à 2) nous donne bien ce qu'il fallait démontrer.

3 Les fractions rationnelles

Une suite $(f_n) \in (\mathbb{R}^{\mathbb{R}})^{\mathbb{N}}$ converge presque partout si $\lim_{n \to +\infty} f_{\varphi(n)}(x)$ est bien définie et existe modulo un nombre fini de réels x. On prendra cette notion de convergence dans la suite.

3.1 Bolzano et équivalents sur les complexes

On aura besoin de ce corollaire de Bolzano-Weierstrass, il être montré en démontrant d'abord que toute suite complexe a au moins une sous-suite qui converge en argument, puis en appliquant une deuxième fois Bolzano-Weierstrass sur le module. La deuxième partie est immédiate par contraposée.

Corollaire 3. Si une suite complexe admet une sous-suite de module borné, alors elle admet une sous-suite convergente. Dans le cas contraire $\lim_{n\to\infty} |z_n| = +\infty$.

Les équivalents en $+\infty$ se manipulent de la même manière pour les complexes que pour les réels.

3.2 Adhérence des fractions rationnelles de degré borné

Soit \mathcal{F} l'ensemble des fractions rationnelles et \mathcal{F}_d celles de degré inférieur ou égal à d. On va démontrer que

Théorème 2 (Adhérence des fractions rationnelles). Si une suite de fractions rationnelles $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à coefficients dans \mathbb{R} dont le degré du numérateur est d_1 et celui du dénominateur d_2 est convergente (sauf en les points d'un ensemble E), alors sa limite est elle-même une fraction rationnelle à coefficients dans \mathbb{R} dont le degré du numérateur est inférieur ou égal à d_1 et celui du dénominateur inférieur ou égal à d_2 .

 $D\acute{e}monstration$. On écrit f_n sous sa forme scindée :

$$f_n = \alpha_n \frac{\prod_{k=0}^{d_1} (x - p_{k,n})}{\prod_{k=0}^{d_2} (x - q_{k,n})}.$$

On a $\alpha_n \in \mathbb{R}$ car la fraction rationnelle est à coefficients réels, mais les racines peuvent être complexes.

On construit une sous-suite convergente. On notera $\varphi_k: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ les fonctions strictement croissantes successives qu'on va construire, où $\varphi_{k+1} = \varphi_k \circ \phi_k$ pour une certaine fonction strictement croissante $\phi_k: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, et on commence avec $\varphi_0: x \to x$. S'il existe m_0 tel que $(p_{m_0,\varphi_0(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite de module bornée alors par le corollaire 3 elle admet une sous-suite $(p_{m_0,\varphi_0(\phi_0(n))})_{n\in\mathbb{N}}$ convergente, et on se restreint désormais aux indices de $\phi_1 = \varphi_0 \circ \phi_0$. Maintenant s'il existe $m_1 \neq m_0$ tel que $(p_{m_1,\varphi_1(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ admette une sous-suite de module borné, alors on introduit de même $\varphi_2(n)$ tel que $(p_{m_1,\varphi_2(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et on note qu'on a toujours $(p_{m_0,\varphi_2(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge toujours car est sous-suite d'une suite convergente. En continuant le processus comme ceci on a s indices $m_0, ..., m_{s-1}$ distincts deux à deux tels que $(p_{m_i,\varphi_s(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent tous. On continue le processus mais cette fois-ci avec les $(q_{m'_i},\varphi_{s'}(n))_{n\in\mathbb{N}}$, où s' > s. A la fin on se retrouve avec les $(p_{m_i,\varphi_{s'}(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q_{m'_i,\varphi_{s'}(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui convergent toutes, tandis que toutes les autres suites de racines n'admettent aucune sous-suite de module borné donc leur module tend vers $+\infty$. On peut donc écrire au final

$$f_{\varphi_{s'}(n)}(x) = \alpha_{\varphi_{s'}(n)} \prod_{\substack{i=0 \\ s'-s-1}} (x - p_{m_i, \varphi_{s'}(n)}) \prod_{\substack{m \neq m_0, \dots, m_s \\ m' \neq m'_0, \dots, m'_{s'}}} (x - p_{m, \varphi_{s'}(n)}) \prod_{\substack{m' \neq m'_0, \dots, m'_{s'-s-1}}} (x - q_{m', \varphi_{s'}(n)})$$

On étudie la limite de cette fonction en sachant qu'elle doit converger. On la sépare en deux parties u_n, v_n où $f_{\varphi_{s'}(n)} = u_n v_n$ et :

$$u_n(x) = \frac{\prod_{i=0}^{s-1} (x - p_{m_i, \varphi_{s'}(n)})}{\prod_{i=0}^{s'-s-1} (x - q_{m'_i, \varphi_{s'}(n)})} \left| v_n(x) = \alpha_{\varphi_{s'}(n)} \frac{\prod_{\substack{m \neq m_0, \dots, m_s \\ m' \neq m'_0, \dots, m'_{s-s'-1}}} (x - p_{m, \varphi_{s'}(n)}) \right|$$

Chaque suite qu'on retrouve dans l'expression de u_n , i.e $(p_{m_i,\varphi_{s'}(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, $(q_{m'_i,\varphi_{s'}(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ pour tout i ont (par construction) une limite pour $n\to\infty$ qu'on va noter respectivement pour chaque i, l_{m_i} pour le suites p et $l_{m'_i}$ pour les suites q (on note que les limites peuvent être dans \mathbb{C}). On a alors par opérations sur les limites :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left(\{l_{m'_i} : i \in [0, s' - s - 1]] \}^e \right), \lim_{n \to \infty} u_n(x) = \frac{\prod_{i=0}^{s-1} (x - l_{m_i})}{\prod_{i=0}^{s' - s - 1} (x - l_{m'_i})}$$

On remarque que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (et est non-nul à un nombre fini de valeurs de x près), or $(f_{\varphi_{s'}(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge par hypothèse donc $v_n = \frac{f_{\varphi_{s'}(n)}}{u_n}$ converge aussi pour $n \to \infty$. Or chaque suite $(p_{m,\varphi_{s'}(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q_{m,\varphi_{s'}(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ apparaissant dans l'expression de v_n sont telles que leur module tend vers l'infini (et de même pour leur opposé), donc x devient négligeable i.e $\forall x \in \mathbb{R} \setminus E, x - p_{m,\varphi_{s'}(n)} \sim p_{m,\varphi_{s'}(n)}$, et enfin par stabilité par produit/quotient de l'équivalence à l'infini on a (on multiplie/divise toutes les équivalences entre elles):

$$\forall x, v_n(x) \underset{n \to \infty}{\sim} \alpha_{\varphi_{s'}(n)} (-1)^{d_1 - s - (d_2 - (s' - s))} \frac{\prod_{m \neq m_0, \dots, m_s} p_{m, \varphi_{s'}(n)}}{\prod_{m' \neq m'_0, \dots, m'_{s' - s - 1}} q_{m', \varphi_{s'}(n)}}$$

Or $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc le membre de droite converge aussi. On note L la limite du membre de droite et on remarque qu'elle ne dépend pas de x. Ainsi, toujours par opération sur les limites pour chaque x on a : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{l_{m'_i} : i \in [0, s' - s - 1]\}, \lim_{n \to \infty} v_n(x) = L$. Finalement on a bien, par opérations sur les limites, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{l_{m'_i} : i \in [0, s' - s - 1]\},$

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} f_{\varphi_{d_1 + d_2}(n)}(x) = \lim_{n \to \infty} v_n(x) u_n(x) = L \frac{\prod_{i=0}^{s-1} (x - l_{m_i})}{\prod_{i=0}^{s'-s-1} (x - l_{m'_i})}$$

La limite est donc une fraction rationnelle avec le degré du numérateur $s \leq d_1$ et celui du dénominateur $s' - s \leq d_2$ (c'est évident par construction car on n'a que retiré des facteurs au possible). Il est de plus clair qu'une suite de fractions rationnelles à valeur dans \mathbb{R} ne peut que tendre vers une fonction à valeur dans \mathbb{R} , donc la fraction rationnelle limite est bien à valeur dans \mathbb{R} .

Et enfin vu qu'elle est à valeur dans \mathbb{R} , elle est en fait aussi bien à coefficients dans \mathbb{R} . En effet, elle est au moins à coefficients dans \mathbb{C} au vu de la limite au dessus, et on peut donc écrire la fraction rationnelle f sous la forme $\frac{P+iQ}{P'+iQ'}$ avec $P,Q,P',Q'\in\mathbb{R}[X]$ (en séparant les parties réelles et imaginaires des coefficients). Cette dernière fraction est égale $\frac{(P+iQ)(P'-iQ')}{(P'+iQ')(P'-iQ')} = \frac{PP'+QQ'+i(QP'-Q'P)}{P'^2+Q'^2}$. Donc $\mathrm{Re}(f) = \frac{PP'+QQ'}{P'^2+Q'^2}$ et $\mathrm{Im}(f) = \frac{QP'-Q'P}{P'^2+Q'^2}$ car ces dernières expressions sont bien des fractions rationnelles à coefficient dans \mathbb{R} . Or f est à valeur dans \mathbb{R} donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \mathrm{Re}(f)(x)$, ce qui implique par rigidité $f = \frac{PP'+QQ'}{P'^2+Q'^2}$ qui est bien à coefficients réels. \square

En particulier si dans une suite (f_n) le degré (a,b) est borné, on en extrait une sous-suite de degré fixé et le même résultat s'applique, son adhérence est elle même. Un corollaire immédiat de ceci est que la fonction créneau n'est pas approximable par une suite de fractions rationnelles. On propose une autre démonstration.

Lemme 4. Soit P un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ unitaire de degré n, et n+1 nombres complexes $x_1, ..., x_{n+1}$ distincts. Alors

$$\max\{|P(x_i)|: i \in [\![1,n]\!]\} \geq \left(\min\left\{\frac{1}{2}|x_i-x_j|: i \neq j\right\}\right)^n.$$

 $\begin{array}{l} \textit{D\'{e}monstration.} \text{ On note } d = \min \left\{ \frac{1}{2} |x_i - x_j| : i \neq j \right\} \text{ (c'est la borne de l'\'{e}nonc\'{e}). Pour tout } r \in \mathbb{C}, \text{ si } |r - x_i| < D \\ \text{pour un certain } i, \text{ alors pour tout } j \text{ on a } |r - x_j| > d. \text{ En effet par l'in\'{e}galit\'{e} triangulaire } |x_i - r| + |r - x_j| \geq |x_i - x_j| \geq 2D, \text{ or } |x_i - r| + |r - x_j| < d + |r - x_j| \text{ donc } 2d < |r - x_j| + d \text{ c'est \`{a} dire } |r - x_j| > d. \\ \text{On note } (r_j)_{j \in [\![1,n]\!]} \text{ les racines (non-n\'{e}cessairement distinctes) de } P. \text{ On consid\`ere l'ensemble } E = \{(i,j): 1 \} \\ \text{On the pour la considére l'ensemble } E = \{(i,j): 1 \} \\ \text{On considére l'ensemble }$

On note $(r_j)_{j \in [\![1,n]\!]}$ les racines (non-nécessairement distinctes) de P. On considère l'ensemble $E = \{(i,j) : |x_i - r_j| < d\}$. Pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, on a démontré qu'il existe au plus un $i \in [\![1,n+1]\!]$ tel que $|x_i - r_j| < d$, or il y a au plus n valeurs de j possibles donc $|E| \le n$. Mais on a aussi n+1 valeurs de i possibles, donc par le principe des tiroirs il existe un i_0 qui n'apparaît jamais dans E, c'est-à-dire $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $(i_0,j) \notin E$. Autrement

dit, $\forall j |x_{i_0} - r_j| \geq D$. Il en résulte que

$$\max\{|P(x_i)|: i \in [1, n]\} \ge |P(x_{i_0})| = \prod_{j=1}^n |x_{i_0} - r_j| \ge \prod_{j=1}^n d = d^n.$$

Pour les polynômes dans $\mathbb{R}[X]$ on a en fait un résultat plus fort qu'on ne va pas complètement expliciter ici, car il ne nous est pas utile. En fait si on a des racines réelles $x_1 < x_2 < ... < x_m$, alors le produit $\prod_{k=1}^m (x-x_i)$ sera gros car on a : $x - x_i = x - x_j + \sum_{k=i}^{j-1} |x_{k+1} - x_k| \ge x - x_j + (j-i) \min\{|x_u - x_v| : u \ne v\}$, et donc on peut probablement obtenir un facteur pour la borne inférieure qui ressemble à $\left(\frac{n}{2}\right)$!. En prenant en compte que chaque racine du polynôme va de paire avec son conjugué, on doit pouvoir obtenir un résultat similaire.

Corollaire 4. Soit f une fraction rationnelle non-nulle de coefficient dominant α où les racines du dénominateur ont un module borné par R > 0, de degré de numérateur a et de degré de dénominateur $b \ge 1$. Soient $m \ge a + b + 1$ complexes distincts qu'on nomme $x_1, ..., x_m$, alors il existe i tel que

$$|f(x_i)| \ge |\alpha| \frac{\min\{|x_i - x_j| : i \ne j\}^a}{2^a(|x_i| + R)^b}.$$

Démonstration. Le dénominateur admet au plus b racines, donc parmi les a+b+1 complexes il y en au moins a+1 pour lesquels la fraction est bien définie. On a a+1 complexes pour a racines donc on applique le lemme 4 pour trouver une borne pour le numérateur pour un certain x_i . Ensuite on réécrit en extrayant le $\frac{1}{2}$, et pour le dénominateur on a pour chacun de ses facteurs $|x_i-r_j| \leq |x_i|+|r_j| \leq |x_j|+R$ donc il est majoré par $(|x_i|+R)^b$, ce qui minore le module de $|f(x_i)|$.

Théorème 3 (Non-approximabilité quantitative de la fonction créneau.). Fixons m=a+b+1 réels x_1,\ldots,x_m distincts dans]0,1[. Soit f une fraction rationnelle de numérateur P, qui a pour degré $a\geq 1$ pour coefficients $(c_i)_{i\in [0,a]}$, et de dénominateur Q (et de coefficients $(d_i)_{i\in [0,b]}$ de degré b>a. Alors il existe $x_p\in]0,1[$ tel que

$$|f(x_p) - e(x_p)| \ge \frac{\min\{|x_i - x_j| : i \ne j\}^a}{2^a(|x_p| + R)^b}.$$

Il en découle que e n'est pas approximable par des fractions rationnelles.

Démonstration. Vu que $e(y_p)=0$ la seconde partie résulte de la première. On a $\forall i \leq a+b+1, |f(x_i)-e(x_i)|=|f(x_i)-1|$ et $f-1=\frac{P-Q}{Q}$ est une fraction rationnelle de coefficient dominant $\frac{-d_b}{d_b}=-1$ (car a < b). Donc compte tenu des a+b+1 nombres dans cet intervalle, le corollaire 4 nous donne p tel que :

$$|f(x_p) - e(x_p)| \ge |-1| \frac{\min\{|x_i - x_j| : i \ne j\}^a}{2^a(|x_p| + R)^b}$$

Supposons alors par l'absurde que (f_n) est une suite de fractions de degré (a,b) et de racines du dénominateur de module borné par R, qui tend presque-partout vers e (si $\mathbb{R} \to +\infty$ alors il est clair que f_n tendra vers une constante et contradiction). Si on fixe $x_1, ..., x_{a+b+1}$ nombres dans]0,1[, et si b>a alors d'après 3 il existe p tel que $|f_{\varphi(n)}(x_p) - e(x_p)| \geq \frac{\min\{|x_i - x_j|: i \neq j\}^a}{2^a(|x_p| + R)^b}$ pour une certaine sous-suite de (f_n) (il y a un x_i par n, mais il y a un nombre fini de x_i , donc c'est juste par le principe des tiroirs infini), donc on ne peut pas avoir $\lim_{n \to +\infty} |f_{\varphi(n)}(x_p) - e(x_p)| = 0$, contradiction. Si $a \geq b$ alors $f_n = p_n + \frac{R_n}{Q_n}$ où p_n est polynomiale et deg $R_n < \deg Q_n$, et on doit clairement avoir $\forall x \geq 1, \lim_{n \to +\infty} p_n(x) = 0$ car de même $\frac{R_n}{Q_n} \to 0$, donc par rigidité $p_n \to 0$ le polynôme nul, et on doit avoir par opérations sur les limites $\frac{R_n}{Q_n} \to e$, qu'on sait impossible par ci-dessus.

4 Autres questionnements

La proposition 2 nous explique que les fractions rationnelles de degré borné sont stables "par limite" à l'exception d'un nombre fini de points. En fait, si $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\lim_{a \to +\infty} \frac{a}{(ax)^2 + 1} = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ +\infty & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

En effet, si $x \neq 0$, on a $\frac{a}{(ax)^2+1} \sim \frac{a}{a^2} = \frac{1}{a}$, donc ç a tend bien vers 0. Mais si x = 0 alors $\frac{a}{(ax)^2+1} = a$ et tend bien vers $+\infty$. On remarque bien que la fonction tend vers la fraction rationnelle $\frac{0}{1}$, sauf en le point x = 0. On a en fait le théorème suivant plus général :

Proposition 5. Soit $f = \frac{P}{Q}$ (avec P non-nul) une fraction rationnelle de degré a au numérateur, b au dénominateur, et de racines <u>distinctes</u> au dénominateur $(q_i)_{i \in [\![1,b]\!]}$. Soit une suite $(a_i)_{i \in [\![1,b]\!]}$ à b éléments dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Alors il existe une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de fractions rationnelles de degré de numérateur a + b et de degré de dénominateur 2b, telle que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{q_i : i \in [\![1,b]\!]\}, \lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)$ et $\forall i, \lim_{n \to +\infty} f_n(q_i) = a_i$.

Démonstration. On va trouver une suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de fractions rationnelles (de degré de numérateur b et de dénominateur 2b) telles que $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{q_i:i\in[\![1,b]\!]\},\lim_{x\to\infty}g_n(x)=\frac{1}{Q(x)}$ et $\forall i,\lim_{x\to\infty}g_n(q_i)=a_i$, ce qui nous permettra de conclure en prenant $f_n=Pg_n$. Pour cela on prend

$$g_n = \frac{(x - p_{1,n})(x - p_{2,n})...(x - p_{b,n})}{(x - q_{1,n})^2(x - q_{2,n})^2...(x - q_{b,n})^2}$$

Avec l'idée que $\forall i, \lim_{n \to +\infty} p_{i,n} = \lim_{n \to +\infty} q_{i,n} = q_i$ et donc que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{q_i : i \in [\![1,b]\!]\}, g_n(x) = \frac{Q(x)}{Q(x)^2} = \frac{1}{Q(x)}$. Il faut maintenant choisir les bonnes "vitesses de convergence" et expliciter les suites pour avoir les bonnes valeurs au niveau des singularités. On notera Q_i le polynôme $Q_i = \frac{Q}{x-q_i}$, de telle faç on à ce que $Q_i(q_i) \neq 0$, donc que $\frac{1}{Q_i(q_i)}$ soit bien défini (les racines étant distinctes). On étudie alors ce qui se passe quand $x = q_i$.

$$g_n(q_i) = \frac{(q_i - p_{1,n})(q_i - p_{2,n})...(q_i - p_{b,n})}{(q_i - q_{1,n})^2(q_i - q_{2,n})^2...(q_i - q_{b,n})^2} = \frac{q_i - p_{i,n}}{(q_i - q_{i,n})^2} \frac{\prod_{k=1, k \neq i}^b (q_i - p_{k,n})}{\left(\prod_{k=1, k \neq i}^b (q_i - q_{k,n})\right)^2}$$

En particulier par produit des des limites on a :

$$\lim_{n \to +\infty} g_n(q_i) = \left(\lim_{n \to +\infty} \frac{q_i - p_{i,n}}{(q_i - q_{i,n})^2}\right) \frac{Q_i(q_i)}{Q_i(q_i)^2} = \frac{1}{Q_i(q_i)} \lim_{n \to +\infty} \frac{q_i - p_{i,n}}{(q_i - q_{i,n})^2}$$

C'est-à-dire qu'il suffit que

$$a_i Q_i(q_i) = \lim_{n \to +\infty} \frac{q_i - p_{i,n}}{(q_i - q_{i,n})^2}$$

Si a_i est un réel on peut obtenir cette limite. Pour ç a on pose $p_{i,n}=q_i-\frac{a_iQ_i(q_i)}{n^2}$ et $q_{i,n}=q_i-\frac{1}{n}$. On a bien $\lim_{n\to+\infty}p_{i,n}=\lim_{n\to+\infty}q_{i,n}=q_i$, et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{q_i - p_{i,n}}{(q_i - q_{i,n})^2} = \lim_{n \to +\infty} \frac{q_i - \left(q_i - \frac{a_i Q_i(q_i)}{n^2}\right)}{\left(q_i - \left(q_i - \frac{1}{n}\right)^2\right)} = \frac{\frac{a_i Q_i(q_i)}{n^2}}{\left(\frac{1}{n}\right)^2} = a_i Q_i(q_i)$$

En particulier, la limite du terme de gauche est bien $a_iQ_i(q_i)$. Pour le cas où $a_i=+\infty$, on peut prendre $p_{i,n}=q_i-\frac{1}{n}$ et $q_{i,n}=q_i-\frac{1}{n}$ par exemple, on aura alors $\frac{q_i-p_{i,n}}{(q_i-q_{i,n})^2}=\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}}=n$ qui tend bien vers $+\infty=+\infty Q_i(q_i)$, et pour $a_i=-\infty$ la même mais avec $q_{i,n}=q_i+\frac{1}{n}$, le quotient fera -n. En fait on remarque que toutes les limites précédentes dans la démonstration sont bien vérifiées ; on vérifie bien l'énoncé avec cette construction des $(p_{i,n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et des $(q_{i,n})_{n\in\mathbb{N}^*}$. Ce qui conclut!

Quelques notes sur ce théorème.

Note 1: la démonstration ci-dessus n'est pas tout à fait correcte car g_n n'est pas bien défini pour tout x (les racines au dénominateur empêche ç a), mais on peut aisément voir qu'on peut prendre la limite à partir d'un certain rang N où ce sera bien défini et on sera bon (on a le même problème dans la section 3).

Note 2: pour le cas où Q peut avoir des racines multiples, la démonstration est probablement assez aisément apdatable, il suffit de les grouper en terme de la forme $(x-p_{i,b'})^{\alpha}$ (où b' est le degré compté sans les multiplicités), poser $Q_i = \frac{Q}{(x-q_i)^{\alpha}}$, et contrôler un peu différemment le quotient selon α .

On peut en fait aller un peu plus loin comme le théorème 4. Comme on a vu la suite $l_n(x) = \frac{n}{(nx)^2+1}$ de fractions rationnelles tend vers 0 partout sauf en x=0 où elle tend vers $+\infty$. On peut aussi considérer la suite $m_n(x) = \frac{1}{(nx)^2+1}$ qui cette-fois-ci tend partout vers 0 sauf en x=0 où elle tend vers 1. Ainsi en sommant des translations/agrandissements/réductions de l_n et m_n , on peut obtenir des suites de fractions rationnelles de degré borné qui tendent vers 0 partout sauf en un nombre fini de points où on choisit la valeur qu'ils doivent prendre à la limite (dont $+\infty$ et $-\infty$). On peut ensuite, si on le souhaite, ajouter cette suite à une suite de fractions rationnelles, et donc obtenir des discontinuités en d'autres points que seulement les singularités : on peut toujours contrôler la valeur d'un nombre de fini de points de la limite, et ce quelques soient ces points.