Tiens, v'là un super sujet pour atelier MATh.en.JEANS !

Julien Cassaigne, CNRS et AMU, Pierre Pansu, Université Paris-Sud

24 octobre 2018

Mécanismes de genèse de sujets

Mécanismes de genèse de sujets

Généralisation d'un sujet classique

Jetons dans un tableau
Soit ABCD un tableau rectangulaire dans lequel AB $= 20$ et BC $= 12$. Ce tableau est subdivisé en 20×12 carrés unité. On se donne un entier strictement positif r. Un jeton peut se déplacer d'un carré à un autre si et seulement si la distance entre les centres de ces 2 carrés est exactement $\sqrt{r}$. Est-il possible de trouver une suite de déplacements amenant le jeton du carré de sommet A au carré de sommet B ?

Mécanismes de genèse de sujets

Généralisation d'un sujet classique

Jetons dans un tableau
Soit ABCD un tableau rectangulaire dans lequel AB $= 20$ et BC $= 12$. Ce tableau est subdivisé en 20×12 carrés unité. On se donne un entier strictement positif r. Un jeton peut se déplacer d'un carré à un autre si et seulement si la distance entre les centres de ces 2 carrés est exactement $\sqrt{r}$. Est-il possible de trouver une suite de déplacements amenant le jeton du carré de sommet A au carré de sommet B ?

Exercice de niveau plus élevé déguisé

Panique sur le tableau électrique
Un électricien débutant s'est trompé en installant l'éclairage dans une maison neuve. En prenant possession des lieux à la nuit tombée, le propriétaire constate que si on allume la lumière dans un pièce, on change l'état de l'éclairage dans toutes les pièces voisines (d'éteint à allumé et d'allumé à éteint). Il est bien entendu trop tard pour appeler l'électricien. Fou de rage, le propriétaire essaie d'allumer simultanément toutes les pièces, en tripotant sans retenue les interrupteurs. Va t'il parvenir à ses fins ? Est ce que cela dépend de la disposition des pièces ?

Mécanismes de genèse de sujets

Théorème classique déguisé

Evacuer Bagdad
S'inquiétant des inondations de plus en plus violentes qui frappent sa capitale, le calife Haroun el Poussah doit choisir un plan d'évacuation pour Bagdad. Un tel plan consiste en le choix d'un carrefour qui sert de point de rassemblement, et, à chaque autre carrefour de la ville, d'une direction d'évacuation. En suivant les panneaux, de carrefour en carrefour, les habitants doivent arriver au point de rassemblement. Son vizir Iznogoud lui ayant présenté plusieurs plans qui ne le satisfont pas, le calife demande qu'on lui présente tous les plans possibles. Iznogoud objecte qu'il y a des dizaines de possibilités, ce que le calife, habitué aux mensonges de son vizir, ne croit pas. Mais, pour une fois, Iznogoud a peut-être raison. Peut on calculer exactement le nombre de plans d'évacuation différents ? Le calife exige de plus que, pour faciliter le travail des pompiers, les évacués évitent de passer devant la caserne. Peut on calculer exactement le nombre de plans d'évacuation qui satisfont cette condition supplémentaire ? Iznogoud sera-t'il un jour calife à la place du calife ?

Se focaliser sur un théorème n'est pas une bonne idée. Cela conduit à des énoncés complexes, avec risque de malentendu. Ça ferme le sujet, pas de variantes...

Mécanismes de genèse de sujets

Sujet improvisé suite à demande précise : le prof de La Ciotat veut des bateaux

Quelle est la position d'équilibre d'un corps simple flottant ?

Mécanismes de genèse de sujets

Sujet improvisé suite à demande précise : le prof de La Ciotat veut des bateaux

Quelle est la position d'équilibre d'un corps simple flottant ?

Malentendu : les élèves inventent un sujet différent

Jeu de découpage de pizza : parts inégales, chacun se sert à tour le rôle, stratégie ? *Les élèves ont étudié les formes possibles des parts*

Mécanismes de genèse de sujets

Sujet improvisé suite à demande précise : le prof de La Ciotat veut des bateaux

Quelle est la position d'équilibre d'un corps simple flottant ?

Malentendu : les élèves inventent un sujet différent

Jeu de découpage de pizza : parts inégales, chacun se sert à tour le rôle, stratégie ? *Les élèves ont étudié les formes possibles des parts*

Délibérément : les élèves inventent un sujet différent

Suites de Steinhaus : 2 chiffres $\rightarrow$ produit écrit à la suite, idem avec les 2 suivants :
23 236 23618 236186 2361868 236186848 23618684848 ...
Consigne : essayez d'inventer une variante du sujet.

Mécanismes de genèse de sujets

Sujet improvisé suite à demande précise : le prof de La Ciotat veut des bateaux

Quelle est la position d'équilibre d'un corps simple flottant ?

Malentendu : les élèves inventent un sujet différent

Jeu de découpage de pizza : parts inégales, chacun se sert à tour le rôle, stratégie ? *Les élèves ont étudié les formes possibles des parts*

Délibérément : les élèves inventent un sujet différent

Suites de Steinhaus : 2 chiffres $\rightarrow$ produit écrit à la suite, idem avec les 2 suivants :
23 236 23618 236186 2361868 236186848 23618684848 ...
Consigne : essayez d'inventer une variante du sujet. *Les élèves inventent :*
1 chiffre $\rightarrow$ carré écrit à la suite
2 24 2416 24161 2416136 ....

Dangers à éviter

Eviter tout mot-clé vendant la mèche : celui-là est cousu de fil blanc

Chocolats et probabilités
Sur une table, sont étalés 1999 chocolats blancs et 6661 chocolats noirs tous enrobés dans un emballage les rendant indistingables. Un gourmand applique jusqu'à épuisement du stock la procédure suivante :
a- S'il reste des chocolats, il en tire un au hasard et note sa couleur (blanc ou noir). Puis il le mange et applique b.
b- S'il reste des chocolats, il en tire un au hasard et note sa couleur :

- si c'est la même couleur que le dernier chocolat avalé, il le mange et retourne en b ;
- sinon il le remet dans son emballage, le repose et retourne en a.

En supposant que son estomac le lui permette, pourra-t-il de cette façon manger tous les chocolats ? Quelle est la probabilité pour que le dernier chocolat mangé soit noir ? Qu'en est-il pour d'autres nombres de chocolats au départ ?

Dangers à éviter

Eviter tout mot-clé vendant la mèche : celui-là est cousu de fil blanc

Chocolats et probabilités
Sur une table, sont étalés 1999 chocolats blancs et 6661 chocolats noirs tous enrobés dans un emballage les rendant indistingables. Un gourmand applique jusqu'à épuisement du stock la procédure suivante :
a- S'il reste des chocolats, il en tire un au hasard et note sa couleur (blanc ou noir). Puis il le mange et applique b.
b- S'il reste des chocolats, il en tire un au hasard et note sa couleur :

- si c'est la même couleur que le dernier chocolat avalé, il le mange et retourne en b ;
- sinon il le remet dans son emballage, le repose et retourne en a.

En supposant que son estomac le lui permette, pourra-t-il de cette façon manger tous les chocolats ? Quelle est la probabilité pour que le dernier chocolat mangé soit noir ? Qu'en est-il pour d'autres nombres de chocolats au départ ?

Changer les noms propres suffit parfois

La suite d'Akiyama $a_{n+1} = -\lfloor \frac{a_n}{2} + a_{n-1} \rfloor$ est-elle périodique ?

Des sujets qui ont bien marché

Un sujet accessible dès la 6ème, attirant par son aspect manipulatoire, enrichissant même si surtout descriptif

En un seul coup de ciseaux
Je plie une feuille de papier en quatre, puis je coupe l'angle d'un coup de ciseaux : j'ai fait un trou un forme de losange.
1. Quels sont les polygones qui peuvent être ainsi découpés dans du papier d'un seul coup de ciseaux ?
2. Si j'autorise les découpes rasantes, i.e. les ciseaux passent exactement le long du pli, est-ce que je peux découper davantage de polygones ?

Des sujets qui ont bien marché

Un sujet accessible dès la 6ème, attirant par son aspect manipulatoire, enrichissant même si surtout descriptif

En un seul coup de ciseaux
Je plie une feuille de papier en quatre, puis je coupe l'angle d'un coup de ciseaux : j'ai fait un trou un forme de losange.
1. Quels sont les polygones qui peuvent être ainsi découpés dans du papier d'un seul coup de ciseaux ?
2. Si j'autorise les découpes rasantes, i.e. les ciseaux passent exactement le long du pli, est-ce que je peux découper davantage de polygones ?

Un sujet qui donne lieu à des représentations graphiques de phénomènes arithmétiques

Le collier de perles d'Hypatie
Diophante veut offrir à Hypatie deux colliers de perles qui contiennent respectivement p et q perles numérotées de 1 à p et de 1 à q. L'agencement des perles est pour le moins original : avec le premier collier maintenu ouvert et avec le second maintenu fermé, la somme de deux numéros adjacents est toujours un carré parfait. Diophante qui est pingre a demandé au joaillier de trouver p et q les plus petits possibles. Trouver les valeurs de p et de q et décrire la composition des deux colliers.

Des sujets qui ont bien marché

Un sujet abordable sous deux angles : déterministe et probabiliste

Pétaures en folie
Sur la planète Troy, les pétaures sont utilisés depuis toujours comme montures. Ces robustes ruminants pêchent par gourmandise. Ils affectionnent les pétaudières où pousse la redoutable pétaudingue. Quand par malheur un pétaure broute cette herbe maudite, ils perd litteralement la tête. Les rênes et le mors deviennent sans effet, le malheureux pétaurier juché sur le dos de sa monture désorientée ne peut plus contrôler sa direction. En revanche, la bête reste sensible aux éperons qui lui impriment l'ordre d'avancer ou de reculer d'un pas. Autrement dit, l'animal choisit la direction, l'homme, le sens : un pas en avant, ou un pas en arrière. Dans ces conditions, le pétaurier pourra-t'il maintenir sa monture à l'intérieur du pétenclos ? Sous l'influence de l'herbe maléfique, l'animal trouve spontanément la stratégie qui lui permet de s'enfuir au plus vite, aussi habile que soit son pétaurier. Peut-on prédire en combien de temps ? Celui-ci dépend-il de la forme du pétenclos ? Imaginons un pétenclos très vaste, où, ce qui revient au même, un pétenclos fixé mais un pétaure qui fait des pas très petits. Comment le temps de sortie dépend il de la longueur des pas ?

Des sujets qui ont moins bien marché

Un sujet trop limité et trop difficile : comment montrer qu'une stratégie est optimale ?

Perdu en mer
Un bateau est perdu en mer par un brouillard incroyablement dense, à 10 km d'une côte bien droite. Il ne sait pas dans quelle direction elle se trouve. Si on suppose qu'il contrôle très bien sa direction, quel est le plus court chemin qui permet au bateau de rejoindre la côte ?

Des sujets qui ont moins bien marché

Un sujet trop limité et trop difficile : comment montrer qu'une stratégie est optimale ?

Perdu en mer
Un bateau est perdu en mer par un brouillard incroyablement dense, à 10 km d'une côte bien droite. Il ne sait pas dans quelle direction elle se trouve. Si on suppose qu'il contrôle très bien sa direction, quel est le plus court chemin qui permet au bateau de rejoindre la côte ?

Un sujet trop limité : pas de résultats ou expérimentations faciles

Economies d'énergie
L'ingénieur Lépine a mis au point un ingénieux système pour économiser l'énergie consommée par les ascenseurs de la tour Montparnasse. Ces ascenseurs sont disposés en cercle, et leurs machineries communiquent, de telle sorte que la dépense d'énergie est nulle dans le cas suivant : un des ascenseurs part d'un niveau souterrain, au b-ème sous-sol, il monte au b-ème étage alors que ses deux voisins descendent de b étages chacun. Est-il possible d'effectuer une infinité de mouvements successifs sans dépenser d'énergie ?

Un sujet catastrophique

Le cornac ivrogne
Il ne suffit pas d'un bout de ficelle pour immobiliser un éléphant qui doit attendre que son maître ait fini de se rafraîchir au bar. Un cornac ayant un jour récupéré des pièces provenant d'une charrette usagée, a l'idée de s'en servir pour entraver son éléphant. Il parvient à fixer une barre entre les pattes antérieures et une autre entre les pattes postérieures de l'animal, et s'en va prendre un verre au saloon. Après bien des verres, il sort du bar, et découvre que l'éléphant a disparu. Il prend à témoins d'autres pochards, qui se moquent de lui : entravé par deux barres seulement, l'éléphant peut toujours se déplacer, il lui suffit d'avancer une patte après l'autre. Les rieurs conseillent au cornac d'ajouter deux autres barres entre les pattes de son animal, formant avec les deux premières un quadrilatère articulé. Cela devrait suffire à immobiliser l'éléphant. Ce travail accompli, le cornac rejoint ses comparses au bar. En sortant, tous constatent ébahis la disparition de l'éléphant. L'astucieux animal a réussi a faire quelques mouvements, bien qu'obligé d'avoir toujours au moins 3 appuis. Expliquer comment il s'y est pris. Peut on prédire dans quelle direction il est parti ?

Un sujet catastrophique

Le cornac ivrogne
Il ne suffit pas d'un bout de ficelle pour immobiliser un éléphant qui doit attendre que son maître ait fini de se rafraîchir au bar. Un cornac ayant un jour récupéré des pièces provenant d'une charrette usagée, a l'idée de s'en servir pour entraver son éléphant. Il parvient à fixer une barre entre les pattes antérieures et une autre entre les pattes postérieures de l'animal, et s'en va prendre un verre au saloon. Après bien des verres, il sort du bar, et découvre que l'éléphant a disparu. Il prend à témoins d'autres pochards, qui se moquent de lui : entravé par deux barres seulement, l'éléphant peut toujours se déplacer, il lui suffit d'avancer une patte après l'autre. Les rieurs conseillent au cornac d'ajouter deux autres barres entre les pattes de son animal, formant avec les deux premières un quadrilatère articulé. Cela devrait suffire à immobiliser l'éléphant. Ce travail accompli, le cornac rejoint ses comparses au bar. En sortant, tous constatent ébahis la disparition de l'éléphant. L'astucieux animal a réussi a faire quelques mouvements, bien qu'obligé d'avoir toujours au moins 3 appuis. Expliquer comment il s'y est pris. Peut on prédire dans quelle direction il est parti ?

La simulation numérique, pourrie par les erreurs d'arrondi, a induit les élèves en erreur...

Conclusions

Un bon sujet MATh.en.JEANS doit être

- Accessible : pas de gros mots, pas (trop) d'outils à apprendre en cours de route.
- Progressif : les élèves peuvent faire des observations faciles pour démarrer, ça les accroche.
- Ambitieux : il doit y avoir quelque chose de caché, que les élèves vont trouver après davantage de travail.
- Ouvert : des variantes, des simulations,...

Conclusions

Un bon sujet MATh.en.JEANS doit être

- Accessible : pas de gros mots, pas (trop) d'outils à apprendre en cours de route.
- Progressif : les élèves peuvent faire des observations faciles pour démarrer, ça les accroche.
- Ambitieux : il doit y avoir quelque chose de caché, que les élèves vont trouver après davantage de travail.
- Ouvert : des variantes, des simulations,...

Toutefois, on est toujours surpris :

- Ce qui plaît au chercheur ou au prof ne plaît pas nécessairement aux élèves.
- Tel sujet qui a peu inspiré ici peut marcher du tonnerre là.
- Il arrive que les élèves détournent et enrichissent involontairement le sujet.

Conclusions

Un bon sujet MATh.en.JEANS doit être

- Accessible : pas de gros mots, pas (trop) d'outils à apprendre en cours de route.
- Progressif : les élèves peuvent faire des observations faciles pour démarrer, ça les accroche.
- Ambitieux : il doit y avoir quelque chose de caché, que les élèves vont trouver après davantage de travail.
- Ouvert : des variantes, des simulations,...

Toutefois, on est toujours surpris :

- Ce qui plaît au chercheur ou au prof ne plaît pas nécessairement aux élèves.
- Tel sujet qui a peu inspiré ici peut marcher du tonnerre là.
- Il arrive que les élèves détournent et enrichissent involontairement le sujet.

MORALITÉ : PAS DE RECETTE MIRACLE.