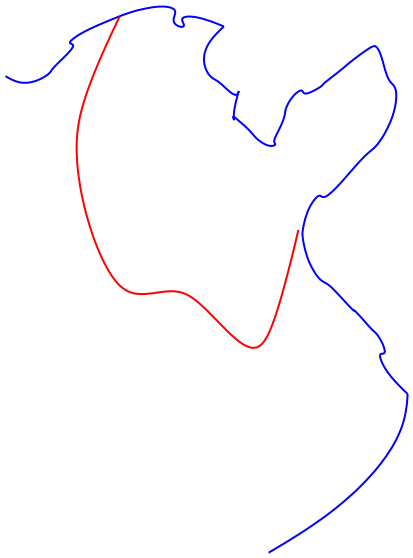
Isopérimétrie et pavages

P. Pansu

8 octobre 2006

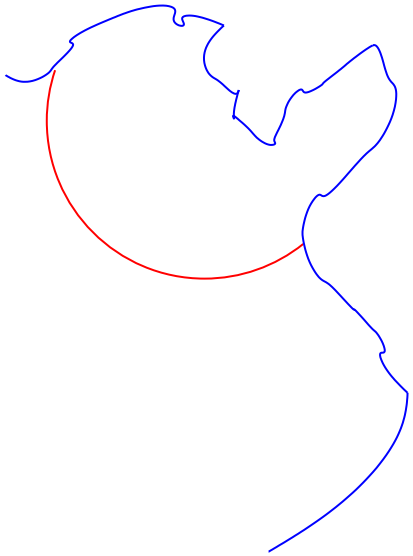
Le problème de Didon

Comment entourer, avec une corde de longueur fixée, la plus grande aire possible ?



Le problème de Didon

Comment entourer, avec une corde de longueur fixée, la plus grande aire possible ?



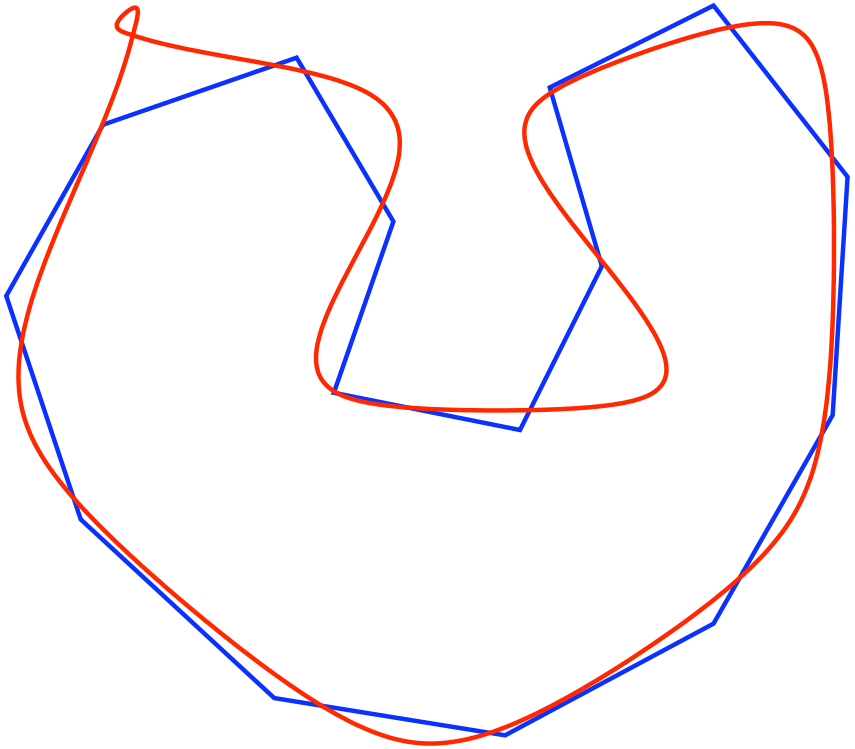
Solution : donner à la corde la forme d'un arc de cercle.

Théorème

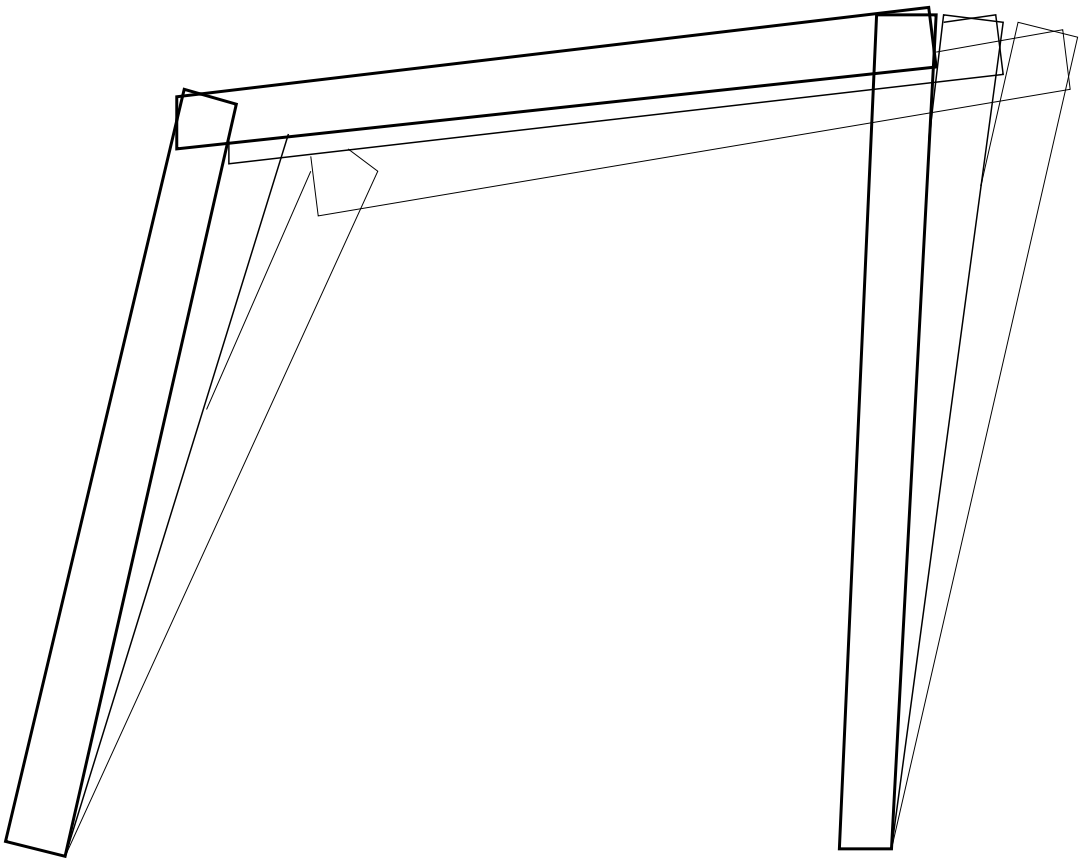
$$Aire \leq \frac{1}{4\pi} Longueur^2.$$

Première discrétisation

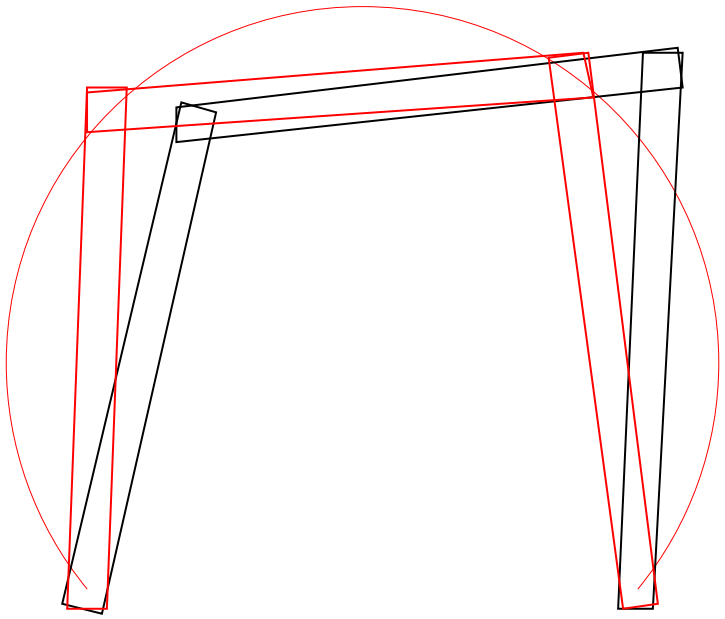
Remplacer une courbe par un polygone



Solution du problème isopérimétrique pour un quadrilatère



Solution du problème isopérimétrique pour un quadrilatère



Théorème

Un quadrilatère flexible entoure une aire maximale lorsque ses sommets sont cocycliques.

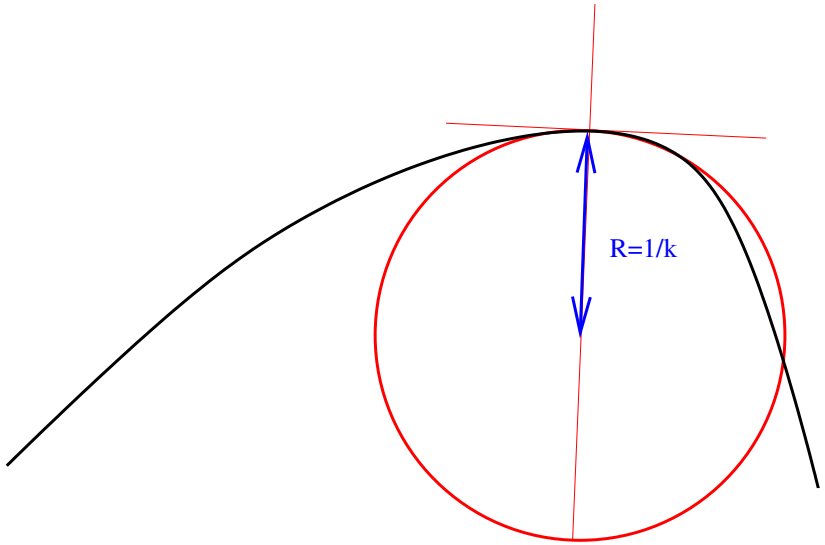
Corollaire

Un polygone flexible qui entoure une aire maximale est inscrit dans un cercle.

Equation différentielle des courbes optimales

Théorème

Une courbe qui entoure une aire maximale à longueur fixée doit avoir une courbure *constante.*

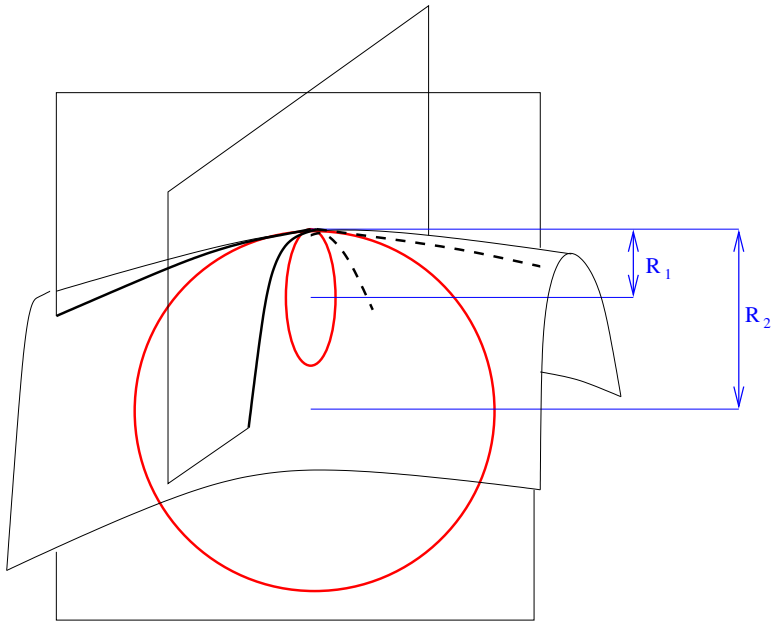


$$k = \frac{1}{R} \text{ au signe près.}$$

Equation différentielle des surfaces optimales

Théorème

(L. Euler, 1744). *Une surface qui entoure un volume maximal à aire fixée doit avoir une* courbure moyenne *constante.*

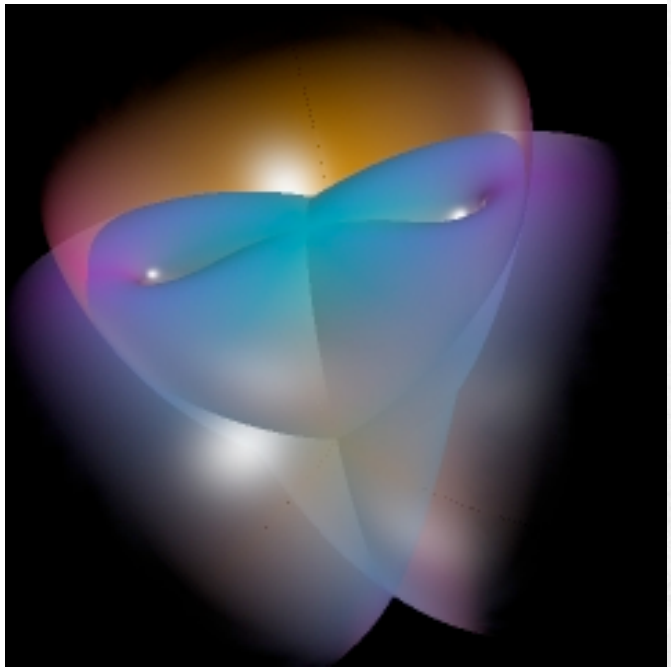


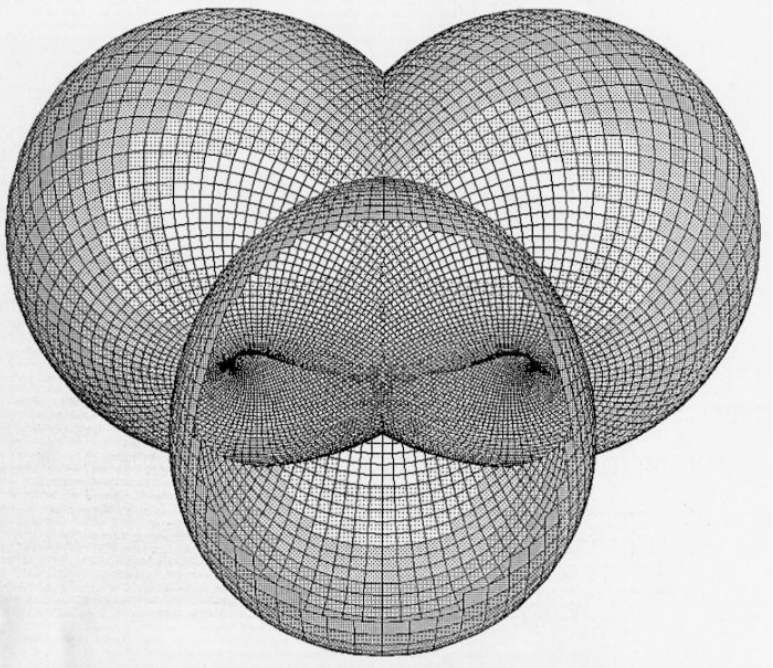
$$H = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

Théorème

(Aleksandrov, 1944). *Une surface à courbure moyenne constante qui ne se recoupe pas est une sphère.*

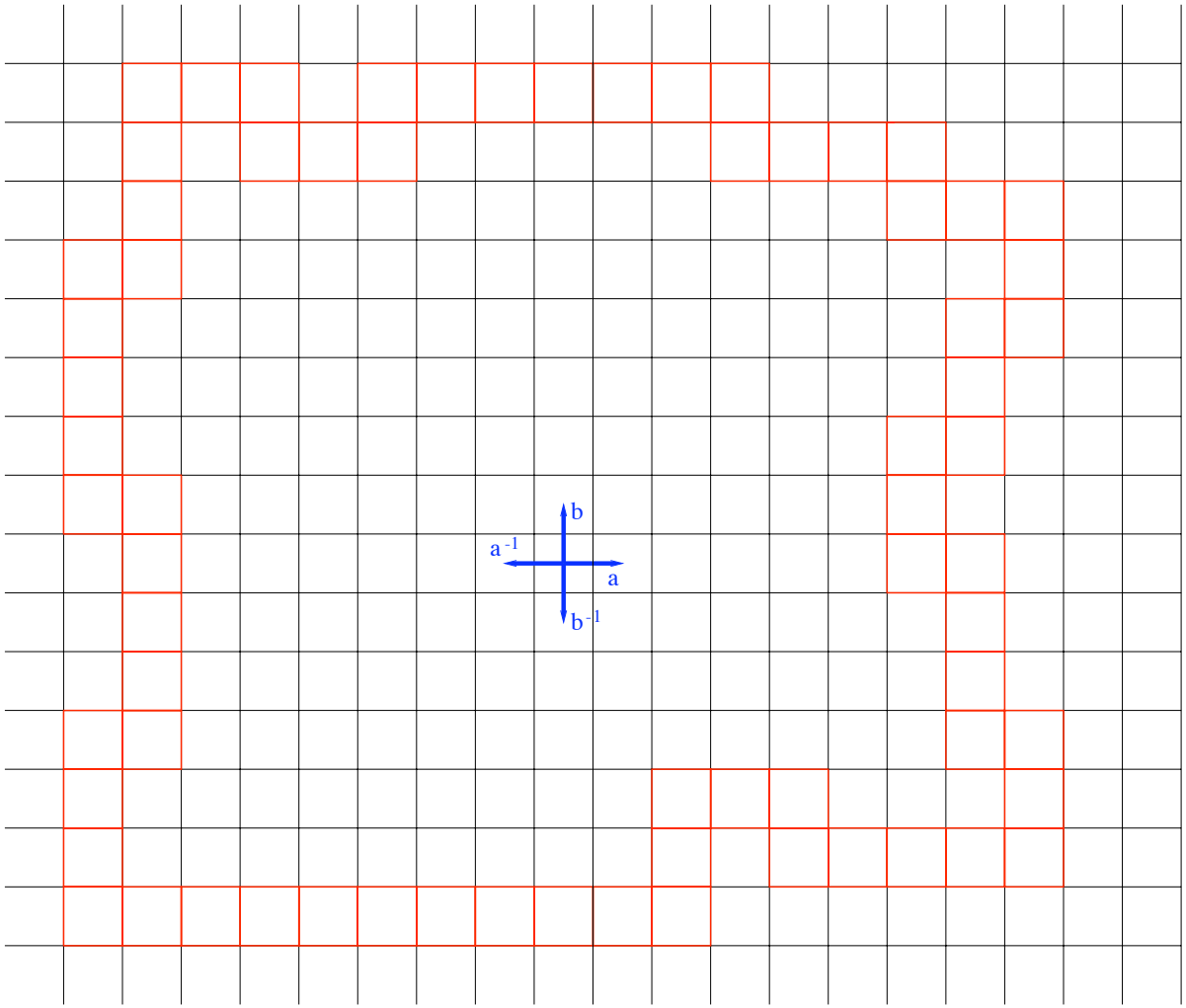
Une surface à courbure moyenne constante qui se recoupe : le tore de H. Wente (1986)





Deuxième discrétisation

Remplacer le plan euclidien par une grille



Règle $aba^{-1}b^{-1} = 1$.

Pavages associés à des règles de réécriture

Règle $abab^{-1} = 1$

$\Rightarrow Aire = Longueur^2$

Règles $a^4 = 1,\ b^3 = 1,\ c^3 = 1$

$\Rightarrow Aire = Longueur$

Remplissage dans les groupes

Une présentation finie d'un groupe

Les mots en un alphabet fini a, a^{-1}, b, b^{-1}, ..., à réduction près par un nombre fini de règles de simplification baptisées *relateurs*.

Remplissage

Une courbe fermée dans un groupe, c'est un mot simplifiable. Ca a une longueur. Un remplissage, c'est la liste des règles utilisées pour simplifier. Ca a une *aire*, le nombre de règles utilisées.

Fonction de Dehn

La *fonction de Dehn* donne l'aire $Aire(L)$ nécessaire pour remplir toute courbe de longueur $\leq L$.

Théorème

(Novikov 1955, Boone 1957). *Il existe des groupes pour lesquels le problème des mots est indécidable. Pour un tel groupe, la fonction de Dehn n'est pas récursive.*

Quelles fonctions de Dehn ?

Théorème

(M. Gromov, 1986). *La fonction de Dehn d'un groupe est ou bien linéaire ou bien au moins quadratique.*

Théorème

(J.-C. Birget, I. Rips, M. Sapir, 2000). *Toute fonction temps (performance d'un ordinateur non déterministe) au moins quartique est la fonction de Dehn d'un groupe.*

Exemple

Si $\alpha \geq 4$ *est calculable en temps* $\leq 2^{2^m}$, *alors* $n \mapsto \lfloor n^\alpha \rfloor$ *est la fonction de Dehn d'une présentation de groupe. Réciproquement, si* $n \mapsto \lfloor n^\alpha \rfloor$ *est une fonction de Dehn, alors* α *est calculable en temps* $\leq 2^{2^{2^m}}$.

Théorème

(J.-C. Birget, A. Olshanskii, I. Rips, M. Sapir, 2002). *Le problème des mots dans un groupe de type fini est NP si et seulement si celui-ci se plonge dans un groupe de présentation finie dont la fonction de Dehn est polynomiale, i.e.*

$$A(L) \leq L^d.$$

La classe NP réunit les problèmes de décision pour lesquels la réponse oui peut être décidée par un algorithme non-déterministe en un temps polynomial par rapport à la taille de l'instance.
De façon équivalente, c'est la classe des problèmes qui admettent un algorithme dans P qui, étant donné une solution du problème, est capable de répondre oui ou non.
Intuitivement, les problèmes dans NP sont tous les problèmes qui peuvent être résolus en énumérant l'ensemble des solutions possibles et en les testant avec un algorithme polynomial.

Groupes à fonction de Dehn linéaire

Théorème

(M. Gromov, 1986). *Les groupes dont la fonction de Dehn est linéaire, i.e.*

$$Aire(L) = L,$$

ressemblent au plan hyperbolique : il possèdent un bord, les triangles sont minces, etc... C'est pourquoi on les appelle groupes hyperboliques.

Théorème

(M. Gromov, 1992). *Presque toute présentation de densité* $< 1/2$ *donne un groupe infini hyperbolique, i.e. à fonction de Dehn linéaire.*