Avatars du théorème de plongement d'Assouad

P. Pansu

13 avril 2011

On décrit le problème du plongement d'espaces doublants dans des espaces euclidiens.

1. Assouad (1983) : plongement en dimension dépendant de l'exposant.
2. Naor et Neiman (décembre 2010) : plongement en dimension indépendante de l'exposant.
3. Lien avec avec les empilements de boules.
4. Thurston 1993, Benjamini et Schramm (1995-2010) : résultats sur les empilements de boules.
5. Preuve du théorème de Naor et Neiman.

Définition (Bouligand 1928)

La dimension métrique $\dim(X)$ *d'un espace métrique* X *est la borne inférieure des* d *tels qu'il existe* C *tel que pour tout sous-ensemble a-séparé* $Y \subset X$ *de diamètre* D, $|Y| \leq C\,(\frac{D}{a})^d$.

Exemple

$\mathbb{R}^n$, *Heis*^{n} *(n impair) ont une dimension métrique linéaire en n.*

Remarque

Si X *a un plongement bilipschitzien dans* Y*, alors* $\dim(X) \leq \dim(Y)$*. Si* $X' = (X, d_X^{1-\epsilon})$*, alors* $\dim(X') = \frac{1}{1-\epsilon}\dim(X)$.

Théorème (Assouad 1983)

Pour tout $\epsilon \in (0,1)$ *et* $d > 0$*, il existe* $D(d,\epsilon)$ *et* $N(d,\epsilon)$ *tels que pour tout espace métrique* X *de dimension* d*, la métrique fractionnaire* $(X, d_X^{1-\epsilon})$ *admet un plongement bilipschitzien dans l'espace euclidien* ℓ_2^N *de distorsion* $\leq D$.

Question

Donner des bornes optimales sur D *and* N.

Théorème (Gupta, Krauthgamer, Lee 2003 ; Lee, Mendel, Naor 2004)

Dans le théorème d'Assouad, on peut prendre $N \leq O(\frac{d \log d}{\epsilon})$ *et* $D \leq O(\frac{d}{\sqrt{\epsilon}})$.

Théorème (Naor, Neiman décembre 2010)

Dans le théorème d'Assouad, on peut prendre, pour tout $\theta \in]0,1]$, $N \leq O(\frac{d}{\theta})$ *et* $D \leq O((\frac{d}{\epsilon})^{1+\theta})$.

Remarque

A une constante près, c'est optimal, car $N \geq \frac{\mathrm{Hausdim}(X)}{1-\epsilon} \geq \Omega(d)$.

Question

Dans des exemples, donner une meilleure borne inférieure sur la dimension du plongement.

Théorème (Kahane 1981, Assouad 1983)

Pour l'espace euclidien $(\ell_2^d, d_{\ell_2}^{1-\epsilon})$, *la dimension de plongement optimale est le plus petit entier strictement supérieur à* $\frac{d}{1-\epsilon}$, *i.e.* $N = \lfloor \frac{d}{1-\epsilon} \rfloor + 1$.

Définition (Benjamini, Schramm)

Soit G un graphe. G est empilable *dans $\mathbb{R}^d$ si G est le graphe d'incidence d'un empilement de boules dans ℓ_2^d.*

Définition (provisoire)

*Soit G un graphe. G est k-*empilable *dans $\mathbb{R}^d$ si G est le graphe de k-incidence d'un empilement de boules dans ℓ_2^d (i.e. on relie une boule B à toutes les boules qui intersectent kB).*
Un espace métrique X est empilable dans $\mathbb{R}^d$ s'il est quasiisométrique à un graphe k-empilable dans $\mathbb{R}^d$.

Proposition

Soit X un espace métrique à géométrie bornée. Si X possède un plongement fractionnaire dans ℓ_2^d, alors X est empilable dans $\mathbb{R}^d$.

En 1979, R. Lipton et R. Tarjan ont trouvé un algorithme qui coupe en deux un graphe planaire en ôtant au plus $2\sqrt{2n}$ sommets. W. Thurston a proposé une autre méthode, reposant sur le théorème de Koebe qui réalise toute triangulation du plan comme graphe d'incidence d'un empilement de disques. En voici la généralisation d-dimensionnelle.

Théorème (Miller, Teng, Thurston, Vavasis 1993-1998)

Soit G un graphe fini k-empilable dans $\mathbb{R}^d$, à n sommets. Alors il existe un sous-ensemble S de sommets de taille $|S| \leq O(k\, n^{(d-1)/d})$ qui sépare G en deux sous-graphes de tailles $\leq \frac{d+1}{d+2} n$.

Cela motive la définition suivante.

Théorème (Benjamini, Schramm)

Soit X un espace métrique à géométrie bornée. La séparation *de X est la plus petite fonction $sep_X : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ telle que tout sous-espace de volume n de X puisse être séparé en deux morceaux de volume $\leq$ moitié par un ensemble S tel que volume$(S+1) \leq sep_X(n)$.*

Exemple (Benjamini, Schramm)

$sep_{\mathrm{arbre}}(n) = O(1)$, $sep_{\mathbb{R}^d}(n) = \Theta(n^{(d-1)/d})$, $sep_{\mathrm{arbre}\times\mathrm{arbre}}(n) = \Theta(\frac{n}{\log n})$.

Notation

$R^1_p(X)$ = cohomologie L_p réduite en degré 1 = *fonctions de gradient L_p modulo l'adhérence des fonctions L_p.*

Définition

X est p-parabolique s'il existe des fonctions à support compact $u : X \to \mathbb{R}$, valant 1 sur un ouvert fixé, et d'énergie $\int |du|^p$ arbitrairement petite.

Théorème (Benjamini, Schramm)

Si X est empilable dans $\mathbb{R}^d$, alors

- *ou bien X est d-parabolique ;*
- *ou bien $R^1_d(X)$ est non nul.*

Exemple

Si $X = Cay(\Gamma)$, X est p-parabolique $\Leftrightarrow$ Γ est à croissance polynômiale de degré $d \leq p$.
Si X est un groupe de Lie, $R^1_d(X) \neq 0 \Leftrightarrow X$ est hyperbolique et $\mathrm{Confdim}(\partial X) \leq d$.

Aucun des exemples ci-dessus ne donne une borne inférieure pour la dimension de plongement fractionnaire meilleure que la dimension métrique. Par exemple, l'argument de Miller, Teng, Thurston, Vavasis 1993-1998 s'étend au groupe de Heisenberg et donne une séparation $sep(n) = n^{3/4}$. Les graphes autosimilaires diamant ou de Laakso sont planaires.

Question

Existe-t'il des espaces doublants X de dimension métrique d tels que $sep_X(n) \gg n^{(d-1)/d}$?

Pas sûr.

Question

Un espace doublant de dimension métrique d est-il forcément p-parabolique pour tout $p \geq d$?

Cela paraît probable.

La construction est un cas particulier de celle de Abraham, Bartal, Neiman 2008.

Préliminaire. Assouad, Bretagnolle, Dacunha-Castelle, Krivine : on peut supposer X fini, diamètre$(X) < \infty$, dimension$(X) = d$.

Schéma de la preuve

Etant donné $\theta \in]0,1]$, on construit une distribution sur les applications $F : X \to \ell_2^N$, $N = \lceil \frac{d}{\theta} \rceil$. Toutes satisfont à une estimation Hölder $|F(x) - F(y)| \leq (\frac{d}{\epsilon})^{1+\theta} d(x,y)$. L'inégalité inverse est satisfaite avec probabilité non nulle.

Pour $i \in \mathbb{N}$, soit $s_i = (\frac{\epsilon}{d})^{i\theta/(1-\epsilon)}$. Soit Y_i un s_i-réseau de X. On tire indépendamment au hasard N rayons $R^k(y) \in [\frac{s_i}{4}, \frac{s_i}{2}]$ pour chaque point $y \in Y_i$. On constitue N partitions de X au moyen des boules $B(y_1, R^k(y_1))$, $B(y_2, R^k(y_2)) \setminus B(y_1, R^k(y_1)), \ldots$ centrées sur Y_i. Pour chaque pièce P de l'une de ces partitions, on tire au hasard un réel $U(P) \in [0,1]$. Pour $x \in X$, on note $P_i^k(x)$ la pièce qui contient x et

$$f_i^k(x) = d\, d(x, X \setminus P_i^k(x)).$$

La construction est un cas particulier de celle de Abraham, Bartal, Neiman 2008.

Préliminaire. Assouad, Bretagnolle, Dacunha-Castelle, Krivine : on peut supposer X fini, diamètre$(X) < \infty$, dimension$(X) = d$.

Schéma de la preuve

Etant donné $\theta \in]0,1]$, on construit une distribution sur les applications $F : X \to \ell_2^N$, $N = \lceil \frac{d}{\theta} \rceil$. Toutes satisfont à une estimation Hölder $|F(x) - F(y)| \leq (\frac{d}{\epsilon})^{1+\theta} d(x,y)$. L'inégalité inverse est satisfaite avec probabilité non nulle.

Pour $i \in \mathbb{N}$, soit $s_i = (\frac{\epsilon}{d})^{i\theta/(1-\epsilon)}$. Soit Y_i un s_i-réseau de X. On tire indépendamment au hasard N rayons $R^k(y) \in [\frac{s_i}{4}, \frac{s_i}{2}]$ pour chaque point $y \in Y_i$. On constitue N partitions de X au moyen des boules $B(y_1, R^k(y_1))$, $B(y_2, R^k(y_2)) \setminus B(y_1, R^k(y_1)), \ldots$ centrées sur Y_i. Pour chaque pièce P de l'une de ces partitions, on tire au hasard un réel $U(P) \in [0,1]$. Pour $x \in X$, on note $P_i^k(x)$ la pièce qui contient x et

$$f_i^k(x) = U(P_i^k(x))\, d\, s_i^{-\epsilon} d(x, X \setminus P_i^k(x)).$$

La construction est un cas particulier de celle de Abraham, Bartal, Neiman 2008.

Préliminaire. Assouad, Bretagnolle, Dacunha-Castelle, Krivine : on peut supposer X fini, diamètre$(X) < \infty$, dimension$(X) = d$.

Schéma de la preuve

Etant donné $\theta \in]0,1]$, on construit une distribution sur les applications $F : X \to \ell_2^N$, $N = \lceil \frac{d}{\theta} \rceil$. Toutes satisfont à une estimation Hölder $|F(x) - F(y)| \leq (\frac{d}{\epsilon})^{1+\theta} d(x,y)$. L'inégalité inverse est satisfaite avec probabilité non nulle.

Pour $i \in \mathbb{N}$, soit $s_i = (\frac{\epsilon}{d})^{i\theta/(1-\epsilon)}$. Soit Y_i un s_i-réseau de X. On tire indépendamment au hasard N rayons $R^k(y) \in [\frac{s_i}{4}, \frac{s_i}{2}]$ pour chaque point $y \in Y_i$. On constitue N partitions de X au moyen des boules $B(y_1, R^k(y_1))$, $B(y_2, R^k(y_2)) \setminus B(y_1, R^k(y_1)), \dots$ centrées sur Y_i. Pour chaque pièce P de l'une de ces partitions, on tire au hasard un réel $U(P) \in [0,1]$. Pour $x \in X$, on note $P_i^k(x)$ la pièce qui contient x et

$$f_i^k(x) = U(P_i^k(x)) \min\{s_i^{1-\epsilon}, d\, s_i^{-\epsilon} d(x, X \setminus P_i^k(x))\}.$$

On pose

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^{\infty} (f_i^1(x), \ldots, f_i^N(x)).$$

Lemme

On a toujours $|F(x) - F(y)| \leq \mathrm{const.}(\frac{d}{\epsilon})^{1+\theta} d(x,y)^{1-\epsilon}$.

On montre aisément que pour tout $i \in \mathbb{N}$, $k \in [N]$, x, $y \in X$,

$$|f_i^k(x) - f_i^k(y)| \leq \mathrm{const.}\, \min\{s_i^{1-\epsilon}, d\, s_i^{-\epsilon} d(x,y)\}.$$

En sommant sur i, on utilise la majoration par $d\, s_i^{-\epsilon} d(x,y)$ pour $i \leq \log d(x,y)$, et la majoration par $s_i^{1-\epsilon}$ pour i plus grand. La somme est majorée par $d(x,y) \exp(-\epsilon \log d(x,y)) = d(x,y)^{1-\epsilon}$.

Pour chaque $i \in \mathbb{N}$, on pose $\delta_i = (\frac{\epsilon}{d})^{1/(1-\epsilon)} s_i$ et on choisit un δ_i-réseau N_i de X. Soit E l'évènement "pour tout i et pour tous z, $w \in N_i$ tels que $d(z,w)$ soit de l'ordre de s_i, pour au moins la moitié des fonctions f_i^k,

$$|\sum_{j=1}^{\infty}(f_j^k(z) - f_j^k(w))| > s_i^{1-\epsilon}.$$

Lemme

On a $|F(x) - F(y)| \geq \mathrm{const}.(\frac{\epsilon}{d})^{2\theta} d(x,y)^{1-\epsilon}$ *pourvu que l'évènement* E *ci-dessus soit réalisé.*

En effet, choisir i tel que $d(x,y)$ soit de l'ordre de s_i. Approcher x et y par z, $w \in N_i$. Utiliser le fait que F est Hölder continue.

Dans la définition de E, on peut clairement introduire la modification suivante : $T(i,z,w) =$ "pour au moins la moitié des fonctions f_i^k,

$$|\sum_{j=1}^{i}(f_j^k(z) - f_j^k(w))| > 2 s_i^{1-\epsilon}."$$

Comme le graphe de dépendance des évènements $T(i,z,w)$ a un degré borné par $(\frac{d}{\epsilon})^{O(d)}$ (c'est le nombre de points de N_i dans une boule de rayon s_i), pour minorer la probabilité de E, on utilise le Lemme Local de Lovász (en fait, la variante suivante).

Lemme (Abraham, Bartal, Neiman 2008)

Soient A_v des évènements indexés par les sommets d'un graphe G de degré $\leq D$. Sur G, on se donne une fonction de niveau $V \to \mathbb{N}$ qui est constante sur les composantes connexes. On suppose qu'il existe q tel que $q(D+1)e \leq 1$ et pour tout v et tout ensemble Q de sommets dont aucun n'est un voisin de v, et tous ont un niveau $\leq$ à celui de v,

$$\mathbb{P}(A_v^c \cap \bigcap_{u \in Q} A_u) \leq q\, \mathbb{P}(\bigcap_{u \in Q} A_u).$$

Alors, avec une probabilité non nulle, les A_v se produisent simultanément.

Ici, $v = (i,z,w)$, le niveau est i, $A_v = T(i,z,w)$. Il s'agit de montrer que $q = (\frac{\epsilon}{d})^{\theta N/2}$ convient. Si G était vraiment un graphe de dépendance, ce serait simple.