Le théorème des tranches rectifiables [d'après R. L. Jerrard]

Pierre Pansu

13 janvier 2022

Objectif d'Antoine : définir les courants entiers sur certains groupes de Carnot, en s'inspirant du théorème suivant.

Théorème (B. White 1999)

Soit T un courant normal (i.e. les masses $M(T), M(\partial T) < +\infty$) de dimension k dans $\mathbb{R}^n$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

1. *T est un courant rectifiable à densité entière.*
2. *Pour toute projection P de $\mathbb{R}^n$ sur un sous-espace E de dimension k, la tranche $\langle T, P, y\rangle$ est un courant rectifiable à densité entière de dimension 0 pour presque tout $y \in E$.*

Objectif d'Antoine : définir les courants entiers sur certains groupes de Carnot, en s'inspirant du théorème suivant.

Théorème (B. White 1999)

Soit T un courant normal (i.e. les masses $M(T), M(\partial T) < +\infty$) de dimension k dans $\mathbb{R}^n$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

1. *T est un courant rectifiable à densité entière.*
2. *Pour toute projection P de $\mathbb{R}^n$ sur un sous-espace E de dimension k, la tranche $\langle T, P, y\rangle$ est un courant rectifiable à densité entière de dimension 0 pour presque tout $y \in E$.*

La tranche $\langle T, P, y\rangle$ est un courant normal de dimension 0 sur $\mathbb{R}^n$, dont le support est contenu dans $P^{-1}(y)$. Elle est caractérisée par la formule

$$T(\omega P^* vol_E) = \int_E \langle T, P, y\rangle(\omega)\, dy,$$

pour toute fonction lisse à support compact ω sur $\mathbb{R}^n$.
Son existence résulte du théorème de différentiation de Lebesgue. Si T est rectifiable à densité entière, il en est de même des tranches, qui sont donc des combinaisons finies de points avec multiplicités entières.

Objectif d'Antoine : définir les courants entiers sur certains groupes de Carnot, en s'inspirant du théorème suivant.

Théorème (B. White 1999)

Soit T un courant normal (i.e. les masses $M(T), M(\partial T) < +\infty$) de dimension k dans $\mathbb{R}^n$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

1. *T est un courant rectifiable à densité entière.*
2. *Pour toute projection P de $\mathbb{R}^n$ sur un sous-espace E de dimension k, la tranche $\langle T, P, y\rangle$ est un courant rectifiable à densité entière de dimension 0 pour presque tout $y \in E$.*

La tranche $\langle T, P, y\rangle$ est un courant normal de dimension 0 sur $\mathbb{R}^n$, dont le support est contenu dans $P^{-1}(y)$. Elle est caractérisée par la formule

$$T(\omega P^* vol_E) = \int_E \langle T, P, y\rangle(\omega)\, dy,$$

pour toute fonction lisse à support compact ω sur $\mathbb{R}^n$.
Son existence résulte du théorème de différentiation de Lebesgue. Si T est rectifiable à densité entière, il en est de même des tranches, qui sont donc des combinaisons finies de points avec multiplicités entières.

Aujourd'hui, je donne la démonstration du théorème due à Robert Jerrard,
A new proof of the rectifiable slices theorem. Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5) **1** (2002), no. 4, 905–924.

C'est 2 $\implies$ 1 qui nous intéresse.

L'idée est que l'application

$$E \to \mathbf{F}^0(\mathrm{Ker}\, P), \quad y \mapsto \langle T, P, y \rangle$$

est à variation bornée. Ici, $\mathbf{F}^0(\mathrm{Ker}\, P)$ est l'espace des courants de dimension 0 muni de la norme flat.

C'est 2 $\Longrightarrow$ 1 qui nous intéresse.

L'idée est que l'application

$$E \to \mathbf{F}^0(\mathrm{Ker}\,P), \quad y \mapsto \langle T, P, y \rangle$$

est à variation bornée. Ici, $\mathbf{F}^0(\mathrm{Ker}\,P)$ est l'espace des courants de dimension 0 muni de la norme flat.

On dilate alors T au voisinage d'un point typique x_0, et on montre la convergence des dilatés vers un multiple entier $\theta(x_0)$ du courant d'intégration sur un sous-espace affine $A(x_0)$ de dimension k.

C'est 2 $\implies$ 1 qui nous intéresse.

L'idée est que l'application

$$E \to \mathbf{F}^0(\mathrm{Ker}\, P), \quad y \mapsto \langle T, P, y \rangle$$

est à variation bornée. Ici, $\mathbf{F}^0(\mathrm{Ker}\, P)$ est l'espace des courants de dimension 0 muni de la norme flat.

On dilate alors T au voisinage d'un point typique x_0, et on montre la convergence des dilatés vers un multiple entier $\theta(x_0)$ du courant d'intégration sur un sous-espace affine $A(x_0)$ de dimension k.

La convergence des dilatés des tranches repose sur une estimation a priori fournie par la variation totale de l'application ci-dessus. Une étape intermédiaire est une inégalité de Poincaré due à L. Ambrosio.

On utilise la représentation de Riesz de T : Une mesure positive $|T|$ et un champ mesurable de k-vecteurs unitaires $\vec{T}$, de sorte que pour toute k-forme lisse ω,

$$T(\omega) = \int_{\mathbb{R}^n} \langle \omega, \vec{T} \rangle d|T|.$$

On se place en un point (qui sera l'origine désormais)

- de densité de $|T|$,
- de continuité approximative de $\vec{T}$,
- où $|\partial T|$ a une densité par rapport à $|T|$.

On choisit le k-vecteur *simple* unitaire ξ qui maximize le produit scalaire $\vec{T}(0) \cdot \xi$, et désormais on se concentre sur la projection sur le k-plan engendré par ξ (qui sera le plan des coordonnées $(x_1, \ldots, x_k)$ désormais).

On utilise la représentation de Riesz de T : Une mesure positive $|T|$ et un champ mesurable de k-vecteurs unitaires $\vec{T}$, de sorte que pour toute k-forme lisse ω,

$$T(\omega) = \int_{\mathbb{R}^n} \langle \omega, \vec{T} \rangle d|T|.$$

On se place en un point (qui sera l'origine désormais)

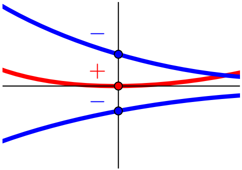
- de densité de $|T|$,
- de continuité approximative de $\vec{T}$,
- où $|\partial T|$ a une densité par rapport à $|T|$.

On choisit le k-vecteur *simple* unitaire ξ qui maximize le produit scalaire $\vec{T}(0) \cdot \xi$, et désormais on se concentre sur la projection sur le k-plan engendré par ξ (qui sera le plan des coordonnées $(x_1, \ldots, x_k)$ désormais).

Les tranches sont vues comme une famille de mesures signées sur $\mathbb{R}^{n-k}$. On note T_λ le courant T dilaté d'un facteur λ et $T^\lambda(y)$ la tranche de T_λ en $y \in \mathbb{R}^k$ (c'est une mesure signée sur $\mathbb{R}^{n-k}$). On voit cette famille comme une application à valeurs dans le dual de l'espace des fonctions C^1 sur une boule ouverte $B(R) \subset \mathbb{R}^{n-k}$ (c'est en gros ça, $\mathbf{F}^0$),

$$y \mapsto T^\lambda(y) \in C^1_c(B(R))^*.$$

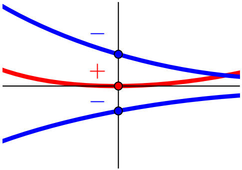
Remarquer que pour tout ouvert $W \subset \mathbb{R}^{n-k}$, $T^\lambda(W) \in \mathbb{Z}$ est un entier relatif.



On veut montrer que T^{λ} est approximativement constante. Il faut contrôler sa dérivée.

Définition (Variation totale)

$Var(T^{\lambda})$
$:= \sum_{i=1}^{k} \sup\{\int \frac{\partial\phi}{\partial y_i}(y,z)\,T^{\lambda}(dz)\,dy\,;\ \phi \in C_c^1(B(R)),\ \sup_{y\in B(R)} \|\phi(y,\cdot)\|_{C_c^1(B(R))} \leq 1\}.$



On veut montrer que T^λ est approximativement constante. Il faut contrôler sa dérivée.

Définition (Variation totale)

$Var(T^\lambda)$
$:= \sum_{i=1}^k \sup\{\int \frac{\partial \phi}{\partial y_i}(y,z)T^\lambda(dz)\,dy\,;\ \phi \in C_c^1(B(R)),\ \sup_{y\in B(R)} \|\phi(y,\cdot)\|_{C_c^1(B(R))} \leq 1\}.$

On va montrer qu'elle est petite :

Proposition (Contrôle de la variation totale)

Pour tout $R>0$, $Var(T^\lambda) = o(\lambda^{-k}|T|(B(\lambda R)))$ *quand* λ *tend vers* 0.

Par conséquent, en raison du choix de l'origine, la variation totale tend vers 0 quand λ tend vers 0.

Intégration par parties. Si $\psi \in C^1(\mathbb{R}^n)$, $\sup_{y\in B(R)} \|\psi(y,\cdot)\|_{C^1_c(B(R))} \leq 1$ est une fonction test,

$$d(\psi\, dy_2 \wedge \cdots \wedge dy_k) = \frac{\partial \psi}{\partial y_1} dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_k + \sum_{j=k+1}^{n} \frac{\partial \psi}{\partial z_j} dz_j \wedge dy_2 \wedge \cdots \wedge dy_k,$$

d'où

$$\int \frac{\partial \psi}{\partial y_1} T^{\lambda}(dz)dy = T_{\lambda}(\frac{\partial \psi}{\partial y_1} dy) = \sum_{j=k+1}^{n} T_{\lambda}(\frac{\partial \psi}{\partial z_j} dz_j \wedge dy_2 \wedge \cdots \wedge dy_k) - \partial T_{\lambda}(\psi dy_2 \wedge \cdots \wedge dy_k).$$

Intégration par parties. Si $\psi \in C^1(\mathbb{R}^n)$, $\sup_{y\in B(R)} \|\psi(y,\cdot)\|_{C^1_c(B(R))} \leq 1$ est une fonction test,

$$d(\psi\, dy_2 \wedge \cdots \wedge dy_k) = \frac{\partial \psi}{\partial y_1} dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_k + \sum_{j=k+1}^{n} \frac{\partial \psi}{\partial z_j} dz_j \wedge dy_2 \wedge \cdots \wedge dy_k,$$

d'où

$$\int \frac{\partial \psi}{\partial y_1} T^\lambda(dz)dy = T_\lambda(\frac{\partial \psi}{\partial y_1} dy) = \sum_{j=k+1}^{n} T_\lambda(\frac{\partial \psi}{\partial z_j} dz_j \wedge dy_2 \wedge \cdots \wedge dy_k) - \partial T_\lambda(\psi dy_2 \wedge \cdots \wedge dy_k).$$

Par le choix de la direction de projection (qui maximise le produit scalaire avec $\vec{T}(0)$), $\vec{T}(0)(dz_j \wedge dy_2 \wedge \cdots \wedge dy_k) = 0$ pour tout $j = k+1, \ldots, n$, d'où

$$\begin{aligned} & T_\lambda(\frac{\partial \psi}{\partial z_j} dz_j \wedge dy_2 \wedge \cdots \wedge dy_k) \\ &= \lambda^{-k} \int \frac{\partial \psi}{\partial z_j}(x/\lambda) \langle dz_j \wedge dy_2 \wedge \cdots \wedge dy_k, \vec{T}(x) - \vec{T}(0)\rangle d|T|(x) \\ &= o(\lambda^{-k}|T|(B(\lambda R))). \end{aligned}$$

Intégration par parties. Si $\psi \in C^1(\mathbb{R}^n)$, $\sup_{y \in B(R)} \|\psi(y,\cdot)\|_{C^1_c(B(R))} \leq 1$ est une fonction test,

$$d(\psi\, dy_2 \wedge \cdots \wedge dy_k) = \frac{\partial\psi}{\partial y_1} dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_k + \sum_{j=k+1}^{n} \frac{\partial\psi}{\partial z_j} dz_j \wedge dy_2 \wedge \cdots \wedge dy_k,$$

d'où

$$\int \frac{\partial\psi}{\partial y_1} T^\lambda(dz)dy = T_\lambda(\frac{\partial\psi}{\partial y_1} dy) = \sum_{j=k+1}^{n} T_\lambda(\frac{\partial\psi}{\partial z_j} dz_j \wedge dy_2 \wedge \cdots \wedge dy_k) \\ - \partial T_\lambda(\psi dy_2 \wedge \cdots \wedge dy_k).$$

Par le choix de la direction de projection (qui maximise le produit scalaire avec $\vec{T}(0)$), $\vec{T}(0)(dz_j \wedge dy_2 \wedge \cdots \wedge dy_k) = 0$ pour tout $j = k+1, \ldots, n$, d'où

$$\begin{aligned} & T_\lambda(\frac{\partial\psi}{\partial z_j} dz_j \wedge dy_2 \wedge \cdots \wedge dy_k) \\ & = \lambda^{-k} \int \frac{\partial\psi}{\partial z_j}(x/\lambda)\langle dz_j \wedge dy_2 \wedge \cdots \wedge dy_k, \vec{T}(x) - \vec{T}(0)\rangle d|T|(x) \\ & = o(\lambda^{-k}|T|(B(\lambda R))). \end{aligned}$$

Le second terme est majoré par $\lambda^{-k+1}|\partial T|(B(R)) = \lambda O(\lambda^{-k}|T|(B(\lambda R)))$.

La variation donne un contrôle sur la dérivée de la famille de mesures $y \mapsto T^\lambda(y)$. Il faut passer à une majoration de la moyenne des écarts.

Proposition (Inégalité de Poincaré, L. Ambrosio)

L'écart à la valeur moyenne sur la boule $B(R) \subset \mathbb{R}^k$ est majoré par

$$\int_{B(R)} \|T^\lambda(y) - (T^\lambda)_{B(R)}\|_{C_c^1(B(R))^*} \leq C_R Var(T^\lambda).$$

C'est un fait général pour les applications à valeurs dans un dual séparable X. Ça se démontre par approximation par des applications $C^1 : \mathbb{R}^k \to X$, pour lesquelles on intègre la dérivée le long de segments, comme en dimension finie. Voir

L. Ambrosio, *Metric space valued functions of bounded variation*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **17** (1990), 439–478.

La variation donne un contrôle sur la dérivée de la famille de mesures $y \mapsto T^\lambda(y)$. Il faut passer à une majoration de la moyenne des écarts.

Proposition (Inégalité de Poincaré, L. Ambrosio)

L'écart à la valeur moyenne sur la boule $B(R) \subset \mathbb{R}^k$ est majoré par

$$\int_{B(R)} \| T^\lambda(y) - (T^\lambda)_{B(R)} \|_{C_c^1(B(R))^*} \leq C_R Var(T^\lambda).$$

C'est un fait général pour les applications à valeurs dans un dual séparable X. Ça se démontre par approximation par des applications $C^1 : \mathbb{R}^k \to X$, pour lesquelles on intègre la dérivée le long de segments, comme en dimension finie. Voir

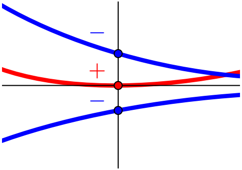
L. Ambrosio, *Metric space valued functions of bounded variation*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **17** (1990), 439–478.

Conséquence. Dans la boule $B(R) \subset \mathbb{R}^k$ l'ensemble des y tels que

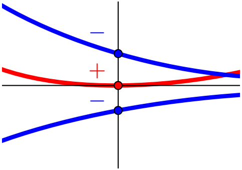
$$\| T^\lambda(y) - (T^\lambda)_{B(R)} \|_{C_c^1(B(R))^*} \leq o(\lambda^{-k} |T|(B(\lambda R)))$$

est asymptotiquement de mesure pleine lorsque λ tend vers 0.

Le prochain objectif est de se débarrasser des multiplicités négatives, i.e. des branches bleues dans la figure ci-contre.

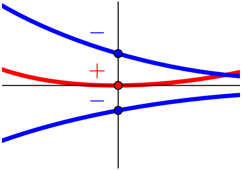


Le prochain objectif est de se débarrasser des multiplicités négatives, i.e. des branches bleues dans la figure ci-contre.



Notons $|T^\lambda(y)| - T^\lambda(y)$ la partie négative de la mesure $T^\lambda(y)$. Comme les multiplicités sont entières, lorsqu'elle est non nulle, $(|T^\lambda(y)| - T^\lambda(y))(B(R)) \geq 2$.

Le prochain objectif est de se débarrasser des multiplicités négatives, i.e. des branches bleues dans la figure ci-contre.



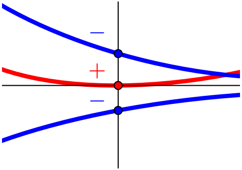
Notons $|T^\lambda(y)| - T^\lambda(y)$ la partie négative de la mesure $T^\lambda(y)$. Comme les multiplicités sont entières, lorsqu'elle est non nulle, $(|T^\lambda(y)| - T^\lambda(y))(B(R)) \geq 2$.

Par définition, $\int_{B(R)} T^\lambda(y)(B(R))\, dy = T_\lambda(\mathbf{1}_{B(R)} dy) = \lambda^{-k} \int_{B(R)} \langle dy, \vec{T}(x)\rangle d|T|(x)$.
De même, $\int_{B(R)} |T^\lambda(y)|(B(R))\, dy = \lambda^{-k} \int_{B(R)} |\langle dy, \vec{T}(x)\rangle| d|T|(x)$.
Or, comme le choix de la projection implique que $\langle dy, \vec{T}(0)\rangle > 0$,

$$|\langle dy, \vec{T}(x)\rangle| - \langle dy, \vec{T}(x)\rangle \leq 2|\langle dy, \vec{T}(0) - \vec{T}(x)\rangle| \leq 2|\vec{T}(0) - \vec{T}(x)|,$$

donc la mesure des y tels que $T^\lambda(y)$ ait des multiplicités négatives est majorée par $\lambda^{-k} \int_{B(R)} |\vec{T}(0) - \vec{T}(x)|\, dx$, qui tend vers 0 par continuité approximative.

Le prochain objectif est de se débarrasser des multiplicités négatives, i.e. des branches bleues dans la figure ci-contre.



Notons $|T^\lambda(y)| - T^\lambda(y)$ la partie négative de la mesure $T^\lambda(y)$. Comme les multiplicités sont entières, lorsqu'elle est non nulle, $(|T^\lambda(y)| - T^\lambda(y))(B(R)) \geq 2$.

Par définition, $\int_{B(R)} T^\lambda(y)(B(R))\,dy = T_\lambda(\mathbf{1}_{B(R)}dy) = \lambda^{-k}\int_{B(R)}\langle dy, \vec{T}(x)\rangle d|T|(x)$.
De même, $\int_{B(R)} |T^\lambda(y)|(B(R))\,dy = \lambda^{-k}\int_{B(R)} |\langle dy, \vec{T}(x)\rangle| d|T|(x)$.
Or, comme le choix de la projection implique que $\langle dy, \vec{T}(0)\rangle > 0$,

$$|\langle dy, \vec{T}(x)\rangle| - \langle dy, \vec{T}(x)\rangle \leq 2|\langle dy, \vec{T}(0) - \vec{T}(x)\rangle| \leq 2|\vec{T}(0) - \vec{T}(x)|,$$

donc la mesure des y tels que $T^\lambda(y)$ ait des multiplicités négatives est majorée par $\lambda^{-k}\int_{B(R)} |\vec{T}(0) - \vec{T}(x)|\,dx$, qui tend vers 0 par continuité approximative.
On dira qu'un point y est *typique* si $T^\lambda(y) \geq 0$ et $\|T^\lambda(y) - (T^\lambda)_{B(R)}\|_{C_c^{\mathbf{1}}(B(R))^*}$ est petite. L'ensemble des points typiques est asymptotiquement plein.

Il s'agit de montrer que $T^\lambda(y)$ est bien approchée (en moyenne) par un multiple entier de la masse de Dirac en 0, δ_0. I.e. l'existence d'un entier θ tel que

$$\lim_{\lambda\to 0}\int_{B(R)} \|T^\lambda(y)-\theta\delta_0\|_{C_c^1(B(R))^*}\,dy = 0.$$

Il s'agit de montrer que $T^\lambda(y)$ est bien approchée (en moyenne) par un multiple entier de la masse de Dirac en 0, δ_0. I.e. l'existence d'un entier θ tel que

$$\lim_{\lambda\to 0}\int_{B(R)} \|T^\lambda(y) - \theta\delta_0\|_{C_c^1(B(R))^*}\, dy = 0.$$

À chaque échelle λ, on prend un y typique et on note T_*^λ la mesure qui lui correspond. On constate que la mesure $T_*^{\lambda/2}$ est voisine (pour la norme de $C_c^1(B(R))^*$) de T_*^λ dilatée deux fois.

Il s'agit de montrer que $T^\lambda(y)$ est bien approchée (en moyenne) par un multiple entier de la masse de Dirac en 0, δ_0. I.e. l'existence d'un entier θ tel que

$$\lim_{\lambda\to 0}\int_{B(R)} \|T^\lambda(y)-\theta\delta_0\|_{C_c^{\mathbf{1}}(B(R))^*}\,dy=0.$$

À chaque échelle λ, on prend un y typique et on note T_*^λ la mesure qui lui correspond. On constate que la mesure $T_*^{\lambda/2}$ est voisine (pour la norme de $C_c^1(B(R))^*$) de T_*^λ dilatée deux fois.

On montre que, pour λ assez petit, la masse totale de la mesure positive $T_*^{2^{-j}}$ satisfait

$$T_*^{2^{-j-\mathbf{1}}}(B(R))\leq T_*^{2^{-j}}(B(R))+o(1).$$

En effet, si $\phi\in C_c^1(B(2R))$ et $\phi=1$ sur $B(R)$, alors

$$T_*^{2^{-j-\mathbf{1}}}(B(R))\leq T_*^{2^{-j-\mathbf{1}}}(\phi(z))\leq T_*^{2^{-j}}(\phi(2z))+o(1)\leq T_*^{2^{-j}}(B(R))+o(1).$$

Il s'agit de montrer que $T^\lambda(y)$ est bien approchée (en moyenne) par un multiple entier de la masse de Dirac en 0, δ_0. I.e. l'existence d'un entier θ tel que

$$\lim_{\lambda\to 0}\int_{B(R)} \|T^\lambda(y)-\theta\delta_0\|_{C_c^1(B(R))^*}\,dy = 0.$$

À chaque échelle λ, on prend un y typique et on note T_*^λ la mesure qui lui correspond. On constate que la mesure $T_*^{\lambda/2}$ est voisine (pour la norme de $C_c^1(B(R))^*$) de T_*^λ dilatée deux fois.

On montre que, pour λ assez petit, la masse totale de la mesure positive $T_*^{2^{-j}}$ satisfait

$$T_*^{2^{-j-1}}(B(R)) \le T_*^{2^{-j}}(B(R)) + o(1).$$

En effet, si $\phi\in C_c^1(B(2R))$ et $\phi=1$ sur $B(R)$, alors

$$T_*^{2^{-j-1}}(B(R)) \le T_*^{2^{-j-1}}(\phi(z)) \le T_*^{2^{-j}}(\phi(2z)) + o(1) \le T_*^{2^{-j}}(B(R)) + o(1).$$

Comme ces nombres sont des entiers positifs, cela entraîne que

$$T_*^{2^{-j}}(B(R)) \le T_*^{2^{-j+1}}(B(R))$$

pour j assez grand. La suite des masses converge donc vers un entier θ.

Le même travail avec une autre valeur de R montre que θ ne dépend pas de R pour R assez petit. Par conséquent, toute limite de suite extraite de $T_*^{2^{-j}}$ est à support dans $\{0\}$, c'est $\theta\delta_0$.

Le même travail avec une autre valeur de R montre que θ ne dépend pas de R pour R assez petit. Par conséquent, toute limite de suite extraite de $T_*^{2^{-j}}$ est à support dans $\{0\}$, c'est $\theta\delta_0$.

$\theta \neq 0$ car sinon, cela contredirait le choix de projection qui garantit que $\langle dy, \vec{T}(0)\rangle > 0$.

Le même travail avec une autre valeur de R montre que θ ne dépend pas de R pour R assez petit. Par conséquent, toute limite de suite extraite de $T_*^{2^{-j}}$ est à support dans $\{0\}$, c'est $\theta\delta_0$.

$\theta \neq 0$ car sinon, cela contredirait le choix de projection qui garantit que $\langle dy, \vec{T}(0)\rangle > 0$.

Par compacité flat de l'espace des courants normaux de masse bornée, cela démontre la convergence de la famille T_*^{λ} vers $\theta\delta_0$.

Le même travail avec une autre valeur de R montre que θ ne dépend pas de R pour R assez petit. Par conséquent, toute limite de suite extraite de $T_*^{2^{-j}}$ est à support dans $\{0\}$, c'est $\theta\delta_0$.

$\theta \neq 0$ car sinon, cela contredirait le choix de projection qui garantit que $\langle dy, \vec{T}(0)\rangle > 0$.

Par compacité flat de l'espace des courants normaux de masse bornée, cela démontre la convergence de la famille T_*^λ vers $\theta\delta_0$.

Cela suffit à montrer que les courants T_λ sur $\mathbb{R}^n$ convergent vers le courant T_0 de densité vectorielle $\theta\vec{T}(0)$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur le sous-espace affine $\mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n$. Il reste à montrer que $\vec{T}(0)$ est le k-vecteur ξ_0 simple unitaire tangent à ce sous-espace. Or ξ_0 est le seul k-vecteur qui rende T_0 fermé.