

Du groupe d'Heisenberg vers les espaces L^p

P. Pansu, Université Paris-Saclay

26-27 janvier 2023

Le groupe d'Heisenberg \mathbb{H} est le sous-groupe de $GL(3, \mathbb{Z})$ formé des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & x & t \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad x, y, t \in \mathbb{Z}.$$

Le groupe d'Heisenberg \mathbb{H} est le sous-groupe de $GL(3, \mathbb{Z})$ formé des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & x & t \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad x, y, t \in \mathbb{Z}.$$

Les matrices

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et leurs inverses engendrent ce groupe. Par exemple, $c = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ s'écrit

$$c = aba^{-1}b^{-1}.$$

Le groupe d'Heisenberg \mathbb{H} est le sous-groupe de $GL(3, \mathbb{Z})$ formé des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & x & t \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad x, y, t \in \mathbb{Z}.$$

Les matrices

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et leurs inverses engendrent ce groupe. Par exemple, $c = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ s'écrit

$$c = aba^{-1}b^{-1}.$$

On forme un graphe, le *graphe de Cayley* de \mathbb{H} , dont les sommets sont les éléments de \mathbb{H} , et une arête relie $g \in \mathbb{H}$ à gs pour tout $s \in S := \{a, b, a^{-1}, b^{-1}\}$. Cela produit une distance invariante à gauche sur \mathbb{H} .

On s'intéresse aujourd'hui à \mathbb{H} comme espace métrique.

Plus généralement, le groupe d'Heisenberg \mathbb{H}^{2n+1} est le sous-groupe de $Gl(n+2, \mathbb{Z})$ formé des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & \cdots & x_n & t \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & y_1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & y_n \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}, x_i, y_i, t \in \mathbb{Z}.$$

et il y a $2n$ générateurs naturels.

Plus généralement, le groupe d'Heisenberg \mathbb{H}^{2n+1} est le sous-groupe de $Gl(n+2, \mathbb{Z})$ formé des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & \cdots & x_n & t \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & y_1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & y_n \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}, x_i, y_i, t \in \mathbb{Z}.$$

et il y a $2n$ générateurs naturels.

On s'intéresse (on verra plus loin pourquoi) aux plongements de \mathbb{H}^{2n+1} dans L^p , et à leur compression.

Définition

Soit $f : X \rightarrow Y$ un plongement lipschitzien entre espaces métriques. Sa **compression** est la plus grande fonction croissante $\omega : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que pour tous $x, x' \in X$,

$$d(f(x), f(x')) \geq \omega(d(x, x')).$$

La **compression** $L^p \text{Comp}_p(X)$ est la plus grande compression d'un plongement lipschitzien de X dans L^p .

La compression est toujours au plus linéaire. Plus elle est basse, plus l'espace est sauvage.

En géométrie des Banach, on préfère la terminologie suivante, pour des espaces métriques typiquement finis.

Définition

Soit X un espace métrique. Sa **distorsion** L^p $c_p(X)$ est la borne inférieure des réels D tels qu'il existe un plongement f de X dans L^p tel que pour tous $x, x' \in X$,

$$d(x, x') \leq d(f(x), f(x')) \leq D d(x, x').$$

En géométrie des Banach, on préfère la terminologie suivante, pour des espaces métriques typiquement finis.

Définition

Soit X un espace métrique. Sa **distorsion** L^p $c_p(X)$ est la borne inférieure des réels D tels qu'il existe un plongement f de X dans L^p tel que pour tous $x, x' \in X$,

$$d(x, x') \leq d(f(x), f(x')) \leq D d(x, x').$$

La distorsion des boules de rayon r de X et la compression de X sont reliées par

$$\text{Comp}_p(X)(r) \leq \frac{r}{c_p(B(r))},$$

et dans les exemples que nous allons étudier, il y a égalité.

En géométrie des Banach, on préfère la terminologie suivante, pour des espaces métriques typiquement finis.

Définition

Soit X un espace métrique. Sa **distorsion** L^p $c_p(X)$ est la borne inférieure des réels D tels qu'il existe un plongement f de X dans L^p tel que pour tous $x, x' \in X$,

$$d(x, x') \leq d(f(x), f(x')) \leq D d(x, x').$$

La distorsion des boules de rayon r de X et la compression de X sont reliées par

$$\text{Comp}_p(X)(r) \leq \frac{r}{c_p(B(r))},$$

et dans les exemples que nous allons étudier, il y a égalité.

L'objet du cours est d'expliquer pourquoi et comment on détermine les compressions L^p des groupes d'Heisenberg. Les motivations et techniques relèvent de mathématiques très variées : complexité algorithmique, théorie des modèles, analyse fonctionnelle, analyse de Fourier, théorie géométrique de la mesure. On jongle souvent entre fini et infini discret et entre discret et continu.

En géométrie des Banach, on préfère la terminologie suivante, pour des espaces métriques typiquement finis.

Définition

Soit X un espace métrique. Sa **distorsion** L^p $c_p(X)$ est la borne inférieure des réels D tels qu'il existe un plongement f de X dans L^p tel que pour tous $x, x' \in X$,

$$d(x, x') \leq d(f(x), f(x')) \leq D d(x, x').$$

La distorsion des boules de rayon r de X et la compression de X sont reliées par

$$\text{Comp}_p(X)(r) \leq \frac{r}{c_p(B(r))},$$

et dans les exemples que nous allons étudier, il y a égalité.

L'objet du cours est d'expliquer pourquoi et comment on détermine les compressions L^p des groupes d'Heisenberg. Les motivations et techniques relèvent de mathématiques très variées : complexité algorithmique, théorie des modèles, analyse fonctionnelle, analyse de Fourier, théorie géométrique de la mesure. On jongle souvent entre fini et infini discret et entre discret et continu.

Voici les résultats, c'est surtout le second qui sera expliqué en détail.

Théorème (T. Austin - A. Naor - R. Tessera, 2013)

La compression L^p du groupe d'Heisenberg \mathbb{H}^{2n+1} satisfait, à des termes en $\log \log t$ près,

- 1 si $1 < p \leq 2$, $\text{Comp}_p(\mathbb{H}^{2n+1})(t) \sim \frac{t}{\log(t)^{1/2}}$,
- 2 si $p \geq 2$, $\text{Comp}_p(\mathbb{H}^{2n+1})(t) \sim \frac{t}{\log(t)^{1/p}}$,

Théorème (T. Austin - A. Naor - R. Tessera, 2013)

La compression L^p du groupe d'Heisenberg \mathbb{H}^{2n+1} satisfait, à des termes en $\log \log t$ près,

① si $1 < p \leq 2$, $\text{Comp}_p(\mathbb{H}^{2n+1})(t) \sim \frac{t}{\log(t)^{1/2}}$,

② si $p \geq 2$, $\text{Comp}_p(\mathbb{H}^{2n+1})(t) \sim \frac{t}{\log(t)^{1/p}}$,

Théorème (A. Naor - R. Young, 2018)

La compression L^1 du groupe d'Heisenberg \mathbb{H}^5 satisfait, à des termes en $\log \log t$ près,

$$\text{Comp}_1(\mathbb{H}^5)(t) \sim \frac{t}{\log(t)^{1/2}}.$$

[Retour](#)

Théorème (T. Austin - A. Naor - R. Tessera, 2013)

La compression L^p du groupe d'Heisenberg \mathbb{H}^{2n+1} satisfait, à des termes en $\log \log t$ près,

① si $1 < p \leq 2$, $\text{Comp}_p(\mathbb{H}^{2n+1})(t) \sim \frac{t}{\log(t)^{1/2}}$,

② si $p \geq 2$, $\text{Comp}_p(\mathbb{H}^{2n+1})(t) \sim \frac{t}{\log(t)^{1/p}}$,

Théorème (A. Naor - R. Young, 2018)

La compression L^1 du groupe d'Heisenberg \mathbb{H}^5 satisfait, à des termes en $\log \log t$ près,

$$\text{Comp}_1(\mathbb{H}^5)(t) \sim \frac{t}{\log(t)^{1/2}}.$$

[← Retour](#)

Théorème (A. Naor - R. Young, 2022)

La compression L^1 du groupe d'Heisenberg \mathbb{H}^3 satisfait, à des termes en $\log \log t$ près,

$$\text{Comp}_1(\mathbb{H}^3)(t) \sim \frac{t}{\log(t)^{1/4}}.$$

Plan du cours

- 1 *Motivation provenant de l'informatique théorique*
 - Approche par la programmation linéaire
 - Approche par la programmation semi-définie
 - Majoration de $\rho(n)$
- 2 *Pourquoi le groupe d'Heisenberg ?*
 - Autosimilarité
 - Différentiation
 - Non-plongeabilité dans L^1
 - Réduction du non-plongement des boules au non-plongement de \mathbb{H}
- 3 *Inégalités fonctionnelles*
 - Existence de plongements de grande compression
 - Réduction à une inégalité fonctionnelle
 - Passage au continu
 - L'inégalité $(VH_{2,2,\mathbb{R}})$
- 4 *Théorie géométrique de la mesure*
 - Réduction à la comparaison des périmètres
 - Graphes intrinsèques lipschitziens
 - Coronisations
 - Périmètres en dimension 3

Un plongement d'un espace métrique fini dans l'espace euclidien ou/et dans L^1 intervient souvent dans les algorithmes de base de l'informatique théorique. On va le voir pour le problème Sparsest Cut.

Le meilleur algorithme connu pour une résolution approchée de Sparsest Cut donne, dans le pire des cas, pour un graphe à n sommets, une réponse qui diffère de l'optimum d'un facteur au plus égal à la constante $\rho(n)$ définie comme suit.

Un plongement d'un espace métrique fini dans l'espace euclidien ou/et dans L^1 intervient souvent dans les algorithmes de base de l'informatique théorique. On va le voir pour le problème Sparsest Cut.

Le meilleur algorithme connu pour une résolution approchée de Sparsest Cut donne, dans le pire des cas, pour un graphe à n sommets, une réponse qui diffère de l'optimum d'un facteur au plus égal à la constante $\rho(n)$ définie comme suit.

Notation

On considère tous les espaces métriques à n points (X, d) tels que $(X, d^{1/2})$ se plonge isométriquement dans l'espace euclidien. Soit $\rho(n)$ le plus petit λ tel que tous ces espaces admettent un plongement λ -lipschitzien et qui augmente les distances dans L^1 .

Un plongement d'un espace métrique fini dans l'espace euclidien ou/et dans L^1 intervient souvent dans les algorithmes de base de l'informatique théorique. On va le voir pour le problème Sparsest Cut.

Le meilleur algorithme connu pour une résolution approchée de Sparsest Cut donne, dans le pire des cas, pour un graphe à n sommets, une réponse qui diffère de l'optimum d'un facteur au plus égal à la constante $\rho(n)$ définie comme suit.

Notation

On considère tous les espaces métriques à n points (X, d) tels que $(X, d^{1/2})$ se plonge isométriquement dans l'espace euclidien. Soit $\rho(n)$ le plus petit λ tel que tous ces espaces admettent un plongement λ -lipschitzien et qui augmente les distances dans L^1 .

M.X. Goemans (en 1997) et N. Linial (en 2002) ont demandé si $\rho(n)$ est borné indépendamment de n (c'est le cas si on se restreint aux sous-ensembles d'un espace de Banach).

Un plongement d'un espace métrique fini dans l'espace euclidien ou/et dans L^1 intervient souvent dans les algorithmes de base de l'informatique théorique. On va le voir pour le problème Sparsest Cut.

Le meilleur algorithme connu pour une résolution approchée de Sparsest Cut donne, dans le pire des cas, pour un graphe à n sommets, une réponse qui diffère de l'optimum d'un facteur au plus égal à la constante $\rho(n)$ définie comme suit.

Notation

On considère tous les espaces métriques à n points (X, d) tels que $(X, d^{1/2})$ se plonge isométriquement dans l'espace euclidien. Soit $\rho(n)$ le plus petit λ tel que tous ces espaces admettent un plongement λ -lipschitzien et qui augmente les distances dans L^1 .

M.X. Goemans (en 1997) et N. Linial (en 2002) ont demandé si $\rho(n)$ est borné indépendamment de n (c'est le cas si on se restreint aux sous-ensembles d'un espace de Banach).

En 2005, S. Khot et N. Vishnoi ont donné un contre-exemple.

Les boules du graphe de Cayley du groupe de Heisenberg fournissent d'autres contre-exemples, plus riches, qui conduisent à des bornes optimales sur $\rho(n)$.

Problème

Sparsest Cut consiste à calculer la constante de Cheeger d'un graphe fini.

Une *coupe* dans un graphe G est une partition des sommets en $G^0 = S \cup \bar{S}$.

$$\Phi(S) = \frac{\#\partial S}{\#S \#\bar{S}}.$$

La *constante de Cheeger* de G est $\Phi^*(G) = \min_{\emptyset \subsetneq S \subsetneq G^0} \Phi(S)$.

Le calcul exact de Φ^* est NP-difficile. Mais une coupe (presque) optimale est fréquemment utilisée dans des algorithmes.

Problème

Sparsest Cut consiste à calculer la constante de Cheeger d'un graphe fini.

Une *coupure* dans un graphe G est une partition des sommets en $G^0 = S \cup \bar{S}$.

$$\Phi(S) = \frac{\#\partial S}{\#S \# \bar{S}}.$$

La *constante de Cheeger* de G est $\Phi^*(G) = \min_{\emptyset \subsetneq S \subsetneq G^0} \Phi(S)$.

Le calcul exact de Φ^* est NP-difficile. Mais une coupure (presque) optimale est fréquemment utilisée dans des algorithmes.

Version pondérée. Plus généralement, on se donne deux matrices C (les capacités) et D (les demandes), à coefficients positifs ou nuls, et on note, pour une coupure S ,

$$\Phi(S) = \frac{\sum_{u \in S} \sum_{v \in \bar{S}} C_{u,v}}{\sum_{u \in S} \sum_{v \in \bar{S}} D_{u,v}}.$$

Il s'agit de calculer (approximativement)

$$\Phi^*(G) = \min_{\emptyset \subsetneq S \subsetneq G^0} \Phi(S).$$

Arithmétisation

$$\Phi(S) = \frac{\sum_{u,v} C_{uv} |1_S(u) - 1_S(v)|}{\sum_{u,v} D_{uv} |1_S(u) - 1_S(v)|}.$$

Arithmétisation

$$\Phi(S) = \frac{\sum_{u,v} C_{uv} |1_S(u) - 1_S(v)|}{\sum_{u,v} D_{uv} |1_S(u) - 1_S(v)|}.$$

Soit $d(u, v) = |1_S(u) - 1_S(v)|$. C'est une semi-distance sur G^0 , induite par une application vers l'espace métrique à 2 points $\{0, 1\}$. L'enveloppe convexe de ces semi-distances est exactement l'ensemble des semi-distances plongeables dans ℓ^1 .

Arithmétisation

$$\Phi(S) = \frac{\sum_{u,v} C_{uv} |1_S(u) - 1_S(v)|}{\sum_{u,v} D_{uv} |1_S(u) - 1_S(v)|}.$$

Soit $d(u, v) = |1_S(u) - 1_S(v)|$. C'est une semi-distance sur G^0 , induite par une application vers l'espace métrique à 2 points $\{0, 1\}$. L'enveloppe convexe de ces semi-distances est exactement l'ensemble des semi-distances plongeables dans ℓ^1 . Par conséquent,

$$\begin{aligned} \Phi^* &= \min_{d \text{ plongeable dans } \ell^1} \frac{\sum_{u,v} C_{uv} d(u, v)}{\sum_{u,v} D_{uv} d(u, v)} \\ &= \min \left\{ \sum_{u,v} C_{uv} d(u, v) \mid d \text{ plongeable dans } \ell^1, \sum_{u,v} D_{uv} d(u, v) = 1 \right\}. \end{aligned}$$

Arithmétisation

$$\Phi(S) = \frac{\sum_{u,v} C_{uv} |1_S(u) - 1_S(v)|}{\sum_{u,v} D_{uv} |1_S(u) - 1_S(v)|}.$$

Soit $d(u, v) = |1_S(u) - 1_S(v)|$. C'est une semi-distance sur G^0 , induite par une application vers l'espace métrique à 2 points $\{0, 1\}$. L'enveloppe convexe de ces semi-distances est exactement l'ensemble des semi-distances plongeables dans ℓ^1 . Par conséquent,

$$\begin{aligned} \Phi^* &= \min_{d \text{ plongeable dans } \ell^1} \frac{\sum_{u,v} C_{uv} d(u, v)}{\sum_{u,v} D_{uv} d(u, v)} \\ &= \min \left\{ \sum_{u,v} C_{uv} d(u, v) \mid d \text{ plongeable dans } \ell^1, \sum_{u,v} D_{uv} d(u, v) = 1 \right\}. \end{aligned}$$

Malheureusement, le problème de décider si un espace métrique fini est plongeable ou non dans ℓ^1 est NP-complet.

Relaxation de Linial-London-Rabinovich. Oublions la condition de plongeabilité dans ℓ^1 . Cela ramène à un problème de programmation linéaire, noté LP, pour lequel il existe des algorithmes polynômiaux. Soit Φ^{LP} le minimum de ce problème.

Relaxation de Linial-London-Rabinovich. Oublions la condition de plongeabilité dans ℓ^1 . Cela ramène à un problème de programmation linéaire, noté LP, pour lequel il existe des algorithmes polynômiaux. Soit Φ^{LP} le minimum de ce problème.

Théorème (J. Bourgain, 1985)

Tout espace métrique à n points se plonge dans L^2 (et donc dans L^1) avec distorsion au plus $O(\log(n))$. C'est optimal.

Relaxation de Linial-London-Rabinovich. Oublions la condition de plongeabilité dans ℓ^1 . Cela ramène à un problème de programmation linéaire, noté LP, pour lequel il existe des algorithmes polynômiaux. Soit Φ^{LP} le minimum de ce problème.

Théorème (J. Bourgain, 1985)

Tout espace métrique à n points se plonge dans L^2 (et donc dans L^1) avec distorsion au plus $O(\log(n))$. C'est optimal.

Corollaire

$$\Phi^{LP} \leq \Phi^* \leq C \log(n) \Phi^{LP},$$

ce qui montre que LP fournit une approximation de Φ^ à un facteur multiplicatif $\log(n)$ près.*

Relaxation de Linial-London-Rabinovich. Oublions la condition de plongeabilité dans ℓ^1 . Cela ramène à un problème de programmation linéaire, noté LP, pour lequel il existe des algorithmes polynômiaux. Soit Φ^{LP} le minimum de ce problème.

Théorème (J. Bourgain, 1985)

Tout espace métrique à n points se plonge dans L^2 (et donc dans L^1) avec distorsion au plus $O(\log(n))$. C'est optimal.

Corollaire

$$\Phi^{LP} \leq \Phi^* \leq C \log(n) \Phi^{LP},$$

ce qui montre que LP fournit une approximation de Φ^ à un facteur multiplicatif $\log(n)$ près.*

Démonstration. La métrique d' plongeable dans ℓ^1 qui est $O(\log(n))$ -proche de la solution d de LP satisfait

$$\Phi^* \leq \Phi(d') \leq C \log(n) \Phi^* = C \log(n) \Phi^{LP}.$$

Procédure d'arrondi

Théorème (N. Linial - E. London - Y. Rabinovich, 1995)

Le plongement de Bourgain est calculable en temps polynômial, on peut en tirer en temps polynômial une coupure S qui réalise approximativement Φ^{LP} .

Arithmétisation. On peut aussi écrire

$$\Phi(S) = \frac{\sum_{u,v} C_{uv} |1_S(u) - 1_S(v)|^2}{\sum_{u,v} D_{uv} |1_S(u) - 1_S(v)|^2}.$$

Arithmétisation. On peut aussi écrire

$$\Phi(S) = \frac{\sum_{u,v} C_{uv} |1_S(u) - 1_S(v)|^2}{\sum_{u,v} D_{uv} |1_S(u) - 1_S(v)|^2}.$$

Relaxation de Goemans et Linial. On autorise des fonctions $x : G^0 \rightarrow L^2$ et non seulement à valeurs dans $\{0, 1\}$, en gardant la contrainte

$$\forall u, v, w \in G^0, \quad |x(u) - x(v)|^2 \leq |x(u) - x(w)|^2 + |x(w) - x(v)|^2,$$

satisfaite par les fonctions indicatrices. Cela ramène à un problème de programmation semi-définie, noté SDP, pour lequel il existe des algorithmes polynômiaux. Soit $\Phi^{SDP} = \Phi(x)$ son minimum.

Arithmétisation. On peut aussi écrire

$$\Phi(S) = \frac{\sum_{u,v} C_{uv} |1_S(u) - 1_S(v)|^2}{\sum_{u,v} D_{uv} |1_S(u) - 1_S(v)|^2}.$$

Relaxation de Goemans et Linial. On autorise des fonctions $x : G^0 \rightarrow L^2$ et non seulement à valeurs dans $\{0, 1\}$, en gardant la contrainte

$$\forall u, v, w \in G^0, \quad |x(u) - x(v)|^2 \leq |x(u) - x(w)|^2 + |x(w) - x(v)|^2,$$

satisfaite par les fonctions indicatrices. Cela ramène à un problème de programmation semi-définie, noté SDP, pour lequel il existe des algorithmes polynômiaux. Soit $\Phi^{SDP} = \Phi(x)$ son minimum.

Soit $d(u, v) = |x(u) - x(v)|^2$. C'est une semi-distance sur G^0 , et $d^{1/2}$ est induite par un plongement dans l'espace euclidien. Par conséquent,

$$\Phi^{SDP} = \min \left\{ \sum_{u,v} C_{uv} d(u, v) \mid \begin{array}{l} d \text{ semi-distance, } \sqrt{d} \text{ plongable dans } L^2, \\ \sum_{u,v} D_{uv} d(u, v) = 1 \end{array} \right\}.$$

Notons

$$GoLi(n) = \sup_{C, D \in M_n(\mathbb{R}_+)} \frac{\Phi^*}{\Phi^{SDP}}$$

le *saut d'intégralité* de la relaxation de Goemans-Linial.

On a montré que

$$GoLi(n) \leq \rho(n),$$

où $\rho(n)$ est la plus petite constante λ telle que tout espace semi-métrique à n points (X, d) tel que (X, \sqrt{d}) est plongable isométriquement dans L^2 admette un plongement λ -lipschitzien, augmentant les distances, dans L^1 .

Notons

$$GoLi(n) = \sup_{C, D \in M_n(\mathbb{R}_+)} \frac{\Phi^*}{\Phi^{SDP}}$$

le *saut d'intégralité* de la relaxation de Goemans-Linial.

On a montré que

$$GoLi(n) \leq \rho(n),$$

où $\rho(n)$ est la plus petite constante λ telle que tout espace semi-métrique à n points (X, d) tel que (X, \sqrt{d}) est plongable isométriquement dans L^2 admette un plongement λ -lipschitzien, augmentant les distances, dans L^1 .

Modulo une procédure d'arrondi adéquate, ceci montrerait que Φ^* est calculable en temps polynômial à un facteur multiplicatif $\rho(n)$ près.

Notons

$$GoLi(n) = \sup_{C, D \in M_n(\mathbb{R}_+)} \frac{\Phi^*}{\Phi^{SDP}}$$

le *saut d'intégralité* de la relaxation de Goemans-Linial.

On a montré que

$$GoLi(n) \leq \rho(n),$$

où $\rho(n)$ est la plus petite constante λ telle que tout espace semi-métrique à n points (X, d) tel que (X, \sqrt{d}) est plongable isométriquement dans L^2 admette un plongement λ -lipschitzien, augmentant les distances, dans L^1 .

Modulo une procédure d'arrondi adéquate, ceci montrerait que Φ^* est calculable en temps polynômial à un facteur multiplicatif $\rho(n)$ près.

Question

Quel est l'ordre de grandeur de $\rho(n)$?

Notons

$$GoLi(n) = \sup_{C, D \in M_n(\mathbb{R}_+)} \frac{\Phi^*}{\Phi^{SDP}}$$

le *saut d'intégralité* de la relaxation de Goemans-Linial.

On a montré que

$$GoLi(n) \leq \rho(n),$$

où $\rho(n)$ est la plus petite constante λ telle que tout espace semi-métrique à n points (X, d) tel que (X, \sqrt{d}) est plongeable isométriquement dans L^2 admette un plongement λ -lipschitzien, augmentant les distances, dans L^1 .

Modulo une procédure d'arrondi adéquate, ceci montrerait que Φ^* est calculable en temps polynômial à un facteur multiplicatif $\rho(n)$ près.

Question

Quel est l'ordre de grandeur de $\rho(n)$?

Remarque

On peut montrer que $GoLi(n) = \rho(n)$. En revanche, pour le problème isopérimétrique initial où les demandes sont égales à 1 et les capacités à valeurs dans $\{0, 1\}$, le saut d'intégralité est strictement inférieur à $\rho(n)$.

Théorème

(S. Arora, J. Lee, A. Naor, 2005). Soit (X, d) un espace métrique à n points. On suppose que $(X, d^{1/2})$ se plonge isométriquement dans L^2 . Alors (X, d) se plonge aussi dans L^2 avec distorsion $O(\sqrt{\log(n)} \log(\log(n)))$. Un tel plongement est calculable en temps polynômial.

Théorème

(S. Arora, J. Lee, A. Naor, 2005). Soit (X, d) un espace métrique à n points. On suppose que $(X, d^{1/2})$ se plonge isométriquement dans L^2 . Alors (X, d) se plonge aussi dans L^2 avec distorsion $O(\sqrt{\log(n)} \log(\log(n)))$. Un tel plongement est calculable en temps polynômial.

Remarque

C'est presque optimal, puisque l'ensemble des sommets du n -cube ℓ^1 ne se plonge pas dans L^2 avec distorsion $< \sqrt{n}$ (Enflo, 1969).

Théorème

(S. Arora, J. Lee, A. Naor, 2005). Soit (X, d) un espace métrique à n points. On suppose que $(X, d^{1/2})$ se plonge isométriquement dans L^2 . Alors (X, d) se plonge aussi dans L^2 avec distorsion $O(\sqrt{\log(n)} \log(\log(n)))$. Un tel plongement est calculable en temps polynômial.

Remarque

C'est presque optimal, puisque l'ensemble des sommets du n -cube ℓ^1 ne se plonge pas dans L^2 avec distorsion $< \sqrt{n}$ (Enflo, 1969).

Corollaire

$$\rho(n) = O(\sqrt{\log(n)} \log(\log(n))).$$

En effet, L^2 se plonge isométriquement dans L^1 .

Théorème

(S. Arora, J. Lee, A. Naor, 2005). Soit (X, d) un espace métrique à n points. On suppose que $(X, d^{1/2})$ se plonge isométriquement dans L^2 . Alors (X, d) se plonge aussi dans L^2 avec distorsion $O(\sqrt{\log(n)} \log(\log(n)))$. Un tel plongement est calculable en temps polynômial.

Remarque

C'est presque optimal, puisque l'ensemble des sommets du n -cube ℓ^1 ne se plonge pas dans L^2 avec distorsion $< \sqrt{n}$ (Enflo, 1969).

Corollaire

$$\rho(n) = O(\sqrt{\log(n)} \log(\log(n))).$$

En effet, L^2 se plonge isométriquement dans L^1 .

Conclusion

L'approche SDP donne actuellement la meilleure solution connue du problème Sparsest Cut général.

On s'intéresse désormais à la minoration de $\rho(n)$. Il s'agit de trouver des espaces métriques finis (X_n, d_n) qui se plongent mal dans L^1 , mais tels que $(X_n, \sqrt{d_n})$ se plonge isométriquement dans L^2 .

On s'intéresse désormais à la minoration de $\rho(n)$. Il s'agit de trouver des espaces métriques finis (X_n, d_n) qui se plongent mal dans L^1 , mais tels que $(X_n, \sqrt{d_n})$ se plonge isométriquement dans L^2 .

Le groupe d'Heisenberg est *asymptotiquement autosimilaire*. Cela a trois conséquences :

- 1 Doublement : il existe M tel que pour tout r assez grand, toute boule de rayon $2r$ est recouverte par M boules de rayon r . Cela entraîne que (\mathbb{H}, \sqrt{d}) a un plongement bilipschitzien dans L^2 . C'est un signe encourageant pour un plongement isométrique dans L^2 .

On s'intéresse désormais à la minoration de $\rho(n)$. Il s'agit de trouver des espaces métriques finis (X_n, d_n) qui se plongent mal dans L^1 , mais tels que $(X_n, \sqrt{d_n})$ se plonge isométriquement dans L^2 .

Le groupe d'Heisenberg est *asymptotiquement autosimilaire*. Cela a trois conséquences :

- 1 Doublement : il existe M tel que pour tout r assez grand, toute boule de rayon $2r$ est recouverte par M boules de rayon r . Cela entraîne que (\mathbb{H}, \sqrt{d}) a un plongement bilipschitzien dans L^2 . C'est un signe encourageant pour un plongement isométrique dans L^2 .
- 2 Passage du discret au continu : un plongement bilipschitzien de \mathbb{H} dans L^p induit des plongements bilipschitziens d'un groupe de Lie $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}$ dans L^p . Etudier ces plongements devient un problème d'analyse réelle.

On s'intéresse désormais à la minoration de $\rho(n)$. Il s'agit de trouver des espaces métriques finis (X_n, d_n) qui se plongent mal dans L^1 , mais tels que $(X_n, \sqrt{d_n})$ se plonge isométriquement dans L^2 .

Le groupe d'Heisenberg est *asymptotiquement autosimilaire*. Cela a trois conséquences :

- 1 Doublement : il existe M tel que pour tout r assez grand, toute boule de rayon $2r$ est recouverte par M boules de rayon r . Cela entraîne que (\mathbb{H}, \sqrt{d}) a un plongement bilipschitzien dans L^2 . C'est un signe encourageant pour un plongement isométrique dans L^2 .
- 2 Passage du discret au continu : un plongement bilipschitzien de \mathbb{H} dans L^p induit des plongements bilipschitziens d'un groupe de Lie $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}$ dans L^p . Etudier ces plongements devient un problème d'analyse réelle.
- 3 Différentiation : $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}$ est exactement autosimilaire, d'où une notion de différentiabilité adhoc.

On s'intéresse désormais à la minoration de $\rho(n)$. Il s'agit de trouver des espaces métriques finis (X_n, d_n) qui se plongent mal dans L^1 , mais tels que $(X_n, \sqrt{d_n})$ se plonge isométriquement dans L^2 .

Le groupe d'Heisenberg est *asymptotiquement autosimilaire*. Cela a trois conséquences :

- 1 Doublement : il existe M tel que pour tout r assez grand, toute boule de rayon $2r$ est recouverte par M boules de rayon r . Cela entraîne que (\mathbb{H}, \sqrt{d}) a un plongement bilipschitzien dans L^2 . C'est un signe encourageant pour un plongement isométrique dans L^2 .
- 2 Passage du discret au continu : un plongement bilipschitzien de \mathbb{H} dans L^p induit des plongements bilipschitziens d'un groupe de Lie $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}$ dans L^p . Etudier ces plongements devient un problème d'analyse réelle.
- 3 Différentiation : $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}$ est exactement autosimilaire, d'où une notion de différentiabilité adhoc.

On détaille maintenant comment chacune de ces trois propriétés nous rapproche de la minoration de $\rho(n)$.

Le théorème de Bourgain est optimal : il y a des espaces métriques finis (X_n, d_n) à n points dont tout plongement dans L^1 a une distorsion d'au moins $\log(n)$: il s'agit de graphes expandeurs. Or l'expansion contrôle la compression L^2 , ces exemples, même élevés à la puissance $\frac{1}{2}$, se plongent mal dans L^2 .

Le théorème de Bourgain est optimal : il y a des espaces métriques finis (X_n, d_n) à n points dont tout plongement dans L^1 a une distorsion d'au moins $\log(n)$: il s'agit de graphes expandeurs. Or l'expansion contrôle la compression L^2 , ces exemples, même élevés à la puissance $\frac{1}{2}$, se plongent mal dans L^2 .

En revanche, tout espace métrique doublant, une fois élevé à la puissance $\frac{1}{2}$, a un plongement bilipschitzien dans L^2 .

Théorème (P. Assouad, 1983)

Soit (X, d) un espace métrique doublant, i.e. il existe M tel que pour tout $r > 0$, toute boule de rayon $2r$ est recouverte par M boules de rayon r . Pour tout $a < 1$, (X, d^a) possède un plongement bilipschitzien dans un espace euclidien de dimension finie.

Le théorème de Bourgain est optimal : il y a des espaces métriques finis (X_n, d_n) à n points dont tout plongement dans L^1 a une distorsion d'au moins $\log(n)$: il s'agit de graphes expandeurs. Or l'expansion contrôle la compression L^2 , ces exemples, même élevés à la puissance $\frac{1}{2}$, se plongent mal dans L^2 .

En revanche, tout espace métrique doublant, une fois élevé à la puissance $\frac{1}{2}$, a un plongement bilipschitzien dans L^2 .

Théorème (P. Assouad, 1983)

Soit (X, d) un espace métrique doublant, i.e. il existe M tel que pour tout $r > 0$, toute boule de rayon $2r$ est recouverte par M boules de rayon r . Pour tout $a < 1$, (X, d^a) possède un plongement bilipschitzien dans un espace euclidien de dimension finie.

En théorie géométrique des groupes, on sait que les groupes de type fini qui sont doublants sont les groupes virtuellement nilpotents (M. Gromov 1981), d'où l'idée (de J. R. Lee et A. Naor) de chercher du côté du groupe d'Heisenberg.

Théorème (J. E. Lee - A. Naor, 2006)

Il existe une distance invariante à gauche quasigéodésique d sur le groupe d'Heisenberg telle que $(\mathbb{H}^{2n+1}, d^{1/2})$ se plonge isométriquement dans L^2 .

Théorème (S. Semmes, 1996)

\mathbb{H} *n'a pas de plongement bilipschitzien dans un espace de Banach de dimension finie.*

Théorème (S. Semmes, 1996)

\mathbb{H} n'a pas de plongement bilipschitzien dans un espace de Banach de dimension finie.

Théorème (S. Pauls, 2001)

\mathbb{H} n'a pas de plongement bilipschitzien dans un espace de Hilbert, ni, plus généralement, dans un espace CAT(0).

Théorème (S. Semmes, 1996)

\mathbb{H} n'a pas de plongement bilipschitzien dans un espace de Banach de dimension finie.

Théorème (S. Pauls, 2001)

\mathbb{H} n'a pas de plongement bilipschitzien dans un espace de Hilbert, ni, plus généralement, dans un espace $CAT(0)$.

Démonstration.

1. Un plongement bilipschitzien de \mathbb{H} dans L^2 donne des plongements bilipschitziens entre cônes asymptotiques. Or $\text{cone}(\mathbb{H}) = \mathbb{H}_{\mathbb{R}}$ est un groupe de Lie muni d'une métrique sous-finlérienne, et $\text{cone}(L^2)$ est un espace de Hilbert \mathbb{R}^{\aleph_1} .

Théorème (S. Semmes, 1996)

\mathbb{H} n'a pas de plongement bilipschitzien dans un espace de Banach de dimension finie.

Théorème (S. Pauls, 2001)

\mathbb{H} n'a pas de plongement bilipschitzien dans un espace de Hilbert, ni, plus généralement, dans un espace $CAT(0)$.

Démonstration.

1. Un plongement bilipschitzien de \mathbb{H} dans L^2 donne des plongements bilipschitziens entre cônes asymptotiques. Or $\text{cone}(\mathbb{H}) = \mathbb{H}_{\mathbb{R}}$ est un groupe de Lie muni d'une métrique sous-finslérienne, et $\text{cone}(L^2)$ est un espace de Hilbert \mathbb{R}^{\aleph_1} .
2. Une application lipschitzienne $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}^{\aleph_1}$ est différentiable presque partout, la différentielle est un homomorphisme de groupes $Df : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}^{\aleph_1}$.

Théorème (S. Semmes, 1996)

\mathbb{H} n'a pas de plongement bilipschitzien dans un espace de Banach de dimension finie.

Théorème (S. Pauls, 2001)

\mathbb{H} n'a pas de plongement bilipschitzien dans un espace de Hilbert, ni, plus généralement, dans un espace CAT(0).

Démonstration.

1. Un plongement bilipschitzien de \mathbb{H} dans L^2 donne des plongements bilipschitziens entre cônes asymptotiques. Or $\text{cone}(\mathbb{H}) = \mathbb{H}_{\mathbb{R}}$ est un groupe de Lie muni d'une métrique sous-finslérienne, et $\text{cone}(L^2)$ est un espace de Hilbert \mathbb{R}^{\aleph_1} .
2. Une application lipschitzienne $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}^{\aleph_1}$ est différentiable presque partout, la différentielle est un homomorphisme de groupes $Df : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}^{\aleph_1}$.
3. Tout homomorphisme de groupe $\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}^{\aleph_1}$ a un noyau, le sous-groupe des commutateurs de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}$.

Théorème (S. Semmes, 1996)

\mathbb{H} n'a pas de plongement bilipschitzien dans un espace de Banach de dimension finie.

Théorème (S. Pauls, 2001)

\mathbb{H} n'a pas de plongement bilipschitzien dans un espace de Hilbert, ni, plus généralement, dans un espace CAT(0).

Démonstration.

1. Un plongement bilipschitzien de \mathbb{H} dans L^2 donne des plongements bilipschitziens entre cônes asymptotiques. Or $\text{cone}(\mathbb{H}) = \mathbb{H}_{\mathbb{R}}$ est un groupe de Lie muni d'une métrique sous-finslérienne, et $\text{cone}(L^2)$ est un espace de Hilbert $\mathbb{R}^{\mathbb{N}_1}$.
2. Une application lipschitzienne $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}_1}$ est différentiable presque partout, la différentielle est un homomorphisme de groupes $Df : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}_1}$.
3. Tout homomorphisme de groupe $\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}_1}$ a un noyau, le sous-groupe des commutateurs de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}$.
4. Si f est bilipschitzienne, Df l'est aussi, contradiction.

Notation

Le groupe d'Heisenberg $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}$ est le sous-groupe de $GL(3, \mathbb{R})$ formé des matrices de la

forme $\begin{pmatrix} 1 & x_1 & t \\ 0 & 1 & y_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, où $x_1, y_1, t \in \mathbb{R}$.

Notation

Le groupe d'Heisenberg $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}$ est le sous-groupe de $GL(3, \mathbb{R})$ formé des matrices de la forme $\begin{pmatrix} 1 & x_1 & t \\ 0 & 1 & y_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, où $x_1, y_1, t \in \mathbb{R}$.

$\mathbb{H}_{\mathbb{R}}$ possède un groupe à un paramètre d'automorphismes $\delta_{\epsilon} : x_1 \mapsto \epsilon x_1, y_1 \mapsto \epsilon y_1, t \mapsto \epsilon^2 t$.

Notation

Le groupe d'Heisenberg $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}$ est le sous-groupe de $Gl(3, \mathbb{R})$ formé des matrices de la forme $\begin{pmatrix} 1 & x_1 & t \\ 0 & 1 & y_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, où $x_1, y_1, t \in \mathbb{R}$.

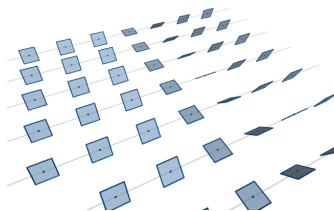
$\mathbb{H}_{\mathbb{R}}$ possède un groupe à un paramètre d'automorphismes $\delta_{\epsilon} : x_1 \mapsto \epsilon x_1, y_1 \mapsto \epsilon y_1, t \mapsto \epsilon^2 t$. Il existe des métriques géodésiques et invariantes à gauche sur $H_{\mathbb{R}}$ que δ_{ϵ} multiplie exactement par ϵ : les distances de Carnot.

Notation

Le groupe d'Heisenberg $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}$ est le sous-groupe de $Gl(3, \mathbb{R})$ formé des matrices de la forme $\begin{pmatrix} 1 & x_1 & t \\ 0 & 1 & y_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, où $x_1, y_1, t \in \mathbb{R}$.

$\mathbb{H}_{\mathbb{R}}$ possède un groupe à un paramètre d'automorphismes $\delta_{\epsilon} : x_1 \mapsto \epsilon x_1, y_1 \mapsto \epsilon y_1, t \mapsto \epsilon^2 t$. Il existe des métriques géodésiques et invariantes à gauche sur $H_{\mathbb{R}}$ que δ_{ϵ} multiplie exactement par ϵ : les distances de Carnot.

Les champs de vecteurs invariants à gauche ξ, η qui valent $\frac{\partial}{\partial x_1}$ et $\frac{\partial}{\partial y_1}$ à l'origine engendrent le champ de plans horizontal.



Notation

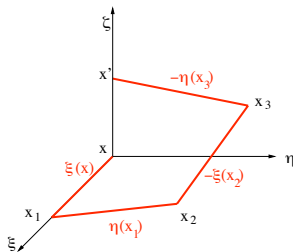
Le groupe d'Heisenberg $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}$ est le sous-groupe de $Gl(3, \mathbb{R})$ formé des matrices de la

forme $\begin{pmatrix} 1 & x_1 & t \\ 0 & 1 & y_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, où $x_1, y_1, t \in \mathbb{R}$.

$\mathbb{H}_{\mathbb{R}}$ possède un groupe à un paramètre d'automorphismes $\delta_{\epsilon} : x_1 \mapsto \epsilon x_1, y_1 \mapsto \epsilon y_1, t \mapsto \epsilon^2 t$. Il existe des métriques géodésiques et invariantes à gauche sur $H_{\mathbb{R}}$ que δ_{ϵ} multiplie exactement par ϵ : les distances de Carnot.

Les champs de vecteurs invariants à gauche ξ, η qui valent $\frac{\partial}{\partial x_1}$ et $\frac{\partial}{\partial y_1}$ à l'origine engendrent le champ de plans horizontal. La distance de Carnot $d(p, p')$ est l'inf des longueurs des courbes horizontales joignant x à x' . La finitude de la distance de Carnot résulte de la figure ci-contre.

$$\zeta = [\xi, \eta] = \frac{\partial}{\partial t}.$$



Notation

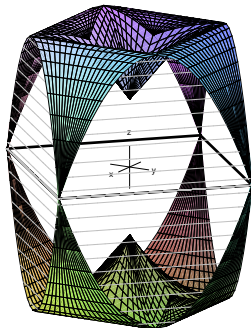
Le groupe d'Heisenberg $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}$ est le sous-groupe de $Gl(3, \mathbb{R})$ formé des matrices de la

forme $\begin{pmatrix} 1 & x_1 & t \\ 0 & 1 & y_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, où $x_1, y_1, t \in \mathbb{R}$.

$\mathbb{H}_{\mathbb{R}}$ possède un groupe à un paramètre d'automorphismes $\delta_{\epsilon} : x_1 \mapsto \epsilon x_1, y_1 \mapsto \epsilon y_1, t \mapsto \epsilon^2 t$. Il existe des métriques géodésiques et invariantes à gauche sur $H_{\mathbb{R}}$ que δ_{ϵ} multiplie exactement par ϵ : les distances de Carnot.

Les champs de vecteurs invariants à gauche ξ, η qui valent $\frac{\partial}{\partial x_1}$ et $\frac{\partial}{\partial y_1}$ à l'origine engendrent le champ de plans horizontal. La distance de Carnot $d(p, p')$ est l'inf des longueurs des courbes horizontales joignant x à x' .

Ci-contre, une boule de cette distance.



Passage au cône asymptotique.

$\mathbb{H} \subset \mathbb{H}_{\mathbb{R}}$ ressemble à $\mathbb{Z}^3 \subset \mathbb{R}^3$. La métrique du graphe de Cayley est la restriction d'une distance de Carnot sur $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}$. Appliquer une homothétie δ_{ϵ} revient à regarder \mathbb{H} de plus en plus loin, il devient de plus en plus dense dans $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}$, il se confond avec $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}$, c'est l'idée de *cône asymptotique*.

Passage au cône asymptotique.

$\mathbb{H} \subset \mathbb{H}_{\mathbb{R}}$ ressemble à $\mathbb{Z}^3 \subset \mathbb{R}^3$. La métrique du graphe de Cayley est la restriction d'une distance de Carnot sur $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}$. Appliquer une homothétie δ_ϵ revient à regarder \mathbb{H} de plus en plus loin, il devient de plus en plus dense dans $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}$, il se confond avec $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}$, c'est l'idée de *cône asymptotique*.

Grâce à Arzela-Ascoli, quitte à extraire, un plongement bilipschitzien $\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}^N$ converge vers un plongement bilipschitzien $\mathbb{H}_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}^N$.

Passage au cône asymptotique.

$\mathbb{H} \subset \mathbb{H}_{\mathbb{R}}$ ressemble à $\mathbb{Z}^3 \subset \mathbb{R}^3$. La métrique du graphe de Cayley est la restriction d'une distance de Carnot sur $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}$. Appliquer une homothétie δ_ϵ revient à regarder \mathbb{H} de plus en plus loin, il devient de plus en plus dense dans $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}$, il se confond avec $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}$, c'est l'idée de *cône asymptotique*.

Grâce à Arzela-Ascoli, quitte à extraire, un plongement bilipschitzien $\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}^N$ converge vers un plongement bilipschitzien $\mathbb{H}_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}^N$.

Ça marche aussi si $N = \infty$.

Différentiation

Définition

Soit Y un espace de Banach. Une application $f : \mathbb{H}_{\mathbb{R}} \rightarrow Y$ est différentiable à l'origine s'il existe un homomorphisme de groupes $Df : \mathbb{H}_{\mathbb{R}} \rightarrow Y$ tel que

$$\forall z \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}, \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} (f(\delta_\epsilon(z)) - f(0)) = Df(z).$$

Je ne détaille pas la démonstration, juste l'argument qui suffit pour la non-plongeabilité dans les espaces de Banach possédant la Propriété de Radon-Nikodym.

- ① *Un application lipschitzienne possède des dérivées partielles horizontales presque partout.*

Cela s'appelle la *propriété de Radon-Nikodym* de L^2 .

- 1 *Un application lipschitzienne possède des dérivées partielles horizontales presque partout.*

Cela s'appelle la *propriété de Radon-Nikodym* de L^2 .

- 2 *Ces dérivées sont approximativement continues presque partout.*
C'est général pour les espaces doublants.

- 1 *Un application lipschitzienne possède des dérivées partielles horizontales presque partout.*
Cela s'appelle la *propriété de Radon-Nikodym* de L^2 .
- 2 *Ces dérivées sont approximativement continues presque partout.*
C'est général pour les espaces doublants.
- 3 *En un tel point x , $d(f(x), f(x')) = o(d(x, x'))$ si x' est sur la droite verticale passant par x .*

- 1 *Une application lipschitzienne possède des dérivées partielles horizontales presque partout.*
 Cela s'appelle la *propriété de Radon-Nikodym* de L^2 .
- 2 *Ces dérivées sont approximativement continues presque partout.*
 C'est général pour les espaces doublants.
- 3 *En un tel point x , $d(f(x), f(x')) = o(d(x, x'))$ si x' est sur la droite verticale passant par x .*

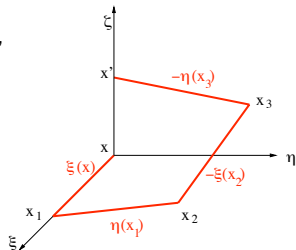
Soit $x' = x \exp(\epsilon^2 \zeta)$, de sorte que $d(x, x') \sim \epsilon$. On joint x à x' par des courbes intégrales de $\xi, \eta, -\xi, -\eta$, d'extrémités $x = x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 = x'$. Alors

$$f(x_1) - f(x) \sim \epsilon \xi f(x), \quad f(x_3) - f(x_2) \sim -\epsilon \xi f(x),$$

d'où

$$f(x_1) - f(x) + f(x_3) - f(x_2) = o(\epsilon).$$

De même $f(x_2) - f(x_1) + f(x') - f(x_3) = o(\epsilon)$. En additionnant, $f(x') - f(x) = o(\epsilon)$.



L'argument précédent s'applique à

- $Y = L^p$ pour $p > 1$;
- $Y = \ell^1$,

qui possèdent la propriété de Radon-Nikodym.

L'argument précédent s'applique à

- $Y = L^p$ pour $p > 1$;
- $Y = \ell^1$,

qui possèdent la propriété de Radon-Nikodym.

Remarque

L^1 n'a pas la propriété de Radon-Nikodym.

En effet, $t \mapsto 1_{[0,t]}, \mathbb{R}_+ \rightarrow L^1(\mathbb{R}_+)$, est isométrique, mais nulle part différentiable.

L'argument précédent s'applique à

- $Y = L^p$ pour $p > 1$;
- $Y = \ell^1$,

qui possèdent la propriété de Radon-Nikodym.

Remarque

L^1 n'a pas la propriété de Radon-Nikodym.

En effet, $t \mapsto 1_{[0,t]}, \mathbb{R}_+ \rightarrow L^1(\mathbb{R}_+)$, est isométrique, mais nulle part différentiable.

Remarque

On ne peut pas se contenter de rejeter les plongements bilipschitziens de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}$ dans ℓ^1 , car les cônes asymptotiques de ℓ^1 sont des L^1 .

L'argument précédent s'applique à

- $Y = L^p$ pour $p > 1$;
- $Y = \ell^1$,

qui possèdent la propriété de Radon-Nikodym.

Remarque

L^1 n'a pas la propriété de Radon-Nikodym.

En effet, $t \mapsto 1_{[0,t]}, \mathbb{R}_+ \rightarrow L^1(\mathbb{R}_+)$, est isométrique, mais nulle part différentiable.

Remarque

On ne peut pas se contenter de rejeter les plongements bilipschitziens de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}$ dans ℓ^1 , car les cônes asymptotiques de ℓ^1 sont des L^1 .

Heureusement,

Théorème (J. Cheeger - B. Kleiner, 2006)

\mathbb{H} n'a pas de plongement bilipschitzien dans L^1 .

Schéma de la démonstration (de Cheeger-Kleiner)

- 1 A une application $f : X \rightarrow L^1(Y, \nu)$, on associe une mesure canonique sur les partitions $S, \bar{S} \subset X$, généralisant les ensembles de niveau.
- 2 f est à variation bornée si et seulement si presque tout S est de périmètre fini.
- 3 (Franchi, Serapioni, Serra-Cassano, 2001). Si $S \subset \mathbb{H}$ est de périmètre fini, alors, en presque tout point, les dilatés par δ_t de S convergent vers des demi-espaces verticaux.
- 4 Au voisinage des bons points, à petite échelle, f factorise approximativement par $\mathbb{H}/[\mathbb{H}, \mathbb{H}]$, ce qui l'empêche d'être bilipschitzienne.

Schéma de la démonstration (de Cheeger-Kleiner)

- 1 A une application $f : X \rightarrow L^1(Y, \nu)$, on associe une mesure canonique sur les partitions $S, \bar{S} \subset X$, généralisant les ensembles de niveau.
- 2 f est à variation bornée si et seulement si presque tout S est de périmètre fini.
- 3 (Franchi, Serapioni, Serra-Cassano, 2001). Si $S \subset \mathbb{H}$ est de périmètre fini, alors, en presque tout point, les dilatés par δ_t de S convergent vers des demi-espaces verticaux.
- 4 Au voisinage des bons points, à petite échelle, f factorise approximativement par $\mathbb{H}/[\mathbb{H}, \mathbb{H}]$, ce qui l'empêche d'être bilipschitzienne.

Remarque

C'est dans la direction du centre que la distorsion se manifeste.

Proposition

L'inexistence de plongements bilipschitziens du groupe d'Heisenberg dans L^1 entraîne que $\rho(n)$ tend vers $+\infty$.

Proposition

L'inexistence de plongements bilipschitziens du groupe d'Heisenberg dans L^1 entraîne que $\rho(n)$ tend vers $+\infty$.

Démonstration

Lemme (Kakutani, 1939)

L'ensemble des semi-distances plongeables dans L^1 est fermé. De plus, un espace semi-métrique X se plonge isométriquement dans L^1 si et seulement si tout sous-ensemble fini de X se plonge isométriquement dans L^1 .

Proposition

L'inexistence de plongements bilipschitziens du groupe d'Heisenberg dans L^1 entraîne que $\rho(n)$ tend vers $+\infty$.

Démonstration

Lemme (Kakutani, 1939)

L'ensemble des semi-distances plongeables dans L^1 est fermé. De plus, un espace semi-métrique X se plonge isométriquement dans L^1 si et seulement si tout sous-ensemble fini de X se plonge isométriquement dans L^1 .

Supposons que la boule de rayon n de (\mathbb{H}, d) admette un plongement λ -bilipschitzien dans L^1 . Comme les distances induites d_n sont bornées, on peut supposer qu'elles convergent simplement vers une distance d' . Alors d' se plonge dans L^1 , elle est λ -équivalente à d . Donc (\mathbb{H}, d) admet un plongement λ -bilipschitzien dans L^1 .

Proposition

L'inexistence de plongements bilipschitziens du groupe d'Heisenberg dans L^1 entraîne que $\rho(n)$ tend vers $+\infty$.

Démonstration

Lemme (Kakutani, 1939)

L'ensemble des semi-distances plongeables dans L^1 est fermé. De plus, un espace semi-métrique X se plonge isométriquement dans L^1 si et seulement si tout sous-ensemble fini de X se plonge isométriquement dans L^1 .

Supposons que la boule de rayon n de (\mathbb{H}, d) admette un plongement λ -bilipschitzien dans L^1 . Comme les distances induites d_n sont bornées, on peut supposer qu'elles convergent simplement vers une distance d' . Alors d' se plonge dans L^1 , elle est λ -équivalente à d . Donc (\mathbb{H}, d) admet un plongement λ -bilipschitzien dans L^1 .

Remarque

Cet argument ne donne aucune borne inférieure effective sur $\rho(n)$, on est encore loin des [Résultats](#).

En 2006, R. Tessera a découvert que la compression des plongements dans L^p était contrôlée par l'*isopérimétrie dans les boules*. Il s'agit de la fonction J_p telle que, pour toute fonction ϕ à support dans une boule de rayon r ,

$$\|\phi\|_p \leq J_p(r) \|\tilde{\nabla}\phi\|_p \quad (\text{gradient à droite}).$$

Théorème (R. Tessera, 2011)

Soit $p > 1$. Soit G un groupe localement compact, compactement engendré, d'*isopérimétrie dans les boules* J_p . Soit ω une fonction croissante telle que

$$\int_1^\infty \left(\frac{\omega(t)}{J_p(t)}\right)^p \frac{dt}{t} < +\infty.$$

Alors G admet un plongement (équivariant) dans L^p de compression au moins un multiple de ω .

Démonstration

Soit ϕ_r une fonction à support dans $B(r)$ telle que $\|\tilde{\nabla}\phi_r\|_p = 1$ et $\|\phi_r\|_p \geq 2^{-1/p} J_p(r)$. Posons $\Phi = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \frac{\omega(2^k)}{J_p(2^k)} \phi_{2^k}$. Alors $\tilde{\nabla}\Phi \in \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} L^p(G)$. Par conséquent, il y a une action affine isométrique de G sur un espace affine modelé sur $\bigoplus_{k \in \mathbb{N}}^{\ell^p} L^p(G)$, dont une orbite donne un plongement lipschitzien Ψ .

Démonstration

Soit ϕ_r une fonction à support dans $B(r)$ telle que $\|\tilde{\nabla}\phi_r\|_p = 1$ et $\|\phi_r\|_p \geq 2^{-1/p} J_p(r)$. Posons $\Phi = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \frac{\omega(2^k)}{J_p(2^k)} \phi_{2^k}$. Alors $\tilde{\nabla}\Phi \in \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} L^p(G)$. Par conséquent, il y a une action affine isométrique de G sur un espace affine modelé sur $\bigoplus_{k \in \mathbb{N}} L^p(G)$, dont une orbite donne un plongement lipschitzien Ψ .

Si $g \in G$ et $|g| > 2r$, $g\phi_r$ et ϕ_r ont des supports disjoints, $\|g\phi_r - \phi_r\|_p = 2^{1/p} \|\phi_r\|_p \geq J_p(r)$, donc $\|\Psi(g) - \Psi(1)\| \geq \omega(r)$. La compression de Ψ est donc $\geq \omega$.

Démonstration

Soit ϕ_r une fonction à support dans $B(r)$ telle que $\|\tilde{\nabla}\phi_r\|_p = 1$ et $\|\phi_r\|_p \geq 2^{-1/p} J_p(r)$. Posons $\Phi = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \frac{\omega(2^k)}{J_p(2^k)} \phi_{2^k}$. Alors $\tilde{\nabla}\Phi \in \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} L^p(G)$. Par conséquent, il y a une action affine isométrique de G sur un espace affine modelé sur $\bigoplus_{k \in \mathbb{N}} L^p(G)$, dont une orbite donne un plongement lipschitzien Ψ .

Si $g \in G$ et $|g| > 2r$, $g\phi_r$ et ϕ_r ont des supports disjoints, $\|g\phi_r - \phi_r\|_p = 2^{1/p} \|\phi_r\|_p \geq J_p(r)$, donc $\|\Psi(g) - \Psi(1)\| \geq \omega(r)$. La compression de Ψ est donc $\geq \omega$.

Par autosimilarité asymptotique, $J_p(t) \sim t$ pour \mathbb{H}^{2n+1} . Par conséquent,

Corollaire

Soit $p \geq 1$. Soit $\omega : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction croissante telle que

$$\int_1^\infty \frac{\omega(t)^p}{t^{p+1}} dt < +\infty. \quad (1)$$

Alors \mathbb{H}^{2n+1} admet un plongement dans L^p de compression au moins un multiple de ω .

Au milieu des années 2000, Assaf Naor a conjecturé une famille d'inégalités fonctionnelles qui contraignent la compression des plongements des groupes d'Heisenberg \mathbb{H}^{2n+1} dans les L^p .

Au milieu des années 2000, Assaf Naor a conjecturé une famille d'inégalités fonctionnelles qui contraignent la compression des plongements des groupes d'Heisenberg \mathbb{H}^{2n+1} dans les L^p .

Dans $G = \mathbb{H}^{2n+1}$, soit S le système générateur formé des matrices $a_i = I_{n+2} + E_{1,1+i}$, $b_i = I_{n+2} + E_{1+i,1}$ et leurs inverses. Soit c la matrice $I_{n+2} + E_{n+2,n+2}$. Alors pour tout $i = 1, \dots, n$, $c = a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}$, et c engendre le centre de G .

Au milieu des années 2000, Assaf Naor a conjecturé une famille d'inégalités fonctionnelles qui contraignent la compression des plongements des groupes d'Heisenberg \mathbb{H}^{2n+1} dans les L^p .

Dans $G = \mathbb{H}^{2n+1}$, soit S le système générateur formé des matrices $a_i = I_{n+2} + E_{1,1+i}$, $b_i = I_{n+2} + E_{1+i,1}$ et leurs inverses. Soit c la matrice $I_{n+2} + E_{n+2,n+2}$. Alors pour tout $i = 1, \dots, n$, $c = a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}$, et c engendre le centre de G .

Notation

Soit $f : G \rightarrow X$ une application de G vers un espace de Banach. On appelle **gradient horizontal** de f , noté $\nabla_{\mathbb{H}} f$, l'application $G \rightarrow \ell^p(S, X)$, $h \mapsto (s \mapsto f(hs) - f(h))$. On appelle **gradient vertical** de f les applications $G \rightarrow X$, $h \mapsto f(hc^t) - f(h)$, notées $\nabla_v^t f$.

Au milieu des années 2000, Assaf Naor a conjecturé une famille d'inégalités fonctionnelles qui contraignent la compression des plongements des groupes d'Heisenberg \mathbb{H}^{2n+1} dans les L^p .

Dans $G = \mathbb{H}^{2n+1}$, soit S le système générateur formé des matrices $a_i = I_{n+2} + E_{1,1+i}$, $b_i = I_{n+2} + E_{1+i,1}$ et leurs inverses. Soit c la matrice $I_{n+2} + E_{n+2,n+2}$. Alors pour tout $i = 1, \dots, n$, $c = a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}$, et c engendre le centre de G .

Notation

Soit $f : G \rightarrow X$ une application de G vers un espace de Banach. On appelle **gradient horizontal** de f , noté $\nabla_{\mathbb{H}} f$, l'application $G \rightarrow \ell^p(S, X)$, $h \mapsto (s \mapsto f(hs) - f(h))$. On appelle **gradient vertical** de f les applications $G \rightarrow X$, $h \mapsto f(hc^t) - f(h)$, notées $\nabla_v^t f$.

Conjecture (A. Naor)

Soit $q \geq 2$ et $1 \leq p \leq q$. Notons $G = \mathbb{H}^{2n+1}$ et S le système générateur ci-dessus. Il existe une constante $C = C_{p,q}(G, S)$ telle que toute fonction à support fini $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ satisfait l'inégalité $(VH_{p,q})$

$$\left(\sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{t^{1+q/2}} \|\nabla_v^t f\|_p^q \right)^{1/q} \leq C \|\nabla_{\mathbb{H}} f\|_p.$$

Pourquoi ces inégalités ?

1. On démontre aisément l'inégalité $\|\nabla_v^{r^2} f\|_{L^1(B(r))} \leq 4r \|\nabla_{\mathbb{H}} f\|_{L^1(B(5r))}$. Elle s'étend immédiatement aux plongements $f : B(5r) \rightarrow L^1$. Toutefois, lorsque f est lipschitzienne, cette inégalité n'est pas assez forte pour impliquer de la compression le long du centre.

Pourquoi ces inégalités ?

1. On démontre aisément l'inégalité $\|\nabla_v^{r^2} f\|_{L^1(B(r))} \leq 4r \|\nabla_{\mathbb{H}} f\|_{L^1(B(5r))}$. Elle s'étend immédiatement aux plongements $f : B(5r) \rightarrow L^1$. Toutefois, lorsque f est lipschitzienne, cette inégalité n'est pas assez forte pour impliquer de la compression le long du centre. Il en est de même pour $\|\nabla_v^{r^2} f\|_{L^q(B(r))}^q \leq (4r)^q \|\nabla_{\mathbb{H}} f\|_{L^1(B(5r))}$.

2. D'où l'idée de chercher à contrôler une expression de la forme

$$\int w_t \frac{\|\nabla_v^t f\|_q^q}{t^{q/2}} dt.$$

On verra en démontrant $(VH_{2,2})$ que le bon choix est $w_t = \frac{1}{t}$.

Pourquoi ces inégalités ?

1. On démontre aisément l'inégalité $\|\nabla_v^{r^2} f\|_{L^1(B(r))} \leq 4r \|\nabla_{\mathbb{H}} f\|_{L^1(B(5r))}$. Elle s'étend immédiatement aux plongements $f : B(5r) \rightarrow L^1$. Toutefois, lorsque f est lipschitzienne, cette inégalité n'est pas assez forte pour impliquer de la compression le long du centre. Il en est de même pour $\|\nabla_v^{r^2} f\|_{L^q(B(r))}^q \leq (4r)^q \|\nabla_{\mathbb{H}} f\|_{L^1(B(5r))}$.

2. D'où l'idée de chercher à contrôler une expression de la forme

$$\int w_t \frac{\|\nabla_v^t f\|_q^q}{t^{q/2}} dt.$$

On verra en démontrant $(VH_{2,2})$ que le bon choix est $w_t = \frac{1}{t}$.

3. Dans \mathbb{H} , la relation $\zeta = [\xi, \eta]$ indique que la dérivée verticale compte pour deux dérivées horizontales. À gauche, on reconnaît la norme de Besov $\dot{B}_{p,q}^{1/2}$ de l'application $\mathbb{Z} \rightarrow \ell^p(G, X)$, $t \mapsto (h \mapsto f(hc^t))$. Autrement dit, une demie-dérivée verticale, c'est naturel de la comparer à la dérivée horizontale.

Conséquences de $(VH_{p,q})$

Les inégalités $(VH_{p,q})$ entraînent une majoration optimale de la compression L^p des groupes d'Heisenberg et de leurs boules.

Proposition

Soient $q \geq p \geq 1$. L'inégalité $(VH_{p,q})$ entraîne l'existence d'une constante C telle que si une fonction croissante $\omega : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que $\omega(s) \leq s$ est la compression d'un plongement 1-lipschitzien de la boule de rayon r de G dans L^p , alors

$$\int_1^{2r} \frac{\omega(t)^q}{t^{1+q}} dt \leq C.$$

Conséquences de $(VH_{p,q})$

Les inégalités $(VH_{p,q})$ entraînent une majoration optimale de la compression L^p des groupes d'Heisenberg et de leurs boules.

Proposition

Soient $q \geq p \geq 1$. L'inégalité $(VH_{p,q})$ entraîne l'existence d'une constante C telle que si une fonction croissante $\omega : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que $\omega(s) \leq s$ est la compression d'un plongement 1-lipschitzien de la boule de rayon r de G dans L^p , alors

$$\int_1^{2r} \frac{\omega(t)^q}{t^{1+q}} dt \leq C.$$

La construction de Tessera montre que cette conséquence de la conjecture serait optimale lorsque $q = p$ si $p \geq 2$, $q = 2$ sinon.

Conséquences de $(VH_{p,q})$

Les inégalités $(VH_{p,q})$ entraînent une majoration optimale de la compression L^p des groupes d'Heisenberg et de leurs boules.

Proposition

Soient $q \geq p \geq 1$. L'inégalité $(VH_{p,q})$ entraîne l'existence d'une constante C telle que si une fonction croissante $\omega : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que $\omega(s) \leq s$ est la compression d'un plongement 1-lipschitzien de la boule de rayon r de G dans L^p , alors

$$\int_1^{2r} \frac{\omega(t)^q}{t^{1+q}} dt \leq C.$$

La construction de Tessera montre que cette conséquence de la conjecture serait optimale lorsque $q = p$ si $p \geq 2$, $q = 2$ sinon.

D'autre part, la compression des boules minore la fonction ρ de Goemans-Williamson, donc la conjecture pour $p = 1$ et $q = 2$ donnerait une minoration optimale (à un terme en $\log \log n$ près) de ρ .

Démonstration de la proposition

Première étape. $(VH_{p,q})$ pour les fonctions à valeurs dans \mathbb{R} implique $(VH_{p,q})$ pour les plongements dans L^p (cela utilise que $p \leq q$).

Deuxième étape. Localisation de $(VH_{p,q})$ dans la boule $B(r)$ de rayon r .

Démonstration de la proposition

Première étape. $(VH_{p,q})$ pour les fonctions à valeurs dans \mathbb{R} implique $(VH_{p,q})$ pour les plongements dans L^p (cela utilise que $p \leq q$).

Deuxième étape. Localisation de $(VH_{p,q})$ dans la boule $B(r)$ de rayon r .

Si $f : B(21r) \rightarrow \mathbb{R}$, soit $\phi = \chi f$ où χ est une troncature à support dans $B(7r)$, égale à 1 sur $B(6r)$, telle que $|\nabla \chi| \leq \frac{1}{r}$. Alors $|\nabla_{\mathbb{H}} \phi| \leq \frac{1}{r}|f| + |\nabla_{\mathbb{H}} f|$. L'inégalité de Poincaré locale

$$\|f - \oint f\|_{L^p(B(7r))} \leq Cr \|\nabla_{\mathbb{H}} f\|_{L^p(B(21r))}$$

donne $\|\nabla_{\mathbb{H}} \phi\|_p \leq 2C \|\nabla_{\mathbb{H}} f\|_p$. Comme $\phi = f$ sur $B(6r)$ et $d(hc^t, h) \leq r$ tant que $t \leq r^2$,

$$\begin{aligned} \left(\sum_{t=1}^{r^2} \frac{1}{t^{1+q/2}} \|\nabla_{\mathbb{V}}^t f\|_p^q \right)^{1/q} &\leq \left(\sum_{t=1}^{r^2} \frac{1}{t^{1+q/2}} \|\nabla_{\mathbb{V}}^t \phi\|_p^q \right)^{1/q} \\ &\leq C \|\nabla_{\mathbb{H}} \phi\|_p \\ &\leq C \|\nabla_{\mathbb{H}} f\|_{L^p(B(21r))}. \end{aligned}$$

Troisième étape. Contrôle de la compression.

Soit $f : B(r) \rightarrow L^p$ un plongement 1-lipschitzien de compression ω . Alors $|\nabla_{\mathbb{H}^n} f| \leq 1$ et pour tous $h \in G$, $t \in \mathbb{N}$, $|f(hc^t) - f(h)| \geq \omega(\sqrt{t})$, d'où

$$\begin{aligned} |B(21r)|^{q/p} &\geq \|\nabla f\|_{L^p(B(21r))}^q \\ &\geq \sum_{t=1}^{r^2} \frac{1}{t^{1+q/2}} \|\omega(\sqrt{t})\|_{L^p(B(r))}^q \\ &\geq \sum_{t=1}^{r^2} \frac{1}{t^{1+q/2}} \omega(\sqrt{t})^q |B(r)|^{q/p} \\ &\geq |B(r)|^{q/p} \int_1^{r^2} \frac{1}{t^{1+q/2}} \omega(\sqrt{t})^q dt \\ &= |B(r)|^{q/p} \int_1^s \frac{\omega(s)^q}{s^{1+q}} ds. \end{aligned}$$

On conclut car $|B(r)| \sim r^{2n+2} \sim |B(21r)|$.

Sur le groupe de Lie $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^{2n+1}$, notons ξ_i, η_j les champs de vecteurs invariants à gauche tels que $\exp(\xi_i) = a_i$, $\exp(\eta_j) = b_j$ et $\zeta = [\xi_i, \eta_j]$ celui tel que $\exp \zeta = c$.

Notation

Soit f une fonction lisse sur G . On appelle **gradient horizontal** de f et on note $\nabla_{\mathbb{H}} f$ le vecteur de composantes $\xi_i f, \eta_j f$. On appelle **gradient vertical** et on note $\nabla_v^t f$ la famille des fonctions $f(\cdot \exp(t\zeta)) - f(\cdot)$.

Proposition (V. Lafforgue - A. Naor)

L'inégalité $(VH_{p,q})$ sur $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^{2n+1}$ équivaut à l'inégalité $(VH_{p,q,\mathbb{R}})$ suivante : pour toute fonction lisse à support compact sur $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^{2n+1}$,

$$\left(\int_1^\infty \|\nabla_v^t f\|_p^q \frac{dt}{t^{1+q/2}} \right)^{1/q} \leq C \|\nabla_{\mathbb{H}} f\|_p.$$

Démonstration

On montre seulement que $(VH_{p,q,\mathbb{R}}) \implies (VH_{p,q})$ pour \mathbb{H} .

Soit χ une fonction lisse positive sur $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}$ tel que pour tout $h \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}$,
 $\sum_{g \in \mathbb{H}} \chi(g^{-1}h) = 1$. Étant donné $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$ à support fini, on pose

$$\phi(h) = \sum_{g \in \mathbb{H}^{2n+1}} \chi(g^{-1}h)f(g).$$

Démonstration

On montre seulement que $(VH_{p,q,\mathbb{R}}) \implies (VH_{p,q})$ pour \mathbb{H} .

Soit χ une fonction lisse positive sur $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}$ tel que pour tout $h \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}$,
 $\sum_{g \in \mathbb{H}} \chi(g^{-1}h) = 1$. Étant donné $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$ à support fini, on pose

$$\phi(h) = \sum_{g \in \mathbb{H}^{2n+1}} \chi(g^{-1}h)f(g).$$

On vérifie aisément que $\|\nabla_{\mathbb{H}}\phi\|_p \leq C\|\nabla_{\mathbb{H}}f\|_p$.

Démonstration

On montre seulement que $(VH_{p,q,\mathbb{R}}) \implies (VH_{p,q})$ pour \mathbb{H} .

Soit χ une fonction lisse positive sur $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}$ tel que pour tout $h \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}$,
 $\sum_{g \in \mathbb{H}} \chi(g^{-1}h) = 1$. Étant donné $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$ à support fini, on pose

$$\phi(h) = \sum_{g \in \mathbb{H}^{2n+1}} \chi(g^{-1}h)f(g).$$

On vérifie aisément que $\|\nabla_{\mathbb{H}}\phi\|_p \leq C\|\nabla_{\mathbb{H}}f\|_p$.

Inversement, on montre que pour tout $t \in \mathbb{N}$ et tout $s \in [t, t+1]$,

$$\|\nabla_v^t f\|_p \leq C(\|\nabla_v^s \phi\|_p + \|\nabla_{\mathbb{H}}f\|_p).$$

En effet, si U est un domaine fondamental pour \mathbb{H} dans $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}$, $h \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}$, $t > 0$, $x \in \mathbb{H}$ tel que $h \in xU$ et $k \in \mathbb{N}$ tel que $t \in [k, k+1[$, on écrit

$$\phi(h \exp(t\zeta)) - f(xc^k) = \sum_{w \in \mathbb{H}} \chi(w^{-1}h \exp(t\zeta))(f(w) - f(xc^k))$$

et on majore

$$|\phi(h \exp(t\zeta)) - f(xc^k)|^p \leq C \sum_{w \in \mathbb{H} \cap B(r)} |f(xc^k w) - f(xc^k)|^p,$$

où r dépend du support de χ . On intègre.

Théorème (V. Lafforgue - A. Naor (2014))

L'inégalité $(VH_{p,q,\mathbb{R}})$ est vraie pour tout $q \geq 2$ et $1 < p \leq q$.

Corollaire

Soit $p > 1$ et $q = \max\{p, 2\}$. Soit $\omega : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction croissante et majorée par t . La condition de Tessera

$$\int_1^\infty \frac{\omega(t)^q}{t^{q+1}} dt < \infty$$

est nécessaire et suffisante pour qu'un multiple de ω soit la compression d'un plongement lipschitzien de \mathbb{H}^{2n+1} dans L^p .

Théorème (V. Lafforgue - A. Naor (2014))

L'inégalité $(VH_{p,q,\mathbb{R}})$ est vraie pour tout $q \geq 2$ et $1 < p \leq q$.

Corollaire

Soit $p > 1$ et $q = \max\{p, 2\}$. Soit $\omega : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction croissante et majorée par t . La condition de Tessera

$$\int_1^\infty \frac{\omega(t)^q}{t^{q+1}} dt < \infty$$

est nécessaire et suffisante pour qu'un multiple de ω soit la compression d'un plongement lipschitzien de \mathbb{H}^{2n+1} dans L^p .

J'explique seulement le cas particulier $p = q = 2$, obtenu par une méthode bien plus simple.

Théorème (T. Austin - A. Naor - R. Tessera (2013))

La version locale de l'inégalité $(VH_{2,2,\mathbb{R}})$ est vraie, i.e. il existe une constante C telle que pour toute application $\phi : \mathbb{H} \rightarrow \mathcal{H}$ à valeurs dans un espace de Hilbert, et tout r ,

$$\int_1^{r^2} \|\nabla_v^t \phi\|_{L^2(B(r))}^2 \frac{dt}{t^2} \leq C \|\nabla_{\mathbb{H}} \phi\|_{L^2(B(21r))}^2.$$

Démonstration de $(VH_{2,2,\mathbb{R}})$

On fait une transformation de Fourier en y et en z . On note

$$\hat{f}_\nu(x, \mu) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-2\pi i(\mu y + \nu z)} f(x, y, z) dy dz.$$

Comme $(\widehat{\nabla_\nu^t f})_\nu = (e^{2\pi i \nu t} - 1)\hat{f}_\nu$,

$$\|\nabla_\nu^t f\|_{L^2(\mathbb{H})}^2 = \int_{\mathbb{R}} |e^{2\pi i \nu t} - 1|^2 \|\hat{f}_\nu\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 d\nu.$$

On majore l'intégrale

$$\int_1^\infty |e^{2\pi i \nu t} - 1|^2 \frac{dt}{t^2} = 4 \int_1^\infty \sin(\pi \nu t)^2 \frac{dt}{t^2} = 4|\nu| \int_{|\nu|}^\infty \sin(\pi t)^2 \frac{dt}{t^2} \leq 4\pi^2 |\nu|.$$

Il vient

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \|\nabla_\nu^t f\|_{L^2(\mathbb{H})}^2 \frac{dt}{t^2} &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_1^\infty \sin(\pi \nu t)^2 \frac{dt}{t^2} \right) \|\hat{f}_\nu\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 d\nu \\ &\leq 4\pi^2 \int_{\mathbb{R}} |\nu| \|\hat{f}_\nu\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 d\nu. \end{aligned}$$

Les champs de vecteurs invariants à gauche sont $\xi = \frac{\partial}{\partial x}$ et $\eta = \frac{\partial}{\partial y} + x \frac{\partial}{\partial z}$, donc

$$\begin{aligned}\|\xi f\|_{L^2(\mathbb{H})}^2 &= \int_{\mathbb{R}} \left\| \frac{\partial \hat{f}_\nu}{\partial x} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 d\nu, \\ \|\eta f\|_{L^2(\mathbb{H})}^2 &= \int_{\mathbb{R}} \|(2\pi i\mu + 2\pi i\nu x)\hat{f}_\nu\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 d\nu \\ &= 4\pi^2 \int_{\mathbb{R}} \nu^2 \left\| \left(x + \frac{\mu}{\nu}\right)\hat{f}_\nu \right\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 d\nu,\end{aligned}$$

d'où

$$|\nabla_{\mathbb{H}} f|_{L^2(\mathbb{H})}^2 = \int_{\mathbb{R}} \left(\left\| \frac{\partial \hat{f}_\nu}{\partial x} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 + 4\pi^2 \nu^2 \left\| \left(x + \frac{\mu}{\nu}\right)\hat{f}_\nu \right\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \right) d\nu.$$

Il s'agit de l'hamiltonien de l'oscillateur harmonique quantique (décentré). Le spectre de cet opérateur sur $L^2(\mathbb{R})$ est borné inférieurement par $c|\nu|$, d'où l'inégalité

$$\int_1^\infty \|\nabla_\nu^t f\|^2 \frac{dt}{t^2} \leq \frac{1}{c} \|\nabla_{\mathbb{H}} f\|^2.$$

Les champs de vecteurs invariants à gauche sont $\xi = \frac{\partial}{\partial x}$ et $\eta = \frac{\partial}{\partial y} + x \frac{\partial}{\partial z}$, donc

$$\begin{aligned} \|\xi f\|_{L^2(\mathbb{H})}^2 &= \int_{\mathbb{R}} \left\| \frac{\partial \hat{f}_\nu}{\partial x} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 d\nu, \\ \|\eta f\|_{L^2(\mathbb{H})}^2 &= \int_{\mathbb{R}} \|(2\pi i \mu + 2\pi i \nu x) \hat{f}_\nu\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 d\nu \\ &= 4\pi^2 \int_{\mathbb{R}} \nu^2 \left\| \left(x + \frac{\mu}{\nu}\right) \hat{f}_\nu \right\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 d\nu, \end{aligned}$$

d'où

$$\|\nabla_{\mathbb{H}} f\|_{L^2(\mathbb{H})}^2 = \int_{\mathbb{R}} \left(\left\| \frac{\partial \hat{f}_\nu}{\partial x} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 + 4\pi^2 \nu^2 \left\| \left(x + \frac{\mu}{\nu}\right) \hat{f}_\nu \right\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \right) d\nu.$$

Il s'agit de l'hamiltonien de l'oscillateur harmonique quantique (décentré). Le spectre de cet opérateur sur $L^2(\mathbb{R})$ est borné inférieurement par $c|\nu|$, d'où l'inégalité

$$\int_1^\infty \|\nabla_\nu^t f\|^2 \frac{dt}{t^2} \leq \frac{1}{c} \|\nabla_{\mathbb{H}} f\|^2.$$

On a vu plus haut comment déduire la version locale de $(V_{2,2,\mathbb{R}})$ de la version globale.

On s'attaque enfin à l'inégalité $(VH_{1,2,\mathbb{R}})$.

Définition

Soit $E \subset \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^{2n+1}$ un ensemble lisse par morceaux. Notons E^r son r -voisinage tubulaire. Le **périmètre horizontal** de E est

$$\text{Per}(E) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\text{mes}(E^r \setminus E)}{r}.$$

On introduit la fonction $\bar{v}(E) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\bar{v}(E)(s) := 2^{-s} \text{mes}(E \Delta c^{2s} E).$$

Le **périmètre vertical** de E est la norme L^2 de cette fonction sur \mathbb{R} .

On s'attaque enfin à l'inégalité $(VH_{1,2,\mathbb{R}})$.

Définition

Soit $E \subset \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^{2n+1}$ un ensemble lisse par morceaux. Notons E^r son r -voisinage tubulaire. Le **périmètre horizontal** de E est

$$\text{Per}(E) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\text{mes}(E^r \setminus E)}{r}.$$

On introduit la fonction $\bar{v}(E) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\bar{v}(E)(s) := 2^{-s} \text{mes}(E \Delta c^{2^{2s}} E).$$

Le **périmètre vertical** de E est la norme L^2 de cette fonction sur \mathbb{R} .

Proposition

L'inégalité $(VH_{1,2,\mathbb{R}})$ équivaut à l'énoncé $(PVP H_n)$ suivant : il existe une constante C_n telle que, pour tout ensemble lisse par morceaux $E \subset \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^{2n+1}$,

$$\|\bar{v}(E)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C_n \text{Per}(E).$$

Démonstration

Moralement, si $\mathbf{1}_E$ désigne la fonction indicatrice de E ,

$$\text{Per}(E) = \|\nabla \mathbf{1}_E\|_1 \quad \text{et} \quad \|\bar{v}(E)\|_{L^2(\mathbb{R})} = \left(\int_1^\infty \|\nabla_v^t \mathbf{1}_E\|_1^2 \frac{dt}{t^2} \right)^{1/2}.$$

1. Dans un sens, il suffit d'appliquer $(VH_{1,2,\mathbb{R}})$ à des fonctions affines par morceaux de la distance à E .

Démonstration

Moralement, si $\mathbf{1}_E$ désigne la fonction indicatrice de E ,

$$\text{Per}(E) = \|\nabla \mathbf{1}_E\|_1 \quad \text{et} \quad \|\bar{v}(E)\|_{L^2(\mathbb{R})} = \left(\int_1^\infty \|\nabla_v^t \mathbf{1}_E\|_1^2 \frac{dt}{t^2} \right)^{1/2}.$$

1. Dans un sens, il suffit d'appliquer $(VH_{1,2,\mathbb{R}})$ à des fonctions affines par morceaux de la distance à E .
2. Dans l'autre, on écrit une fonction ϕ comme l'intégrale des fonctions indicatrices de ses ensembles de sur-niveaux. Lorsque $\phi \geq 0$,

$$\phi(x) = \int_0^\infty \mathbf{1}_{\{\phi > u\}} du.$$

La formule de la coaire (intégration le long des hypersurfaces de niveau) donne

$$\|\nabla_{\mathbb{H}} \phi\|_1 = \int_0^\infty \text{Per}(\{\phi > u\}) du.$$

Alors que la convexité de la norme à la Besov donne

$$\left(\int_1^\infty \|\nabla_v^t \phi\|_1^2 \frac{dt}{t^2} \right)^{1/2} \leq \int_0^\infty \|\bar{v}(\{\phi > u\})\|_{L^2(\mathbb{R})} du.$$

Théorème (A. Naor - R. Young (2020))

L'inégalité (PVPH_n) est vraie dès que $n \geq 2$. Autrement dit, pour les ensembles lisses par morceaux E de $\mathbb{H}^5, \mathbb{H}^7, \dots$

$$\|\bar{v}(E)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C_n \text{Per}(E).$$

Cela suffit à garantir que la constante de Goemans-Linial $\rho(n)$ croît au moins comme $\sqrt{\log n}$.

En revanche, l'inégalité (PVPH₁) est fautive, i.e. pour le groupe d'Heisenberg de dimension 3, la comparaison entre les deux périmètres est différente.

Dans l'espace euclidien, la notion qui traduit de façon quantitative l'existence de plans tangents est la rectifiabilité uniforme, introduite par G. David et S. Semmes en 1993. Elle consiste à approximer un ensemble par des graphes lipschitziens. Soit $\lambda \in]0, 1[$. Un sous-ensemble E de \mathbb{R}^n est un graphe λ -lipschitzien sur un hyperplan V si

- 1 il existe une fonction $f : V \rightarrow V^\perp$ telle que $E = \{x + f(x); x \in H\}$;
- 2 pour tous $a, b \in E$, $|p_{V^\perp}(a - b)| \leq \lambda|a - b|$.

Alors f est $\frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}}$ -lipschitzienne.

Dans l'espace euclidien, la notion qui traduit de façon quantitative l'existence de plans tangents est la rectifiabilité uniforme, introduite par G. David et S. Semmes en 1993. Elle consiste à approximer un ensemble par des graphes lipschitziens. Soit $\lambda \in]0, 1[$. Un sous-ensemble E de \mathbb{R}^n est un graphe λ -lipschitzien sur un hyperplan V si

- 1 il existe une fonction $f : V \rightarrow V^\perp$ telle que $E = \{x + f(x); x \in H\}$;
- 2 pour tous $a, b \in E$, $|p_{V^\perp}(a - b)| \leq \lambda|a - b|$.

Alors f est $\frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}}$ -lipschitzienne.

Dans \mathbb{H}^{2n+1} , voici ce qui se rapproche le plus d'un graphe lipschitzien.

Définition (B. Franchi - S. Serapioni - F. Serra-Cassano (2006))

Un sous-ensemble $E \subset \mathbb{H}^{2n+1}$ est un graphe intrinsèque s'il existe un hyperplan vertical V , orthogonal à une droite horizontale W , et une fonction $f : V \rightarrow W$ telle que

$$E := \Gamma_f = \{uf(u); u \in V\}.$$

Soit $\lambda \in]0, 1[$. E est un **graphe intrinsèque λ -lipschitzien** si pour tous points $g, h \in E$,

$$|p_W(g^{-1}h)| \leq \lambda d(g, h).$$

La régularité des graphes lipschitziens intrinsèques est un problème difficile. En général, Γ_f graphe lipschitzien intrinsèque n'entraîne pas que f est lipschitzienne. Le seul point où l'hypothèse $n > 1$ intervient, c'est ici :

Lemme

Soit $V \subset H^{2n+1}$, $n > 1$, un sous-groupe vertical de dimension $2n$. Soit Γ_f un graphe intrinsèque λ -lipschitzien, $\lambda \in]0, 1[$. Soit $\mathbb{H} < V$ un sous-groupe isomorphe à \mathbb{H}^3 qui commute avec W , soit $v \in V$. Alors la restriction de f à $v\mathbb{H}$ est lipschitzienne.

La régularité des graphes lipschitziens intrinsèques est un problème difficile. En général, Γ_f graphe lipschitzien intrinsèque n'entraîne pas que f est lipschitzienne. Le seul point où l'hypothèse $n > 1$ intervient, c'est ici :

Lemme

Soit $V \subset H^{2n+1}$, $n > 1$, un sous-groupe vertical de dimension $2n$. Soit Γ_f un graphe intrinsèque λ -lipschitzien, $\lambda \in]0, 1[$. Soit $\mathbb{H} < V$ un sous-groupe isomorphe à \mathbb{H}^3 qui commute avec W , soit $v \in V$. Alors la restriction de f à $v\mathbb{H}$ est lipschitzienne.

En appliquant la version locale de $(V_{2,2,\mathbb{R}})$ aux restrictions de f aux classes à gauche de \mathbb{H} , on en déduit

Proposition

Soit $n > 1$. Soit E un graphe intrinsèque λ -lipschitzien. Alors, dans toute boule $B(h, r)$ de \mathbb{H}^{2n+1} ,

$$\bar{v}_{B(h,r)}(E) \leq C \frac{r^{2n+1}}{1-\lambda}.$$

Noter que $r^{2n+1} = \text{Per}(E \cap B(h, 21r))$.

Démonstration du Lemme

Pour tout $g \in \mathbb{H}^{2n+1}$, il existe $v \in V$ et $w \in W$ uniques tels que $g = vw$. Par définition, $w = p_W(g)$. En particulier, si $g = vf(v) \in \Gamma_f$, $p_W(g) = f(v)$.

Démonstration du Lemme

Pour tout $g \in \mathbb{H}^{2n+1}$, il existe $v \in V$ et $w \in W$ uniques tels que $g = vw$. Par définition, $w = p_W(g)$. En particulier, si $g = vf(v) \in \Gamma_f$, $p_W(g) = f(v)$.

Comme \mathbb{H} et W commutent, si $g = vf(v)$ et $h = v'f(v') \in \Gamma_f$ avec $u, u' \in \mathbb{H}$,

$$g^{-1}h = f(v)^{-1}v^{-1}v'f(v') = v^{-1}v'f(v)^{-1}f(v'),$$

donc

$$|f(v)^{-1}f(v')| = |p_W(g^{-1}h)| \leq \lambda d(vf(v), v'f(v')) \leq \lambda(|f(v)^{-1}f(v')| + d(v, v'))$$

d'où, en notant additivement dans W ,

$$|f(v) - f(v')| \leq \frac{\lambda}{1-\lambda} d(v, v').$$

Démonstration du Lemme

Pour tout $g \in \mathbb{H}^{2n+1}$, il existe $v \in V$ et $w \in W$ uniques tels que $g = vw$. Par définition, $w = p_W(g)$. En particulier, si $g = vf(v) \in \Gamma_f$, $p_W(g) = f(v)$.

Comme \mathbb{H} et W commutent, si $g = vf(v)$ et $h = v'f(v') \in \Gamma_f$ avec $u, u' \in \mathbb{H}$,

$$g^{-1}h = f(v)^{-1}v^{-1}v'f(v') = v^{-1}v'f(v)^{-1}f(v'),$$

donc

$$|f(v)^{-1}f(v')| = |p_W(g^{-1}h)| \leq \lambda d(vf(v), v'f(v')) \leq \lambda(|f(v)^{-1}f(v')| + d(v, v'))$$

d'où, en notant additivement dans W ,

$$|f(v) - f(v')| \leq \frac{\lambda}{1-\lambda} d(v, v').$$

Comme la notion de graphe intrinsèque λ -lipschitzien est invariante à gauche, cela démontre le lemme.

Démonstration du Lemme

Pour tout $g \in \mathbb{H}^{2n+1}$, il existe $v \in V$ et $w \in W$ uniques tels que $g = vw$. Par définition, $w = p_W(g)$. En particulier, si $g = vf(v) \in \Gamma_f$, $p_W(g) = f(v)$.

Comme \mathbb{H} et W commutent, si $g = vf(v)$ et $h = v'f(v') \in \Gamma_f$ avec $u, u' \in \mathbb{H}$,

$$g^{-1}h = f(v)^{-1}v^{-1}v'f(v') = v^{-1}v'f(v)^{-1}f(v'),$$

donc

$$|f(v)^{-1}f(v')| = |p_W(g^{-1}h)| \leq \lambda d(vf(v), v'f(v')) \leq \lambda(|f(v)^{-1}f(v')| + d(v, v'))$$

d'où, en notant additivement dans W ,

$$|f(v) - f(v')| \leq \frac{\lambda}{1-\lambda} d(v, v').$$

Comme la notion de graphe intrinsèque λ -lipschitzien est invariante à gauche, cela démontre le lemme.

La distance utilisée sur \mathbb{H} est celle induite par \mathbb{H}^{2n+1} . La distance intrinsèque sur \mathbb{H} lui est équivalente.

Démonstration de la proposition

Soit E un domaine bordé par un graphe Γ_f , i.e. $E : \{vw ; v \in V, w \in W, \geq f(v)\}$.
 Soit $g \in V$. On applique à $f_g : u \mapsto f(gu)$, $\mathbb{H} \rightarrow W$, la version locale de $(VH_{2,2,\mathbb{R}})$:

$$\int_0^{r^2} \int_{B(r) \cap \mathbb{H}} |f_g(u) - f_g(uc^t)|^2 \frac{dt}{t^2} \leq C \|\nabla_{\mathbb{H}} f_g\|_{L^2(B(21r) \cap \mathbb{H})}^2 \leq C r^4 \frac{\lambda^2}{(1-\lambda)^2}.$$

Or

$$\begin{aligned} |f_g(u) - f_g(uc^t)| &= \int_{\mathbb{R}} |\mathbf{1}_{\{w \geq f(gu)\}} - \mathbf{1}_{\{w \geq f(guc^t)\}}| dw \\ &= \int_{\mathbb{R}} |\mathbf{1}_E - \mathbf{1}_{E_{c^{-t}}}| dw \\ &= \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{g^{-1}E \Delta g^{-1}E_{c^{-t}}} dw, \end{aligned}$$

donc, avec Fubini, l'inégalité triangulaire pour rester dans les bonnes boules, Cauchy-Schwartz, et en intégrant sur un supplémentaire V' de \mathbb{H} dans V ,

$$\int_0^{r^2} \bar{v}_{B(r)}(E)(t)^2 \frac{dt}{t^2} \leq \int_{V'} dg \int_0^{r^2} \int_{B(r) \cap \mathbb{H}} |f_g(u) - f_g(uc^t)|^2 \frac{dt}{t^2} \leq C r^{2n+1} \frac{\lambda^2}{(1-\lambda)^2}.$$

L'étape suivante est d'approximer certains sous-ensembles de \mathbb{H}^{2n+1} par des graphes lipschitziens intrinsèques. L'idée remonte à G. David et C. Christ vers 1990 dans l'espace euclidien. Elle s'adapte sans difficulté aux groupes d'Heisenberg.

Définition

Un espace métrique E de dimension s est (C, r) -Ahlfors-régulier si la mesure de Hausdorff de toutes les boules de rayon $r' < r$ est encadrée entre $\frac{1}{C} r'^s$ et $C r'^s$.

L'étape suivante est d'approximer certains sous-ensembles de \mathbb{H}^{2n+1} par des graphes lipschitziens intrinsèques. L'idée remonte à G. David et C. Christ vers 1990 dans l'espace euclidien. Elle s'adapte sans difficulté aux groupes d'Heisenberg.

Définition

Un espace métrique E de dimension s est (C, r) -Ahlfors-régulier si la mesure de Hausdorff de toutes les boules de rayon $r' < r$ est encadrée entre $\frac{1}{C} r'^s$ et $C r'^s$.

Proposition

Tout ensemble Ahlfors-régulier $E \subset \mathbb{H}^{2n+1}$ de dimension de Hausdorff $2n + 1$ possède une coronisation. En gros, il s'agit d'un recouvrement fini par des cubes, triés en bons et mauvais, tel que

- *les cubes empiètent modérément les uns sur les autres ;*
- *les mauvais cubes sont peu nombreux ;*
- *dans les bons cubes, E est Hausdorff-proche d'un graphe lipschitzien intrinsèque.*

Monotonie

Pour Christ et David, ce qui permet d'approcher un ensemble par des graphes lipschitziens, c'est une hypothèse de rectifiabilité uniforme.

Monotonie

Pour Christ et David, ce qui permet d'approcher un ensemble par des graphes lipschitziens, c'est une hypothèse de rectifiabilité uniforme.

Dans les groupes d'Heisenberg, la notion de rectifiabilité n'est pas claire. On la remplace par la *monotonie* globale, définie ci-dessous, et sa variante locale.

Définition (J. Cheeger - B. Kleiner - A. Naor (2011))

Un ensemble $E \subset \mathbb{H}^{2n+1}$ est **monotone** si son intersection avec toute droite horizontale est une demi-droite. Sinon, la **non-monotonie** de E est la quantité

$$NM(E) = \int_{\mathcal{L}} \inf_{D \in \mathcal{D}(L)} |D \Delta (E \cap L)| dL.$$

Ici, \mathcal{L} est l'espace des droites horizontales, muni de sa mesure naturelle, et $\mathcal{D}(L)$ désigne l'ensemble des demi-droites contenues dans une droite L .

Monotonie

Pour Christ et David, ce qui permet d'approcher un ensemble par des graphes lipschitziens, c'est une hypothèse de rectifiabilité uniforme.

Dans les groupes d'Heisenberg, la notion de rectifiabilité n'est pas claire. On la remplace par la *monotonie* globale, définie ci-dessous, et sa variante locale.

Définition (J. Cheeger - B. Kleiner - A. Naor (2011))

Un ensemble $E \subset \mathbb{H}^{2n+1}$ est **monotone** si son intersection avec toute droite horizontale est une demi-droite. Sinon, la **non-monotonie** de E est la quantité

$$NM(E) = \int_{\mathcal{L}} \inf_{D \in \mathcal{D}(L)} |D\Delta(E \cap L)| dL.$$

Ici, \mathcal{L} est l'espace des droites horizontales, muni de sa mesure naturelle, et $\mathcal{D}(L)$ désigne l'ensemble des demi-droites contenues dans une droite L .

Lemme

Soit $E \subset \mathbb{H}^{2n+1}$ un ensemble mesurable. Si $NM(E) = 0$, alors E est vide, plein, ou un demi-espace vertical (à mesure nulle près). Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si $NM(E) < \delta$, alors il existe un demi-espace vertical P tel que $\text{mes}(P\Delta E) < \epsilon$.

Construction de la coronisation

On suit la méthode de temps d'arrêt de G. David, qui ne dépend que de l'Ahlfors-régularité. On obtient une partition en cubes.

Construction de la coronisation

On suit la méthode de temps d'arrêt de G. David, qui ne dépend que de l'Ahlfors-régularité. On obtient une partition en cubes.

La somme des non-monotonies dans les cubes de la partition est contrôlée par le périmètre, donc NM est petite dans la plupart des cubes.

Construction de la coronisation

On suit la méthode de temps d'arrêt de G. David, qui ne dépend que de l'Ahlfors-régularité. On obtient une partition en cubes.

La somme des non-monotonies dans les cubes de la partition est contrôlée par le périmètre, donc NM est petite dans la plupart des cubes.

Le lemme garantit que dans ces bons cubes, E est proche d'un demi-espace. On trie les cubes suivant la direction du demi-espace. Sur la réunion des cubes de directions voisines, on construit, au moyen d'une partition de l'unité, un graphe lipschitzien intrinsèque.

Construction de la coronisation

On suit la méthode de temps d'arrêt de G. David, qui ne dépend que de l'Ahlfors-régularité. On obtient une partition en cubes.

La somme des non-monotonies dans les cubes de la partition est contrôlée par le périmètre, donc NM est petite dans la plupart des cubes.

Le lemme garantit que dans ces bons cubes, E est proche d'un demi-espace. On trie les cubes suivant la direction du demi-espace. Sur la réunion des cubes de directions voisines, on construit, au moyen d'une partition de l'unité, un graphe lipschitzien intrinsèque.

Si, au voisinage d'un point, les directions des demi-espaces varient beaucoup, cela crée de la non-monotonie. Ces points sont donc rares, comme les mauvais cubes.

Construction de la coronisation

On suit la méthode de temps d'arrêt de G. David, qui ne dépend que de l'Ahlfors-régularité. On obtient une partition en cubes.

La somme des non-monotonies dans les cubes de la partition est contrôlée par le périmètre, donc NM est petite dans la plupart des cubes.

Le lemme garantit que dans ces bons cubes, E est proche d'un demi-espace. On trie les cubes suivant la direction du demi-espace. Sur la réunion des cubes de directions voisines, on construit, au moyen d'une partition de l'unité, un graphe lipschitzien intrinsèque.

Si, au voisinage d'un point, les directions des demi-espaces varient beaucoup, cela crée de la non-monotonie. Ces points sont donc rares, comme les mauvais cubes.

Proposition

L'existence de coronisations et l'estimation du périmètre vertical des graphes lipschitziens intrinsèques

$$\bar{v}_{B(p,r)}(E) \leq C \frac{r^{2n+1}}{1-\lambda}.$$

entraînent une estimée similaire pour tous les ensembles Ahlfors-réguliers de dimension de Hausdorff $2n + 1$.

Approximation par des ensembles Ahlfors-réguliers

On travaille avec des réunions finies de cubes, qui sont Ahlfors-régulières à petite échelle. Il s'agit d'aller vers des échelles plus grandes.

Lemme

Etant donné E , il existe une suite de cubes B_i de diamètres s_i et des sous-ensembles décroissants E_i , tels que $E_i \Delta E_{i+1} \subset B_i$ et

- 1 E_i est (C, s_i) -Ahlfors régulier ;
- 2 $\sum_i s_i^{2n+1} \leq \text{Per}(E)$;
- 3 $\|\bar{\nu}(E)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C \text{Per}(E) + \sum_i \|\bar{\nu}_{B_i}(E_i)\|_{L^2(\mathbb{R})}$.

Approximation par des ensembles Ahlfors-réguliers

On travaille avec des réunions finies de cubes, qui sont Ahlfors-régulières à petite échelle. Il s'agit d'aller vers des échelles plus grandes.

Lemme

Etant donné E , il existe une suite de cubes B_i de diamètres s_i et des sous-ensembles décroissants E_i , tels que $E_i \Delta E_{i+1} \subset B_i$ et

- 1 E_i est (C, s_i) -Ahlfors régulier ;
- 2 $\sum_i s_i^{2n+1} \leq \text{Per}(E)$;
- 3 $\|\bar{\nu}(E)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C \text{Per}(E) + \sum_i \|\bar{\nu}_{B_i}(E_i)\|_{L^2(\mathbb{R})}$.

La démonstration est gloutonne : quand on rencontre un cube maximal dans lequel E n'est pas Ahlfors-régulier, on l'ajoute ou on le retire à E .

Approximation par des ensembles Ahlfors-réguliers

On travaille avec des réunions finies de cubes, qui sont Ahlfors-régulières à petite échelle. Il s'agit d'aller vers des échelles plus grandes.

Lemme

Etant donné E , il existe une suite de cubes B_i de diamètres s_i et des sous-ensembles décroissants E_i , tels que $E_i \Delta E_{i+1} \subset B_i$ et

- 1 E_i est (C, s_i) -Ahlfors régulier ;
- 2 $\sum_i s_i^{2n+1} \leq \text{Per}(E)$;
- 3 $\|\bar{v}(E)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C \text{Per}(E) + \sum_i \|\bar{v}_{B_i}(E_i)\|_{L^2(\mathbb{R})}$.

La démonstration est gloutonne : quand on rencontre un cube maximal dans lequel E n'est pas Ahlfors-régulier, on l'ajoute ou on le retire à E .

L'estimation du périmètre vertical obtenue précédemment s'applique aux E_i : $\|\bar{v}_{B_i}(E_i)\|_2 \leq C s_i^{2n+1}$. Avec les estimations (3) et (2), cela donne la comparaison des deux périmètres en général, et conclut la démonstration de $(VH_{1,2,\mathbb{R}})$.

Théorème (A. Naor - R. Young (2022))

En dimension 3, dans \mathbb{H} , l'inégalité $(VH_{1,4})$ est vraie.

En revanche, $(VH_{1,q})$ n'est pas vraie pour $q < 4$.

Théorème (A. Naor - R. Young (2022))

En dimension 3, dans \mathbb{H} , l'inégalité $(VH_{1,4})$ est vraie.

En revanche, $(VH_{1,q})$ n'est pas vraie pour $q < 4$.

Le théorème entraîne une borne supérieure sur la compression. Cette borne est optimale.

Théorème (A. Naor - R. Young (2022))

La compression L^1 de \mathbb{H} est de l'ordre de $\frac{t}{\log(t)^{1/4}}$.

Autrement dit, il existe un plongement de \mathbb{H} dans L^1 de compression $\frac{t}{\log(t)^{1/4}}$.

Théorème (A. Naor - R. Young (2022))

En dimension 3, dans \mathbb{H} , l'inégalité $(VH_{1,4})$ est vraie.

En revanche, $(VH_{1,q})$ n'est pas vraie pour $q < 4$.

Le théorème entraîne une borne supérieure sur la compression. Cette borne est optimale.

Théorème (A. Naor - R. Young (2022))

La compression L^1 de \mathbb{H} est de l'ordre de $\frac{t}{\log(t)^{1/4}}$.

Autrement dit, il existe un plongement de \mathbb{H} dans L^1 de compression $\frac{t}{\log(t)^{1/4}}$.

Ce plongement a un mérite supplémentaire, il permet de construire un espace métrique qui possède des plongements bilipschitziens dans L^1 et dans L^4 , mais pas dans L^q pour $1 < q < 4$.

Théorème (A. Naor - R. Young (2022))

En dimension 3, dans \mathbb{H} , l'inégalité $(VH_{1,4})$ est vraie.

En revanche, $(VH_{1,q})$ n'est pas vraie pour $q < 4$.

Le théorème entraîne une borne supérieure sur la compression. Cette borne est optimale.

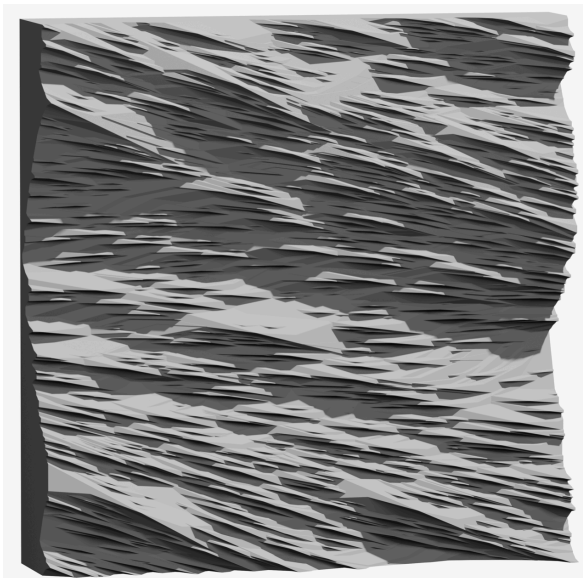
Théorème (A. Naor - R. Young (2022))

La compression L^1 de \mathbb{H} est de l'ordre de $\frac{t}{\log(t)^{1/4}}$.

Autrement dit, il existe un plongement de \mathbb{H} dans L^1 de compression $\frac{t}{\log(t)^{1/4}}$.

Ce plongement a un mérite supplémentaire, il permet de construire un espace métrique qui possède des plongements bilipschitziens dans L^1 et dans L^4 , mais pas dans L^q pour $1 < q < 4$.

C'est surprenant, car ce phénomène ne se produit pas pour les plongements linéaires entre espaces de Banach (M.I. Kadec - A. Pełczyński 1962).



Discussion

Question (G. Lancien). Sait-on dans quels espaces de Banach le groupe d'Heisenberg possède des plongement bi-lipschitziens ?

Gilles a trouvé lui-même la réponse dans la journée : ce sont les espaces de Banach qui n'ont pas de cotype. En effet,

- d'une part, d'après Pisier, un espace de cotype q peut être renormé pour devenir q -convexe. Alors Austin-Naor-Tessera ou Lafforgue-Tessera montrent que \mathbb{H} n'a pas de plongement bilipschitzien dans un tel espace.
- d'autre part, un espace qui n'a pas de cotype contient des copies de ℓ_∞^n dans lesquelles on peut plonger toute partie finie. Une construction due à F. Baudier and G. Lancien fournit alors un plongement bi-lipschitzien global.

F. Baudier and G. Lancien, *Embeddings of locally finite metric spaces into Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **136** (2008), no. 3, 1029–1033.