Produits en cohomologie L^p et pincement de la courbure

P. Pansu

5 octobre 2009

Remarque

Les espaces symétriques de rang un non compacts sont les espaces hyperboliques réels $H^n_{\mathbb{R}}$*, complexes* $H^m_{\mathbb{C}}$*, quaternionniens* $H^m_{\mathbb{H}}$*, et le plan hyperbolique sur les octonions* $H^2_{\mathbb{O}}$*. L'espace hyperbolique réel à une courbure sectionnelle constante* -1*. Les autres espaces symétriques de rang un sont* $-\frac{1}{4}$-pincés, *i.e. leur courbure sectionnelle varie entre* -1 *et* $-\frac{1}{4}$.

Remarque

Les espaces symétriques de rang un non compacts sont les espaces hyperboliques réels $H^n_{\mathbb{R}}$, complexes $H^m_{\mathbb{C}}$, quaternionniens $H^m_{\mathbb{H}}$, et le plan hyperbolique sur les octonions $H^2_{\mathbb{O}}$. L'espace hyperbolique réel à une courbure sectionnelle constante -1. Les autres espaces symétriques de rang un sont $-\frac{1}{4}$-pincés, *i.e. leur courbure sectionnelle varie entre -1 et $-\frac{1}{4}$.*

Définition

Le pincement optimal *$\delta(M)$ d'une variété riemannienne M est le plus petit $\delta \geq -1$ tel que M possède une métrique riemannienne équivalente à courbure sectionnelle δ-pincée.*

Remarque

Les espaces symétriques de rang un non compacts sont les espaces hyperboliques réels $H^n_{\mathbb{R}}$, complexes $H^m_{\mathbb{C}}$, quaternionniens $H^m_{\mathbb{H}}$, et le plan hyperbolique sur les octonions $H^2_{\mathbb{O}}$. L'espace hyperbolique réel à une courbure sectionnelle constante -1. Les autres espaces symétriques de rang un sont $-\frac{1}{4}$-pincés, *i.e. leur courbure sectionnelle varie entre -1 et $-\frac{1}{4}$.*

Définition

Le pincement optimal *$\delta(M)$ d'une variété riemannienne M est le plus petit $\delta \geq -1$ tel que M possède une métrique riemannienne équivalente à courbure sectionnelle δ-pincée.*

Question

Est-il vrai que le pincement optimal de $H^m_{\mathbb{C}}$, $H^m_{\mathbb{H}}$ $(m \geq 2)$ et $H^2_{\mathbb{O}}$ vaut $-\frac{1}{4}$?

Remarque

*Les espaces symétriques de rang un non compacts sont les espaces hyperboliques réels $H^n_{\mathbb{R}}$, complexes $H^m_{\mathbb{C}}$, quaternionniens $H^m_{\mathbb{H}}$, et le plan hyperbolique sur les octonions $H^2_{\mathbb{O}}$. L'espace hyperbolique réel à une courbure sectionnelle constante -1. Les autres espaces symétriques de rang un sont $-\frac{1}{4}$-*pincés*, i.e. leur courbure sectionnelle varie entre -1 et $-\frac{1}{4}$.*

Définition

Le pincement optimal *$\delta(M)$ d'une variété riemannienne M est le plus petit $\delta \geq -1$ tel que M possède une métrique riemannienne équivalente à courbure sectionnelle δ-pincée.*

Question

Est-il vrai que le pincement optimal de $H^m_{\mathbb{C}}$, $H^m_{\mathbb{H}}$ ($m \geq 2$) et $H^2_{\mathbb{O}}$ vaut $-\frac{1}{4}$?

Théorème

Le pincement optimal de $H^2_{\mathbb{C}}$ vaut $-\frac{1}{4}$.

Définition

Soit M une variété riemannienne. Soit $p > 1$. La cohomologie L^p *de M est la cohomologie du complexe des formes différentielles L^p sur M dont la différentielle est à nouveau L^p,*

$$H^{k,p} \quad = \quad k\text{-}\mathit{formes\ ferm\acute{e}es}\ L^p/d((k-1)\text{-}\mathit{formes}\ L^p),$$

Définition

Soit M une variété riemannienne. Soit $p > 1$. La cohomologie L^p *de M est la cohomologie du complexe des formes différentielles L^p sur M dont la différentielle est à nouveau L^p,*

$$
\begin{aligned}
H^{k,p} &= k\text{-}\mathit{formes\ ferm\acute{e}es}\ L^p / d((k-1)\text{-}\mathit{formes}\ L^p),\\
R^{k,p} &= k\text{-}\mathit{formes\ ferm\acute{e}es}\ L^p / \mathit{adh\acute{e}rence\ de}\ d((k-1)\text{-}\mathit{formes}\ L^p),\\
T^{k,p} &= \mathit{adh\acute{e}rence\ de}\ d((k-1)\text{-}\mathit{formes}\ L^p) / d((k-1)\text{-}\mathit{formes}\ L^p).
\end{aligned}
$$

$R^{k,p}$ s'appelle la cohomologie réduite*. $T^{k,p}$ s'appelle la* torsion*.*

Définition

Soit M une variété riemannienne. Soit $p > 1$. La cohomologie L^p *de M est la cohomologie du complexe des formes différentielles L^p sur M dont la différentielle est à nouveau L^p,*

$$
\begin{aligned}
H^{k,p} &= k\text{-formes fermées } L^p / d((k-1)\text{-formes } L^p),\\
R^{k,p} &= k\text{-formes fermées } L^p / \text{adhérence de } d((k-1)\text{-formes } L^p),\\
T^{k,p} &= \text{adhérence de } d((k-1)\text{-formes } L^p)/d((k-1)\text{-formes } L^p).
\end{aligned}
$$

$R^{k,p}$ *s'appelle la* cohomologie réduite. $T^{k,p}$ *s'appelle la* torsion.

Proposition

(Gromov). *La cohomologie L^p est un invariant de quasiisométrie des variétés riemanniennes à géométrie bornée et uniformément acycliques.*

Définition

Soit M une variété riemannienne. Soit $p > 1$. La cohomologie L^p *de M est la cohomologie du complexe des formes différentielles L^p sur M dont la différentielle est à nouveau L^p,*

$$\begin{aligned} H^{k,p} &= k\text{-formes fermées } L^p / d((k-1)\text{-formes } L^p), \\ R^{k,p} &= k\text{-formes fermées } L^p / \text{adhérence de } d((k-1)\text{-formes } L^p), \\ T^{k,p} &= \text{adhérence de } d((k-1)\text{-formes } L^p) / d((k-1)\text{-formes } L^p). \end{aligned}$$

$R^{k,p}$ s'appelle la cohomologie réduite*. $T^{k,p}$ s'appelle la* torsion.

Proposition

(Gromov). *La cohomologie L^p est un invariant de quasiisométrie des variétés riemanniennes à géométrie bornée et uniformément acycliques.*

Proposition

Le produit extérieur des formes différentielles définit un cup-produit $\smile : H^{k,q}(M) \times H^{\ell,r}(M) \to H^{k+\ell,p}(M)$ dès que $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$. C'est aussi un invariant de quasiisométrie des variétés riemanniennes à géométrie bornée et uniformément acycliques.

Example : la droite réelle $\mathbb{R}$

$H^{0,p} = 0.$

Example : la droite réelle $\mathbb{R}$

$H^{0,p} = 0.$

$R^{1,p} = 0,$

Example : la droite réelle $\mathbb{R}$

$H^{0,p} = 0$.

$R^{1,p} = 0$,
car toute fonction $L^p(\mathbb{R})$ peut être approchée dans L^p par la dérivée d'une fonction à support compact. Donc $H^{1,p}$ est entièrement de torsion.

Example : la droite réelle $\mathbb{R}$

$H^{0,p} = 0$.

$R^{1,p} = 0$,
car toute fonction $L^p(\mathbb{R})$ peut être approchée dans L^p par la dérivée d'une fonction à support compact. Donc $H^{1,p}$ est entièrement de torsion.

$T^{1,p}$ est non nul et donc de dimension infinie.

Example : la droite réelle $\mathbb{R}$

$H^{0,p} = 0.$

$R^{1,p} = 0,$
car toute fonction $L^p(\mathbb{R})$ peut être approchée dans L^p par la dérivée d'une fonction à support compact. Donc $H^{1,p}$ est entièrement de torsion.

$T^{1,p}$ est non nul et donc de dimension infinie.
En effet, la 1-forme $\frac{dt}{t}$ tronquée près de l'origine) est L^p pour tout $p > 1$ mais ce n'estpas la différentielle d'une fonction L^p.

Exemple : le plan hyperbolique réel $H^2_{\mathbb{R}}$

Ici, $H^{0,p} = 0 = H^{2,p}$ pour tout $p > 1$.

Exemple : le plan hyperbolique réel $H^2_{\mathbb{R}}$

Ici, $H^{0,p} = 0 = H^{2,p}$ pour tout $p > 1$.
Si $p = 2$, comme le laplacien est borné inférieurement sur les fonctions L^2, $T^{1,2} = 0$.

$$H^{1,2} = R^{1,2}$$

Exemple : le plan hyperbolique réel $H^2_{\mathbb{R}}$

Ici, $H^{0,p} = 0 = H^{2,p}$ pour tout $p > 1$.
Si $p = 2$, comme le laplacien est borné inférieurement sur les fonctions L^2, $T^{1,2} = 0$.

$$\begin{aligned} H^{1,2} &= R^{1,2} \\ &= \{\text{1-formes harmoniques } L^2\} \end{aligned}$$

Exemple : le plan hyperbolique réel $H^2_{\mathbb{R}}$

Ici, $H^{0,p} = 0 = H^{2,p}$ pour tout $p > 1$.
Si $p = 2$, comme le laplacien est borné inférieurement sur les fonctions L^2, $T^{1,2} = 0$.

$$\begin{aligned} H^{1,2} &= R^{1,2} \\ &= \{\text{1-formes harmoniques } L^2\} \\ &= \{\text{fonctions harmoniques } h \text{ sur } H^2_{\mathbb{R}} \text{ telles que } \nabla h \in L^2\}/\mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

Exemple : le plan hyperbolique réel $H^2_{\mathbb{R}}$

Ici, $H^{0,p} = 0 = H^{2,p}$ pour tout $p > 1$.
Si $p = 2$, comme le laplacien est borné inférieurement sur les fonctions L^2, $T^{1,2} = 0$.

$$\begin{aligned} H^{1,2} &= R^{1,2} \\ &= \{\text{1-formes harmoniques } L^2\} \\ &= \{\text{fonctions harmoniques } h \text{ sur } H^2_{\mathbb{R}} \text{ telles que } \nabla h \in L^2\}/\mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

Par invariance conforme, on remplace la métrique hyperbolique par la métrique euclidienne qur le disque D.

$$H^{1,2} = \{\text{fonctions harmoniques } h \text{ sur } D \text{ telles que } \nabla h \in L^2\}/\mathbb{R}$$

Exemple : le plan hyperbolique réel $H^2_{\mathbb{R}}$

Ici, $H^{0,p} = 0 = H^{2,p}$ pour tout $p > 1$.
Si $p = 2$, comme le laplacien est borné inférieurement sur les fonctions L^2, $T^{1,2} = 0$.

$$\begin{aligned} H^{1,2} &= R^{1,2} \\ &= \{\text{1-formes harmoniques } L^2\} \\ &= \{\text{fonctions harmoniques } h \text{ sur } H^2_{\mathbb{R}} \text{ telles que } \nabla h \in L^2\}/\mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

Par invariance conforme, on remplace la métrique hyperbolique par la métrique euclidienne qur le disque D.

$$\begin{aligned} H^{1,2} &= \{\text{fonctions harmoniques } h \text{ sur } D \text{ telles que } \nabla h \in L^2\}/\mathbb{R} \\ &= \{\text{séries de Fourier } \Sigma a_n e^{in\theta} \text{ telles que } a_0 = 0, \Sigma |n|\,|a_n|^2 < +\infty\}, \end{aligned}$$

Exemple : le plan hyperbolique réel $H^2_{\mathbb{R}}$

Ici, $H^{0,p} = 0 = H^{2,p}$ pour tout $p > 1$.
Si $p = 2$, comme le laplacien est borné inférieurement sur les fonctions L^2, $T^{1,2} = 0$.

$$\begin{aligned} H^{1,2} &= R^{1,2} \\ &= \{\text{1-formes harmoniques } L^2\} \\ &= \{\text{fonctions harmoniques } h \text{ sur } H^2_{\mathbb{R}} \text{ telles que } \nabla h \in L^2\}/\mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

Par invariance conforme, on remplace la métrique hyperbolique par la métrique euclidienne qur le disque D.

$$\begin{aligned} H^{1,2} &= \{\text{fonctions harmoniques } h \text{ sur } D \text{ telles que } \nabla h \in L^2\}/\mathbb{R} \\ &= \{\text{séries de Fourier } \Sigma a_n e^{in\theta} \text{ telles que } a_0 = 0, \Sigma |n|\,|a_n|^2 < +\infty\}, \end{aligned}$$

c'est l'espace de Sobolev $H^{1/2}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ mod constantes.

Exemple : le plan hyperbolique réel $H^2_{\mathbb{R}}$

Ici, $H^{0,p} = 0 = H^{2,p}$ pour tout $p > 1$.
Si $p = 2$, comme le laplacien est borné inférieurement sur les fonctions L^2, $T^{1,2} = 0$.

$$\begin{aligned} H^{1,2} &= R^{1,2} \\ &= \{\text{1-formes harmoniques } L^2\} \\ &= \{\text{fonctions harmoniques } h \text{ sur } H^2_{\mathbb{R}} \text{ telles que } \nabla h \in L^2\}/\mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

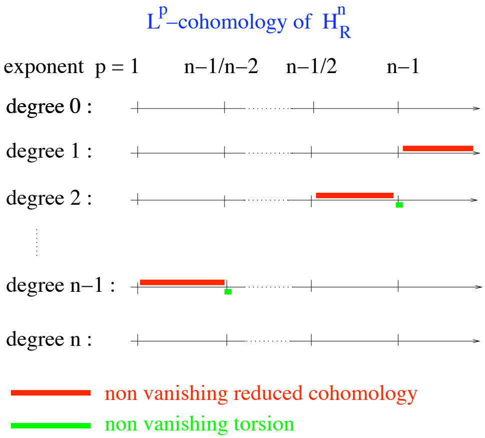
Par invariance conforme, on remplace la métrique hyperbolique par la métrique euclidienne qur le disque D.

$$\begin{aligned} H^{1,2} &= \{\text{fonctions harmoniques } h \text{ sur } D \text{ telles que } \nabla h \in L^2\}/\mathbb{R} \\ &= \{\text{séries de Fourier } \Sigma a_n e^{in\theta} \text{ telles que } a_0 = 0, \Sigma |n|\,|a_n|^2 < +\infty\}, \end{aligned}$$

c'est l'espace de Sobolev $H^{1/2}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ mod constantes.

Plus généralement, pour $p > 1$, $T^{1,p} = 0$ et $H^{1,p}$ est égal à l'espace de Besov $B^{1/p}_{p,p}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ mod constantes.

Cohomologie L^p des espaces hyperboliques réels



Torsion L^p et pincement

Théorème

Si M^n est simplement connexe et δ-pincée, $\delta \in [-1, 0)$, alors

$$p < 1 + \frac{n-k}{k-1}\sqrt{-\delta} \quad \Rightarrow \quad T^{k,p}(M) = 0.$$

Torsion L^p et pincement

Théorème

Si M^n est simplement connexe et δ-pincée, $\delta \in [-1, 0)$, alors

$$p < 1 + \frac{n-k}{k-1}\sqrt{-\delta} \quad \Rightarrow \quad T^{k,p}(M) = 0.$$

C'est optimal. En effet, le produit semi-direct $G = \mathbb{R}^3 \rtimes_\alpha \mathbb{R}$ où $\alpha = diag(1, 1, 2)$,

- admet une métrique riemannienne invariante à gauche $-\frac{1}{4}$-pincée, donc $\delta(G) \leq -\frac{1}{4}$.
- satisfait $T^{2,p}(G) \neq 0$ pour $2 < p \leq 4$, donc $\delta(G) = -\frac{1}{4}$.

Théorème

Si M^n est simplement connexe et δ-pincée, $\delta \in [-1, 0)$, alors

$$p < 1 + \frac{n-k}{k-1}\sqrt{-\delta} \quad \Rightarrow \quad T^{k,p}(M) = 0.$$

C'est optimal. En effet, le produit semi-direct $G = \mathbb{R}^3 \rtimes_\alpha \mathbb{R}$ où $\alpha = diag(1, 1, 2)$,

- admet une métrique riemannienne invariante à gauche $-\frac{1}{4}$-pincée, donc $\delta(G) \leq -\frac{1}{4}$.
- satisfait $T^{2,p}(G) \neq 0$ pour $2 < p \leq 4$, donc $\delta(G) = -\frac{1}{4}$.

Remarque

Le plan hyperbolique complexe $H^2_{\mathbb{C}}$ est isométrique à $G' = Heis^3 \rtimes_\alpha \mathbb{R}$ où $\alpha = diag(1, 1, 2)$ et Heis est le groupe d'Heisenberg. Il a l'air très proche de G.

Torsion L^p et pincement

Théorème

Si M^n est simplement connexe et δ-pincée, $\delta \in [-1, 0)$, alors

$$p < 1 + \frac{n-k}{k-1}\sqrt{-\delta} \quad \Rightarrow \quad T^{k,p}(M) = 0.$$

C'est optimal. En effet, le produit semi-direct $G = \mathbb{R}^3 \rtimes_\alpha \mathbb{R}$ où $\alpha = diag(1,1,2)$,

- admet une métrique riemannienne invariante à gauche $-\frac{1}{4}$-pincée, donc $\delta(G) \leq -\frac{1}{4}$.
- satisfait $T^{2,p}(G) \neq 0$ pour $2 < p \leq 4$, donc $\delta(G) = -\frac{1}{4}$.

Remarque

Le plan hyperbolique complexe $H^2_{\mathbb{C}}$ est isométrique à $G' = Heis^3 \rtimes_\alpha \mathbb{R}$ où $\alpha = diag(1,1,2)$ et Heis est le groupe d'Heisenberg. Il a l'air très proche de G.

Théorème

$T^{2,p}(H^2_{\mathbb{C}}) = 0$ *pour* $2 < p < 4$.

Preuve du théorème de comparaison pour la torsion

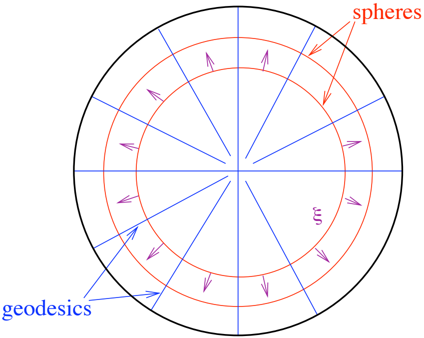
1ère étape. *Lorsque p est assez grand, les formes fermées L^p possèdent des valeurs au bord.*

1ère étape. *Lorsque p est assez grand, les formes fermées L^p possèdent des valeurs au bord.*
On utilise le champ de vecteurs radial $\xi = \frac{\partial}{\partial r}$ en coordonnées polaires et son flot ϕ_t, dont la différentielle est contrôlée par la courbure sectionnelle.

Puis la formule d'homotopie de Poincaré :
Si α est une k-forme L^p,

$$\phi_t^* \alpha = \alpha + d\left(\int_0^t \phi_s^* \iota_\xi \alpha \, ds\right)$$

a une limite lorsque $t \to +\infty$ sous les hypothèses du théorème.



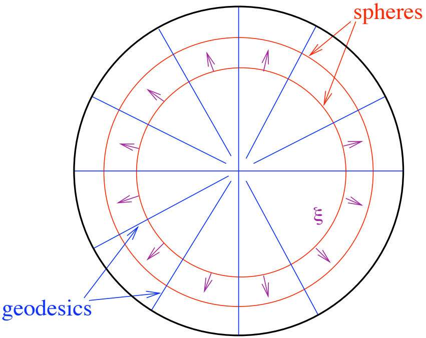
1ère étape. *Lorsque p est assez grand, les formes fermées L^p possèdent des valeurs au bord.*

On utilise le champ de vecteurs radial $\xi = \frac{\partial}{\partial r}$ en coordonnées polaires et son flot ϕ_t, dont la différentielle est contrôlée par la courbure sectionnelle.

Puis la formule d'homotopie de Poincaré :
Si α est une k-forme L^p,

$$\phi_t^* \alpha = \alpha + d \left(\int_0^t \phi_s^* \iota_\xi \alpha \, ds \right)$$

a une limite lorsque $t \to +\infty$ sous les hypothèses du théorème.



2ème étape. *La valeur au bord détermine la classe de cohomologie.*

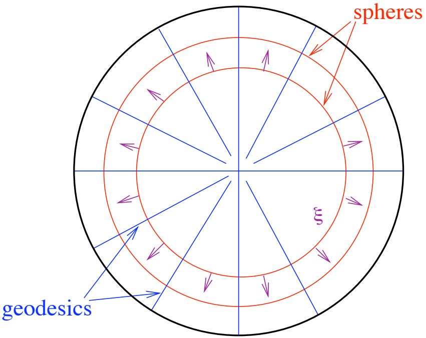
Preuve du théorème de comparaison pour la torsion

1ère étape. *Lorsque p est assez grand, les formes fermées L^p possèdent des valeurs au bord.*
On utilise le champ de vecteurs radial $\xi = \frac{\partial}{\partial r}$ en coordonnées polaires et son flot ϕ_t, dont la différentielle est contrôlée par la courbure sectionnelle.

Puis la formule d'homotopie de Poincaré :
Si α est une k-forme L^p,

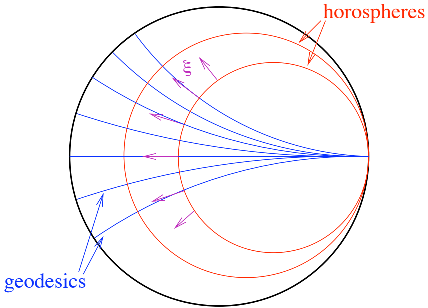
$$\phi_t^* \alpha = \alpha + d \left(\int_0^t \phi_s^* \iota_\xi \alpha \, ds \right)$$

a une limite lorsque $t \to +\infty$ sous les hypothèses du théorème.



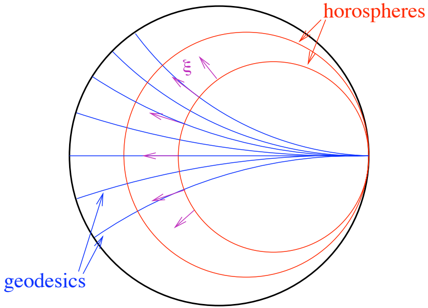
2ème étape. *La valeur au bord détermine la classe de cohomologie.*
L'application valeur au bord injecte $H^{k,p}$ dans un espace fonctionnel de formes différentielles fermées sur la bord à l'infini, cela prouve que $H^{k,p}$ est séparé.

On change de point de vue, on utilise les coordonnées horosphériques.



Annulation de la torsion pour $H^2_{\mathbb{C}}$

On change de point de vue, on utilise les coordonnées horosphériques. On voit $H^2_{\mathbb{C}}$ comme un produit $Heis \times \mathbb{R}$. On prouve une formule de Künneth.



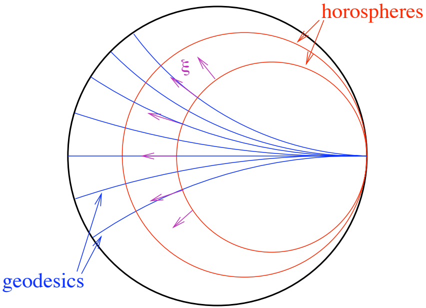
Annulation de la torsion pour $H^2_{\mathbb{C}}$

On change de point de vue, on utilise les coordonnées horosphériques. On voit $H^2_{\mathbb{C}}$ comme un produit $Heis \times \mathbb{R}$. On prouve une formule de Künneth.

1ère étape. Pour $p \notin \{4/3, 2, 4\}$, les formes différentielles α sur $H^2_{\mathbb{C}}$ se décomposent en composantes α_+ et α_+ qui sont contractées (resp. dilatées) par ϕ_t. Alors

$$h_t : \alpha \mapsto \int_0^t \phi_s^* \iota_\xi \alpha_+ \, ds - \int_{-t}^0 \phi_s^* \iota_\xi \alpha_- \, ds$$

converge lorsque $t \to +\infty$ vers un opérateur borné h sur L^p.
$P = 1 - dh - hd$ est une rétraction du complexe de de Rham L^p sur un complexe $\mathcal{B}$ de formes différentielles sur $Heis^3$ dont certaines composantes sont nulles.



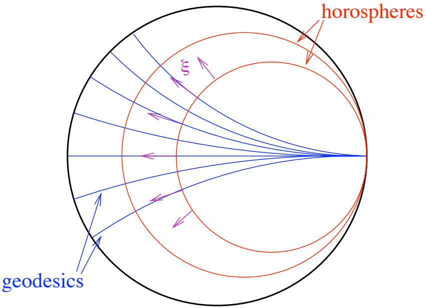
Annulation de la torsion pour $H^2_{\mathbb{C}}$

On change de point de vue, on utilise les coordonnées horosphériques. On voit $H^2_{\mathbb{C}}$ comme un produit $Heis \times \mathbb{R}$. On prouve une formule de Künneth.

1ère étape. Pour $p \notin \{4/3, 2, 4\}$, les formes différentielles α sur $H^2_{\mathbb{C}}$ se décomposent en composantes α_+ et α_+ qui sont contractées (resp. dilatées) par ϕ_t. Alors

$$h_t : \alpha \mapsto \int_0^t \phi_s^* \iota_\xi \alpha_+ \, ds - \int_{-t}^0 \phi_s^* \iota_\xi \alpha_- \, ds$$

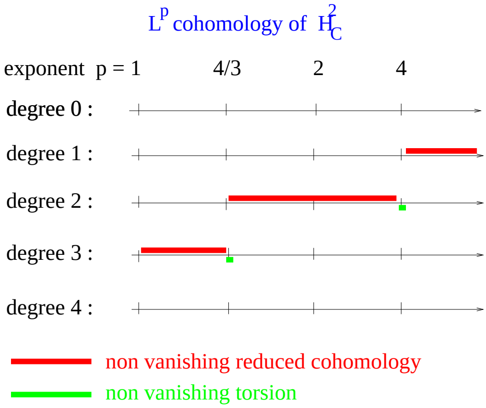
converge lorsque $t \to +\infty$ vers un opérateur borné h sur L^p.
$P = 1 - dh - hd$ est une rétraction du complexe de de Rham L^p sur un complexe $\mathcal{B}$ de formes différentielles sur $Heis^3$ dont certaines composantes sont nulles.



2ème étape. Si $2 < p < 4$, ce complexe est non nul en degrés 1 et 2.
Soit τ la forme de contact invariante sur $Heis^3$. Alors $\mathcal{B}^1$ est fait de 1-formes proportionnelles à τ. Comme

$$d(f\tau) = df \wedge \tau + f \, d\tau,$$

$d(f\tau)$ determine f, donc $d : \mathcal{B}^1 \to \mathcal{B}^2$ a une image fermée.


L^p cohomology of H^2_C
exponent p = 1
4/3
2
4
degree 0 :
degree 1 :
degree 2 :
degree 3 :
degree 4 :
non vanishing reduced cohomology
non vanishing torsion

Théorème de la sous-algèbre

Définition

(Bourdon-Pajot 2004). *L'*algèbre de Royden $\mathcal{R}_p(M)$ *d'une variété riemannienne à courbure négative* M *est l'espace des fonctions bornées* u *sur* M *telles que* $du \in L^p$*, modulo les fonctions* $L^p \cap L^\infty$*.*

Clairement, $u \in \mathcal{R}_p(M)$ entraîne $[du] \in H^{1,p}(M)$.

Définition

(Bourdon-Pajot 2004). *L'algèbre de Royden $\mathcal{R}_p(M)$ d'une variété riemannienne à courbure négative M est l'espace des fonctions bornées u sur M telles que $du \in L^p$, modulo les fonctions $L^p \cap L^\infty$.*

Clairement, $u \in \mathcal{R}_p(M)$ entraîne $[du] \in H^{1,p}(M)$.

Théorème

On suppose M^n simplement connexe et δ-pincée, $\delta \in (-1, 0)$. On suppose

$$p < 1 + \frac{n-k}{k-1}\sqrt{-\delta}, \quad r < 1 + \frac{n-k+1}{k-2}\sqrt{-\delta} \quad et \quad \frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}.$$

Etant donnée $\kappa \in H^{k-1,r}(M)$, l'ensemble des $u \in \mathcal{R}_q(M)$ telles que $[du] \smile \kappa = 0$ dans $H^{k,p}(M)$ est une sous-algèbre.

Exemple

$n = 4$, $k = 2$, $q = r = 2p$. Si $\delta < -\frac{1}{4}$, le théorème s'applique pour des $p > 2$ et produit une sous-algèbre $\mathcal{R}_{2p}(M)$.

Proposition

Soit $2 < p < 4$. Il existe un ouvert cônique $U \subset H^2_{\mathbb{C}}$, une classe $\kappa \in H^{1,2p}(U)$ et une fonction $u \in \mathcal{R}_{2p}(U)$ tels que $[du] \smile \kappa = 0$ in $H^{2,p}(U)$ mais $[d(u^2)] \smile \kappa \neq 0$ dans $H^{2,p}(U)$. Donc $u^2 \notin \mathcal{R}_{2p}(U)$.

Proposition

Soit $2 < p < 4$. Il existe un ouvert cônique $U \subset H^2_{\mathbb{C}}$, une classe $\kappa \in H^{1,2p}(U)$ et une fonction $u \in \mathcal{R}_{2p}(U)$ tels que $[du] \smile \kappa = 0$ in $H^{2,p}(U)$ mais $[d(u^2)] \smile \kappa \neq 0$ dans $H^{2,p}(U)$. Donc $u^2 \notin \mathcal{R}_{2p}(U)$.

Preuve

Soit $\alpha \in \mathcal{B}^2$ une 2-forme, alors $\alpha \in d\mathcal{B}^1$ implique qu'il existe une fonction f telle que $\alpha = df \wedge \tau + f\, d\tau$. Alors $f = \dfrac{\tau \wedge \alpha}{\tau \wedge d\tau}$. Donc α satisfait une équation différentielle linéaire

$$\alpha = d\left(\frac{\tau \wedge \alpha}{\tau \wedge d\tau}\tau\right).$$

Si $du \wedge \beta$ est une solution, $d(u^2) \wedge \beta$ ne l'est pas, sauf si β est proportionnelle à du.

Pourquoi le théorème de la sous-algèbre est faux pour $H^2_{\mathbb{C}}$

Proposition

Soit $2 < p < 4$. Il existe un ouvert cônique $U \subset H^2_{\mathbb{C}}$, une classe $\kappa \in H^{1,2p}(U)$ et une fonction $u \in \mathcal{R}_{2p}(U)$ tels que $[du] \smile \kappa = 0$ in $H^{2,p}(U)$ mais $[d(u^2)] \smile \kappa \neq 0$ dans $H^{2,p}(U)$. Donc $u^2 \notin \mathcal{R}_{2p}(U)$.

Preuve

Soit $\alpha \in \mathcal{B}^2$ une 2-forme, alors $\alpha \in d\mathcal{B}^1$ implique qu'il existe une fonction f telle que $\alpha = df \wedge \tau + f\, d\tau$. Alors $f = \dfrac{\tau \wedge \alpha}{\tau \wedge d\tau}$. Donc α satisfait une équation différentielle linéaire

$$\alpha = d\left(\frac{\tau \wedge \alpha}{\tau \wedge d\tau}\tau\right).$$

Si $du \wedge \beta$ est une solution, $d(u^2) \wedge \beta$ ne l'est pas, sauf si β est proportionnelle à du.

Exemple

En coordonnées, si $\tau = dz - x\, dy$, on peut prendre $u = x$, $\beta = dy$.

Pourquoi le théorème de la sous-algèbre est faux pour $H^2_{\mathbb{C}}$

Proposition

Soit $2 < p < 4$. Il existe un ouvert cônique $U \subset H^2_{\mathbb{C}}$, une classe $\kappa \in H^{1,2p}(U)$ et une fonction $u \in \mathcal{R}_{2p}(U)$ tels que $[du] \smile \kappa = 0$ in $H^{2,p}(U)$ mais $[d(u^2)] \smile \kappa \neq 0$ dans $H^{2,p}(U)$. Donc $u^2 \notin \mathcal{R}_{2p}(U)$.

Preuve

Soit $\alpha \in \mathcal{B}^2$ une 2-forme, alors $\alpha \in d\mathcal{B}^1$ implique qu'il existe une fonction f telle que $\alpha = df \wedge \tau + f\, d\tau$. Alors $f = \dfrac{\tau \wedge \alpha}{\tau \wedge d\tau}$. Donc α satisfait une équation différentielle linéaire

$$\alpha = d\left(\frac{\tau \wedge \alpha}{\tau \wedge d\tau}\tau\right).$$

Si $du \wedge \beta$ est une solution, $d(u^2) \wedge \beta$ ne l'est pas, sauf si β est proportionnelle à du.

Exemple

En coordonnées, si $\tau = dz - x\,dy$, on peut prendre $u = x$, $\beta = dy$.

Corollaire

Le pincement optimal pour $H^2_{\mathbb{C}}$ est $-\frac{1}{4}$.