Développement limité de l'holonomie

Erlend Grong (Bergen, Supélec) et Pierre Pansu (Paris-Sud)

17 novembre 2017

Une *connexion* sur un G-fibré principal $P \to M$, c'est un champ de plans G-invariant, transverse aux fibres. Tout lacet γ dans M se relève en un chemin horizontal reliant deux points p et pg, $g \in G$, de la même fibre. $g = Hol_p(\gamma)$ est l'*holonomie* de la connexion le long de γ lue en p.

Classique. Si, dans une carte, γ_ϵ est le parallélogramme formé sur deux vecteurs $\epsilon v, \epsilon w$, alors

$$\exp^{-1} Hol_p(\gamma_\epsilon) = \Omega_p(v, w)\epsilon^2 + O(\epsilon^3),$$

où $\Omega_p \in \bigwedge^2 T_p^* M \otimes \mathfrak{g}$ est la courbure lue dans le repère p.

Une *connexion* sur un G-fibré principal $P \to M$, c'est un champ de plans G-invariant, transverse aux fibres. Tout lacet γ dans M se relève en un chemin horizontal reliant deux points p et pg, $g \in G$, de la même fibre. $g = Hol_p(\gamma)$ est l'*holonomie* de la connexion le long de γ lue en p.

Classique. Si, dans une carte, γ_ϵ est le parallélogramme formé sur deux vecteurs $\epsilon v, \epsilon w$, alors

$$\exp^{-1} Hol_p(\gamma_\epsilon) = \Omega_p(v, w)\epsilon^2 + O(\epsilon^3),$$

où $\Omega_p \in \bigwedge^2 T_p^* M \otimes \mathfrak{g}$ est la courbure lue dans le repère p.

Classique. Si G est abélien, Ω est une 2-forme scalaire,

$$\begin{aligned} \exp^{-1} Hol(\gamma) &= \int_{\mathrm{disque}} \Omega, \\ \exp^{-1} Hol(\gamma_\epsilon) &= \Omega(v, w)\epsilon^2 + \frac{1}{6}\nabla_{v+w}\Omega(v, w)\epsilon^3 + \cdots . \end{aligned}$$

Question

Quels sont les termes suivants du développement limité de l'holonomie ? Sont-ils linéaires en la courbure ?

Théorème (Grong-Pansu)

Dans une carte, on utilise la jauge radiale et on remplit les lacets par des cônes. Soit $m = 3 + k$ si Ω et ses dérivées covariantes jusqu'à l'ordre k s'annulent en p, $m = 2$ sinon. Alors

$$\begin{aligned} \exp^{-1} Hol_p(\gamma) &= \int_{\mathrm{cone}(\gamma)} \Omega + O(longueur(\gamma)^{2m}) \\ &= \int_{\mathrm{cone}(\gamma)} Taylor(\Omega, 2m) + O(longueur(\gamma)^{2m}). \end{aligned}$$

Théorème (Grong-Pansu)

Dans une carte, on utilise la jauge radiale et on remplit les lacets par des cônes. Soit $m = 3 + k$ si Ω et ses dérivées covariantes jusqu'à l'ordre k s'annulent en p, $m = 2$ sinon. Alors

$$\begin{aligned} \exp^{-1} Hol_p(\gamma) &= \int_{\mathrm{cone}(\gamma)} \Omega + O(longueur(\gamma)^{2m}) \\ &= \int_{\mathrm{cone}(\gamma)} Taylor(\Omega, 2m) + O(longueur(\gamma)^{2m}). \end{aligned}$$

Remarque. Comme $m \geq 2$, les termes quadratique et cubique du développement sont toujours linéaires en p. Si $\Omega_p \neq 0$, le terme suivant est quadratique en Ω.

Théorème (Grong-Pansu)

Dans une carte, on utilise la jauge radiale et on remplit les lacets par des cônes. Soit $m = 3 + k$ si Ω et ses dérivées covariantes jusqu'à l'ordre k s'annulent en p, $m = 2$ sinon. Alors

$$\begin{aligned} \exp^{-1} Hol_p(\gamma) &= \int_{\mathrm{cone}(\gamma)} \Omega + O(longueur(\gamma)^{2m}) \\ &= \int_{\mathrm{cone}(\gamma)} Taylor(\Omega, 2m) + O(longueur(\gamma)^{2m}). \end{aligned}$$

Remarque. Comme $m \geq 2$, les termes quadratique et cubique du développement sont toujours linéaires en p. Si $\Omega_p \neq 0$, le terme suivant est quadratique en Ω.

Question

Variante sous-riemannienne : quel développement lorsqu'on se limite aux lacets horizontaux, i.e. tangents à un champ de plans ?

Théorème (Pansu 1993, Grong-Pansu 2017)

Soit M^3 une variété de contact munie d'une connexion. Il existe une connexion modifiée ayant même holonomie le long des lacets horizontaux et dont la courbure $\tilde{\Omega}$ s'annule sur le plan de contact. Pour les lacets legendriens, on a le développement cubique

$$\exp^{-1} Hol_p(\gamma) = \int_{\mathrm{cone}(\gamma)} \tilde{\Omega} + O(longueur(\gamma)^6).$$

Théorème (Pansu 1993, Grong-Pansu 2017)

Soit M^3 une variété de contact munie d'une connexion. Il existe une connexion modifiée ayant même holonomie le long des lacets horizontaux et dont la courbure $\tilde{\Omega}$ s'annule sur le plan de contact. Pour les lacets legendriens, on a le développement cubique

$$\exp^{-1} Hol_p(\gamma) = \int_{\mathrm{cone}(\gamma)} \tilde{\Omega} + O(longueur(\gamma)^6).$$

Un groupe de Carnot possède des dilatations δ_s en tout point, d'où un ordre d'annulation pour les formes différentielles : α d'ordre $\geq m$ si $|\delta_s^* \alpha| = o(s^m)$.

Exemple. θ forme de contact sur le groupe d'Heisenberg.
$\alpha = a\, dx \wedge dy + b\, dy \wedge \theta + c\, \theta \wedge dx$ est d'ordre ≥ 3 en $e \iff a(e) = 0$.

Théorème (Pansu 1993, Grong-Pansu 2017)

Soit M^3 une variété de contact munie d'une connexion. Il existe une connexion modifiée ayant même holonomie le long des lacets horizontaux et dont la courbure $\tilde{\Omega}$ s'annule sur le plan de contact. Pour les lacets legendriens, on a le développement cubique

$$\exp^{-1} Hol_p(\gamma) = \int_{\mathrm{cone}(\gamma)} \tilde{\Omega} + O(longueur(\gamma)^6).$$

Un groupe de Carnot possède des dilatations δ_s en tout point, d'où un ordre d'annulation pour les formes différentielles : α d'ordre $\geq m$ si $|\delta_s^* \alpha| = o(s^m)$.

Exemple. θ forme de contact sur le groupe d'Heisenberg.
$\alpha = a\,dx \wedge dy + b\,dy \wedge \theta + c\,\theta \wedge dx$ est d'ordre ≥ 3 en $e \iff a(e) = 0$.

Théorème (Grong-Pansu 2017)

Soit N un groupe de Carnot muni d'une connexion. Soit m l'ordre d'annulation de la courbure. Pour les lacets horizontaux, on a le développement

$$\exp^{-1} Hol_p(\gamma) = \int_{\mathrm{cone}(\gamma)} \tilde{\Omega} + O(longueur(\gamma)^{2m}).$$

Théorème (Chitour-Grong-Jean-Kokkonen)

Soit N un groupe de Carnot muni d'une connexion. Il existe une connexion modifiée ayant même holonomie le long des lacets horizontaux et dont la courbure $\tilde{\Omega}$ a un ordre $m \geq w_{min}(\mathfrak{n})$, où

$$w_{min}(\mathfrak{n}) = \min\{w\,;\; H^{2,w}(\mathfrak{n}) \neq 0\}.$$

La courbure modifiée $\tilde{\Omega}$ dépend linéairement de la courbure initiale Ω.

Exemple. Soit $F_{s,n}$ le groupe de Lie nilpotent libre de classe s à n générateurs. La connexion modifiée est d'ordre $\geq s+1$.

Théorème (Chitour-Grong-Jean-Kokkonen)

Soit N un groupe de Carnot muni d'une connexion. Il existe une connexion modifiée ayant même holonomie le long des lacets horizontaux et dont la courbure $\tilde{\Omega}$ a un ordre $m \geq w_{min}(\mathfrak{n})$, où

$$w_{min}(\mathfrak{n}) = \min\{w\,;\ H^{2,w}(\mathfrak{n}) \neq 0\}.$$

La courbure modifiée $\tilde{\Omega}$ dépend linéairement de la courbure initiale Ω.

Exemple. Soit $F_{s,n}$ le groupe de Lie nilpotent libre de classe s à n générateurs. La connexion modifiée est d'ordre $\geq s+1$.

Corollaire

Etant donnée une connexion sur $F_{s,n}$, le développement à l'ordre $2s+2$ de l'holonomie pour les lacets horizontaux est linéaire en la courbure. Il commence à l'ordre $s+1$.

Corollaire

Etant donnée une connexion sur $\mathbb{R}^n$, le développement à l'ordre $2s+2$ de l'holonomie pour les lacets dont le relèvement à $F_{s,n}$ est un lacet est linéaire en la courbure.

Corollaire

Etant donnée une connexion sur $\mathbb{R}^n$, le développement à l'ordre $2s+2$ de l'holonomie pour les lacets dont le relèvement à $F_{s,n}$ est un lacet est linéaire en la courbure.

Notation. Si γ est un lacet basé en 0 dans $\mathbb{R}^n$, on note $End(\gamma) \in [F_{s,n}, F_{s,n}]$ l'extrémité de son relèvement $\tilde{\gamma}$ horizontal d'origine e dans $F_{s,n}$.

Corollaire

Etant donnée une connexion ∇ sur $\mathbb{R}^n \times G$, il existe des applications $H_\Omega : [F_{s,n}, F_{s,n}] \to G$ et $I_\Omega : [F_{s,n}, F_{s,n}] \to \mathfrak{g}$, ne dépendant que de la courbure Ω de ∇, telles que pour tout lacet γ de $\mathbb{R}^n$,

$$\exp^{-1}\left((H_\Omega \circ End(\gamma))^{-1} Hol(\gamma)\right) - I_\Omega(End(\gamma)) = \int_{\mathrm{cone}(\tilde{\gamma})} \tilde{\Omega} + O(longueur(\gamma)^{2s+2}).$$

Ce développement démarre à l'ordre $s+1$.

Corollaire

Etant donnée une connexion sur $\mathbb{R}^n$, le développement à l'ordre $2s+2$ de l'holonomie pour les lacets dont le relèvement à $F_{s,n}$ est un lacet est linéaire en la courbure.

Notation. Si γ est un lacet basé en 0 dans $\mathbb{R}^n$, on note $End(\gamma) \in [F_{s,n}, F_{s,n}]$ l'extrémité de son relèvement $\tilde{\gamma}$ horizontal d'origine e dans $F_{s,n}$.

Corollaire

Etant donnée une connexion ∇ sur $\mathbb{R}^n \times G$, il existe des applications $H_\Omega : [F_{s,n}, F_{s,n}] \to G$ et $I_\Omega : [F_{s,n}, F_{s,n}] \to \mathfrak{g}$, ne dépendant que de la courbure Ω de ∇, telles que pour tout lacet γ de $\mathbb{R}^n$,

$$\exp^{-1}\left((H_\Omega \circ End(\gamma))^{-1} Hol(\gamma)\right) - I_\Omega(End(\gamma)) = \int_{\mathrm{cone}(\tilde{\gamma})} \tilde{\Omega} + O(longueur(\gamma)^{2s+2}).$$

Ce développement démarre à l'ordre $s+1$.

Interprétation. Caractère universel de la fibration principale avec connexion $F_{s,n} \to \mathbb{R}^n$: son holonomie détermine de façon approchée l'holonomie de toute connexion.

Soit $E = \mathbb{R}^n$. Dans l'algèbre tensorielle $T = \bigoplus_{s\in\mathbb{N}} E^{\otimes s}$, soit L le sous-espace engendré par $L^1 = E, \ldots, L^{s+1} = [E, L^s], \ldots$. Alors L est isomorphe à l'algèbre de Lie libre, et le sous-groupe $G = \exp(L) \subset T$ est une sorte de groupe de Lie libre : en quotientant par les éléments de degré $> s$, on trouve $F_{s,n}$.

Soit $E = \mathbb{R}^n$. Dans l'algèbre tensorielle $T = \bigoplus_{s\in\mathbb{N}} E^{\otimes s}$, soit L le sous-espace engendré par $L^1 = E, \ldots, L^{s+1} = [E, L^s], \ldots$. Alors L est isomorphe à l'algèbre de Lie libre, et le sous-groupe $G = \exp(L) \subset T$ est une sorte de groupe de Lie libre : en quotientant par les éléments de degré $> s$, on trouve $F_{s,n}$.

Chaque courbe rectifiable $t \mapsto x(t)$, $[a, b] \to E$ a une *signature* $S(x) \in G$, c'est la suite des intégrales itérées

$$\int_{a<u_1<\cdots<u_n<b} x(u_1) \otimes \cdots \otimes x(u_n)\, du_1 \cdots du_n.$$

L'ensemble des courbes rectifiables, à reparamétrage près, est un pseudo-groupe pour la concaténation. La signature est un homomorphisme de pseudo-groupes, dont le noyau est l'ensemble des lacets qui factorisent par un arbre, i.e. le long desquels toute connexion a une holonomie triviale.

Soit $E = \mathbb{R}^n$. Dans l'algèbre tensorielle $T = \bigoplus_{s \in \mathbb{N}} E^{\otimes s}$, soit L le sous-espace engendré par $L^1 = E, \ldots, L^{s+1} = [E, L^s], \ldots$. Alors L est isomorphe à l'algèbre de Lie libre, et le sous-groupe $G = \exp(L) \subset T$ est une sorte de groupe de Lie libre : en quotientant par les éléments de degré $> s$, on trouve $F_{s,n}$.

Chaque courbe rectifiable $t \mapsto x(t)$, $[a, b] \to E$ a une *signature* $S(x) \in G$, c'est la suite des intégrales itérées

$$\int_{a<u_1<\cdots<u_n<b} x(u_1) \otimes \cdots \otimes x(u_n) \, du_1 \cdots du_n.$$

L'ensemble des courbes rectifiables, à reparamétrage près, est un pseudo-groupe pour la concaténation. La signature est un homomorphisme de pseudo-groupes, dont le noyau est l'ensemble des lacets qui factorisent par un arbre, i.e. le long desquels toute connexion a une holonomie triviale.

Question. Etant donnée une connexion sur $\mathbb{R}^n$, les termes du développement limité en s de l'holonomie de $\delta_s \gamma$ sont-ils des fonctions sur G ?
Question. La procédure de Chitour-Grong-Jean-Kokkonen produit-elle une connexion plate sur G ?

Dans la jauge radiale, le long du cône sur γ, $(s,t) \mapsto \delta_s\gamma(t)$, la matrice de connexion s'écrit $A = A(s,t)dt$, donc la courbure s'écrit $\Omega = dA + [A,A] = dA$, d'où

$$\int_{\mathrm{cone}(\gamma)} \Omega = \int_{\mathrm{cone}(\gamma)} dA = \int_\gamma A.$$

Dans la jauge radiale, le long du cône sur γ, $(s,t) \mapsto \delta_s\gamma(t)$, la matrice de connexion s'écrit $A = A(s,t)dt$, donc la courbure s'écrit $\Omega = dA + [A,A] = dA$, d'où

$$\int_{\mathrm{cone}(\gamma)} \Omega = \int_{\mathrm{cone}(\gamma)} dA = \int_\gamma A.$$

Aussi, $\Omega(s,t) = \frac{\partial A(s,t)}{\partial s}$ et $A(0,t) = 0$ donc $\|A\|_\infty = O(\|\Omega\|_\infty)$.

Dans la jauge radiale, le long du cône sur γ, $(s,t)\mapsto\delta_s\gamma(t)$, la matrice de connexion s'écrit $A=A(s,t)dt$, donc la courbure s'écrit $\Omega=dA+[A,A]=dA$, d'où

$$\int_{\mathrm{cone}(\gamma)}\Omega=\int_{\mathrm{cone}(\gamma)}dA=\int_\gamma A.$$

Aussi, $\Omega(s,t)=\frac{\partial A(s,t)}{\partial s}$ et $A(0,t)=0$ donc $\|A\|_\infty=O(\|\Omega\|_\infty)$.

Lemme

Si $\|A\|_\infty$ est suffisamment petit, $\exp^{-1} Hol(\gamma)=\int_\gamma A+O(\|A\|_\infty^2)$.

L'holonomie est $a(1)$ où $a(0)=1$ et $a'(t)=A(t)a(t)$. Alors $Q(t)=\exp^{-1}a(t)$ satisfait

$$\mathcal{F}(Q)(t):=\int_0^t g(ad\,Q(\tau))A(\tau)\,d\tau=Q(t),\quad \text{où}\quad g(z)=\frac{z}{1-e^{-z}}.$$

Sur $C^0([0,1])$, $\mathcal{F}$ est λ-lipschizienne, $\lambda=\|g'\|_\infty\|A\|_\infty$, donc $Q=\lim_{k\to\infty}\mathcal{F}^k(0)$ existe, et

$$|Q(1)-\int_\gamma A|\leq\|Q-\mathcal{F}(0)\|_\infty\leq\frac{\lambda}{1-\lambda}\|\mathcal{F}(0)\|_\infty\leq\frac{\|g'\|_\infty\|A\|_\infty^2}{1-\|g'\|_\infty\|A\|_\infty}.$$

Pour une variété sous-riemannienne équirégulière, les k-formes différentielles sont filtrées par le *poids* : $\Omega^{k,\geq w}$ = formes annulées par tous les multivecteurs $X_1 \wedge \cdots \wedge X_s$, X_i = crochet w_i-uple de champs horizontaux, $\sum w_i = w$.

Exemple. θ forme de contact.

$$\Omega^k = \Omega^{k,\geq k} \supset \Omega^{k,\geq k+1} = \theta \wedge \Omega^{k-1} \supset \{0\}.$$

Une fonction s'annule à l'*ordre s* en m si $f(m') = O(d_{cc}(m, m')^s)$. Une forme est d'ordre $\geq m$ si c'est le cas dans des coordonnées *privilégiées* $(z_1, \ldots, z_n)$, i.e. où z_j est d'ordre $\geq m_j$.

Théorème (Chitour-Grong-Jean-Kokkonen)

M variété sous-riemannienne équirégulière munie d'une connexion. Il existe une connexion modifiée ayant même holonomie le long des lacets horizontaux et dont la courbure $\tilde{\Omega}$ a un poids $m \geq w_{min}(\mathfrak{n})$, où $\mathfrak{n}$ est l'algèbre de Lie graduée tangente et

$$w_{min}(\mathfrak{n}) = \min\{w\,;\ H^{2,w}(\mathfrak{n}) \neq 0\}.$$