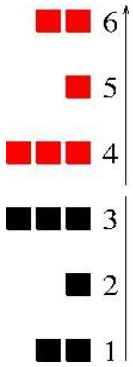
Transport : des remblais et des colis aux mathématiques d'aujourd'hui

Lecture recommandée :
Yann Brenier, chapitre « La brouette de Monge ou le transport optimal », brochure Mathématiques, l'explosion continue. Version pour le site Interstices.
Etienne Ghys, Gaspard Monge, site Images des Mathématiques.

1. Livraison

a. Parcourir le moins d'étages possible avec une bouteille

Je dois livrer des bouteilles pour alimenter les fontaines à eau d'un immeuble de bureaux. Ce matin, j'en ai déposé 2 au premier étage, 1 au deuxième, 3 au troisième. Le client s'est plaint : je n'ai pas livré aux bons étages. En réalité, il en faut 3 au quatrième, 1 au cinquième et 2 au sixième étage. J'y retourne.



Pas de chance, cet après-midi, l'ascenseur est en panne. Je vais devoir monter ces grosses bouteilles à pied ! Comment faire pour monter ou descendre le moins d'étages possible avec une bouteille sur l'épaule ?

b. Utilisation du tableur

Une solution au problème, c'est un tableau qui indique pour chaque bouteille à quel étage elle doit monter. Pour noter une solution, il est commode de faire un tableau où chaque ligne correspond à une bouteille, avec deux nombres, l'étage de départ et l'étage d'arrivée. Un tableur aide, mais on peut procéder à la main aussi.

1	4
1	5
2	4
3	6
3	4
3	6

1	4
1	4
2	4
3	6
3	5
3	6

On constate que toutes les manières de s'y prendre qui ne font descendre aucune bouteille donnent le même nombre d'étages pénibles : 16 (pas besoin de réfléchir, seulement du muscle).

Comment l'expliquer ? Le nombre total d'étages montés avec une bouteille s'obtient en additionnant des différences par lignes. Quand on calcule les sommes par colonnes, que voit-on ?

1	4	3
1	5	4
2	4	2
3	6	3
3	4	1
3	6	3
13	*29*	*16*

1	4	3
1	4	3
2	4	2
3	6	3
3	5	2
3	6	3
13	*29*	*16*

Faire la somme des différences par lignes ou la différence des sommes par colonnes revient au même. Plus concrètement, 13, c'est le nombre d'étages que j'ai dû monter le matin. 29, c'est le nombre d'étages que j'aurai montés au cours de la journée. Donc il reste 29-13 = 16 étages à monter l'après-midi, et ça ne dépend pas de la façon dont je répartis les bouteilles.

c. Grosse fatigue

Jusqu'à présent, on s'est intéressé au nombre d'étages parcourus. Mais la fatigue, c'est différent. Il est plus fatigant de monter une bouteille sur 2 étages sans arrêter que de monter 2 bouteilles sur un étage chacune en prenant le temps d'une pause entre les deux. On comptera 2 fois 2 = 4 points de fatigue. De même, s'il faut monter une bouteille sur 3 étages, on comptera 3 fois 3 = 9 points de fatigue. Sur 4 étages, c'est 4 fois 4 =16 points de fatigue : la fatigue, c'est le carré du nombre d'étages parcourus par la bouteille. Et quand on descend, c'est aussi fatigant, car c'est le poids qui compte. On se demande quelle méthode est la moins fatigante.

1	4	3	9
1	5	4	16
2	4	2	4
3	6	3	9
3	4	1	1
3	6	3	9
13	*29*	*16*	*48*

La fatigue totale dépend de la méthode choisie, elle vaut 48 pour la méthode ci-dessus. On peut faire mieux : 44.

Est-ce qu'on peut deviner une méthode (algorithme...) qui donne toujours le nombre d'étages parcourus le plus bas ? La fatigue la plus basse ?

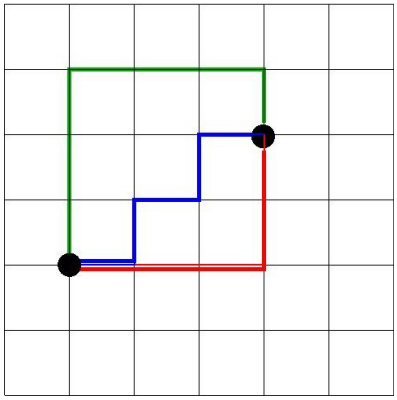
Moi je propose de faire comme ceci. Je range les deux colonnes (celle des positions initiales et celle des destinations) par ordre croissant, comme dans les exemples ci-dessus..

Je peux montrer qu'on ne peut pas faire mieux. C'est même la seule méthode qui donne le moins de fatigue (difficile pour des 6e-5e).

2. Le robot

Le livreur à pied, c'est du passé. Son travail est fait désormais par des robots qui se déplacent dans d'immenses entrepôts où les colis sont posés sur des armoires repérées par deux coordonnées, abscisse et ordonnée, comme sur une grille de mots-croisés. Les robots se déplacent sur des rails, le

long de la grille (pas de mouvements en diagonale).



a. Compter des chemins (cette partie peut être sautée par une partie de la classe)

Comment coder un tel chemin ? *Par une suite HHHDDDB, DHDHD, DDDHH par exemple*. Combien de pas font ils ? *Ici, 7, 5 et 5*. Peut on dénombrer les chemins dont le nombre de pas est le plus bas ? *(il s'agit des chemins à 5 pas, on en trouve 10)*.

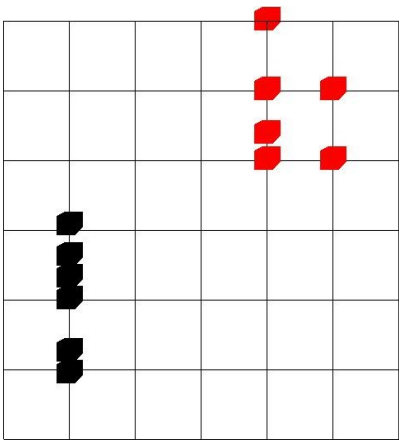
Quels sont les déplacements les plus courts entre l'armoire de coordonnées (1,2) et l'armoire de coordonnées (4,4) ?

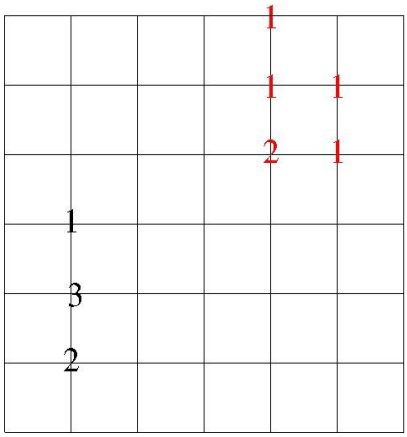
Ce sont tous ceux où on ne se déplace que vers la droite ou vers le haut.

Plus généralement, observer qu'il y a toujours un trajet où on se déplace une fois verticalement (vers le haut ou vers le bas), puis une fois horizontalement (vers la droite ou vers la gauche), et c'est tout. Aucun trajet n'est plus court que celui là.

Par conséquent, transporter un choix de colis d'une zone de l'entrepôt à une autre, mathématiquement, peut se décomposer en deux étapes : déplacer tous les colis verticalement, puis déplacer tous les colis horizontalement.

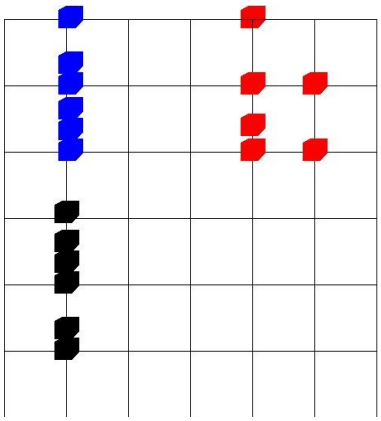
b. Cas particulier où, au départ, les colis sont sur une même ligne verticale

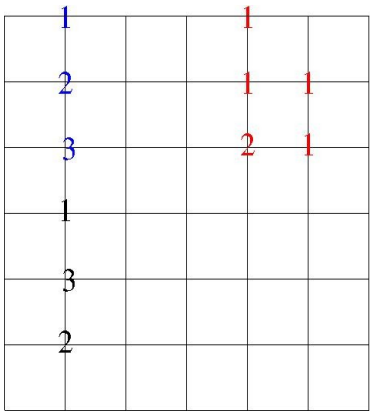




Vers quelle disposition doit on les déplacer verticalement ?

On n'a pas le choix, il faut déposer, sur chaque point de la colonne, le nombre exact de colis que doit comporter, à la fin, la ligne correspondante.





Décrire le plan de transport qui représente le moins de pas. Cela se passe en deux temps : déplacer les colis verticalement jusqu'aux positions indiquées en bleu sur la figure, puis horizontalement jusqu'aux positions indiquées en rouge. Ici, on compte seulement les pas faits par le robot transportant un colis (il ne transporte qu'un colis à la fois, on néglige les déplacements à vide).

Verticalement, on peut faire ceci.

1	4	3
1	4	3
2	4	2
2	5	3
2	5	3
3	6	3
		17

Ensuite, horizontalement, on peut faire cela pour chacune des lignes.

1	4	3
1	4	3
1	5	4
		10

1	4	3
1	5	4
		7

1	3	2

Cela donne un nombre total de pas égal à 17+10+7+2=36 pas.

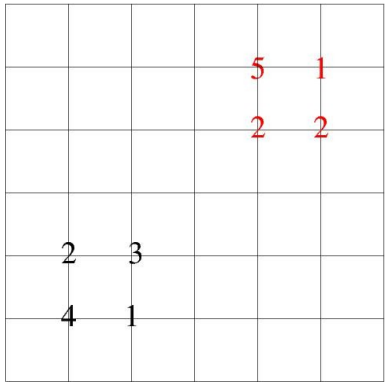
Il y a-t-il une seule manière de transporter les colis en faisant le moins de pas possible ?

Non, pour chacune des deux étapes de déplacement en ligne, il y a plusieurs méthodes possibles.

Quel est le plan de transport qui fatigue le moins ? On additionne ici des nombres de pas élevés au carré.

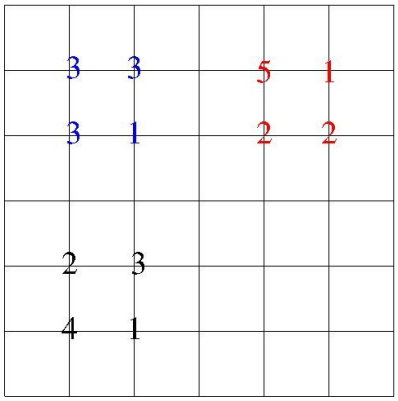
Là, il y a une seule manière de faire au mieux (cela résulte du théorème correspondant pour les déplacements en ligne).

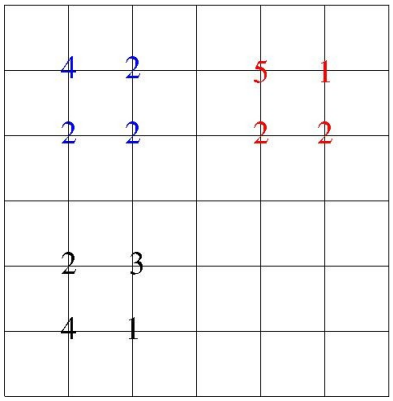
c. Cas particulier où les colis sont sur 4 points formant un carré et devant être déposés sur 4 points formant un carré



Y a-t-il une unique disposition vers laquelle déplacer les colis verticalement ?

Non, on a le choix, il y a plusieurs dispositions intermédiaires possibles (déshabiller une diagonale pour habiller l'autre). En voici deux.





S'il y a plusieurs dispositions intermédiaires, donnent-elles toutes le même nombre de pas ?

Oui si tous les déplacements se font dans le même sens : tout vers la droite (rien vers la gauche), tout vers le haut (rien vers le bas).

Et la même fatigue (on additionne le nombres de pas horizontaux élevé au carré et le nombre de pas verticaux élevé au carré) ?

Non, une seule méthode donne le moins de fatigue (pas facile).

3. Savez-vous qu'il y a des entrepôts où les robots se déplacent aussi vers le haut, donc dans les 3 dimensions ?

C'est juste pour faire sentir que l'histoire n'est pas terminée.

4. A l'usage de l'enseignant : enchaînement avec la conférence publique

Pourquoi additionner des distances élevées au carré ? A cause du Théorème de Pythagore. On se rapproche ainsi du problème original de Monge : déplacer du remblai sur un chantier. Tout de même, ce qu'on obtient, c'est une fatigue qui correspond au carré de la distance euclidienne, c'est loin de la réalité (distance non élevée au carré). Pourtant, c'est cette fatigue qui donne lieu à une belle théorie mathématique. Par exemple,

- Pour notre indicateur de fatigue, il y a un unique *plan de transport* optimal, qu'on peut décrire d'une façon assez précise (Yann Brenier 2003), sans pourtant pouvoir le calculer facilement.
- En utilisant astucieusement le transport optimal pour comparer deux régions du plan (une région inconnue et un disque de même aire, par exemple), on parvient à démontrer des théorèmes isopérimétriques (le disque a un périmètre inférieur à celui de toute région de même aire) (Dario Cordero-Erausquin, Bruno Nazaret, Cédric Villani 2004).
- Les fluides se meuvent par transport optimal : les équations d'Euler de la mécanique des fluides expriment que le fluide passe d'une position à une position infiniment proche en suivant le transport optimal (Léonard Euler 1757, Vladimir Arnold 1966).

Retour à la distance L1. C'est le nom savant qu'on donne à la distance du nombre de pas sur une grille, celle avec laquelle on vient de jouer. Elle joue un rôle important en informatique, à la fois sur le plan théorique et pratique.

La première question que pose le praticien qui a réuni des quantités énormes de données (par exemple, un commerçant qui garde une trace de toutes les actions des clients de son site de vente par internet, un biologiste qui a décrypté un bout du génome sur un échantillon d'êtres vivants), c'est : peut-on les grouper par paquets qui se ressemblent (par exemple, constituer des profils-type de clients, reconnaître des parentés entre les espèces, les individus) ? La distance du transport (le coût le plus faible pour transporter le relevé d'un client sur celui d'un autre) est bien adaptée. Le plan de transport optimal euclidien est long à calculer. Celui relatif à la distance L1 est beaucoup plus rapide, c'est celui-ci que l'informaticien préfèrera.

5. La conférence publique

Télécharger les diapositives là : http://www.math.u-psud.fr/~pansu/brouette_19mar15.pdf

Après la restitution des élèves, on explique le problème concret du déplacement des déblais, qui se situe en 3 dimensions. Il y a une version à 2 dimensions et une version à 1 dimension. Si on considère que la matière n'est pas continue comme de l'eau mais formée de grains (sable, gravier, pavés, parpaings), le problème en 1 dimension devient le déplacement des bouteilles, pratiqué par les élèves.

Au XVIIIème siècle, Monge a étudié le problème continu en 2 dimensions. Il a remarqué que le transport le moins fatigant se déroule le long de lignes droites, les équisécantes. En 3 dimensions, il est conduit à inventer un nouveau chapitre de la géométrie des surfaces.

Vie de Monge, fondateur de l'école de la République.

On peut transporter autre chose que de la terre, des ressources en économie (Leonid Kantorovitch), des pixels pour rehausser les couleurs des images (Jean-Michel Morel), ou pour comparer des images, comme le fait le comparateur de vêtements Smyle, http://www.smyle.io/.

Merci à Yann Brenier, Thierry Viéville et Etienne Ghys,