Continuïté du profil isopérimétrique

Pierre Pansu, Univ. Paris-Sud. Avec S. Nardulli, Rio de Janeiro

6 novembre 2017

Définition

M variété riemannienne. Le profil isopérimétrique de M est défini sur $]0, vol(M)[$ par

$$I(v) = \inf\{vol(\partial\Omega)\,;\ \Omega \textit{ compact à bord lisse, } vol(\Omega) = v\}.$$

Question

I est-elle continue sur $]0, vol(M)[$?

Définition

M variété riemannienne. Le profil isopérimétrique de M est défini sur $]0, vol(M)[$ par

$$I(v) = \inf\{vol(\partial\Omega)\,;\ \Omega \textit{ compact à bord lisse, } vol(\Omega) = v\}.$$

Question

I est-elle continue sur $]0, vol(M)[$?

Résultats positifs connus

- M est compacte (Bavard-Pansu 1986, Gallot 1988).
- $vol(M) < \infty$ (Nardulli-Russo 2015).
- M est homogène (Hsiang 1992).
- M est à géométrie bornée (Flores-Nardulli 2016).
- M possède une fonction d'exhaustion strictement convexe (Ritoré 2015).

Remarque

Le profil est toujours semi-continu supérieurement.

On peut toujours, par réunion disjointe avec ou soustraction d'une famille de boules concentriques, augmenter ou diminuer le volume en contrôlant l'augmentation de l'aire.

Remarque

Le profil est toujours semi-continu supérieurement.

On peut toujours, par réunion disjointe avec ou soustraction d'une famille de boules concentriques, augmenter ou diminuer le volume en contrôlant l'augmentation de l'aire.

Remarque

Si les quasi-minimiseurs pour $v < v_0$ voisin de v_0 intersectent tous substantiellement une partie de M à géométrie bornée, I est semi-continue inférieurement.

Chaque quasi-minimiseur intersecte substantiellement une boule de même volume. On le modifie dans cette boule pour ramener son volume à v_0 sans augmenter trop l'aire.

Remarque

Le profil est toujours semi-continu supérieurement.

On peut toujours, par réunion disjointe avec ou soustraction d'une famille de boules concentriques, augmenter ou diminuer le volume en contrôlant l'augmentation de l'aire.

Remarque

Si les quasi-minimiseurs pour $v < v_0$ voisin de v_0 intersectent tous substantiellement une partie de M à géométrie bornée, I est semi-continue inférieurement.

Chaque quasi-minimiseur intersecte substantiellement une boule de même volume. On le modifie dans cette boule pour ramener son volume à v_0 sans augmenter trop l'aire.

Remarque

La semi-continuité inférieure à gauche est facile.

S'il existe une boule peu intersectée par tous les quasi-minimiseurs, on obtient par réunion disjointe $I(v) \geq I(v_0) - f(v - v_0)$ pour $v < v_0$ proche de v_0.

Théorème (Nardulli-Pansu)

On construit un exemple de variété riemannienne connexe complète de dimension 3 dont le profil isopérimétrique I est discontinu.

Théorème (Nardulli-Pansu)

On construit un exemple de variété riemannienne connexe complète de dimension 3 dont le profil isopérimétrique I est discontinu.

Dans l'exemple construit,

$$\liminf_{v\to 1,\, v>1} I < I(1).$$

$I(1)$ n'est pas atteint et la courbure de Ricci n'est pas bornée inférieurement.
Les domaines Ω_j tels que $vol(\Omega_j) > 1$, $vol(\Omega_j) \to 1$ et $vol(\partial\Omega_j) \to I(1) - \epsilon$ partent à l'infini.

Théorème (Nardulli-Pansu)

On construit un exemple de variété riemannienne connexe complète de dimension 3 dont le profil isopérimétrique I est discontinu.

Dans l'exemple construit,

$$\liminf_{v\to 1,\, v>1} I < I(1).$$

$I(1)$ n'est pas atteint et la courbure de Ricci n'est pas bornée inférieurement.
Les domaines Ω_j tels que $vol(\Omega_j) > 1$, $vol(\Omega_j) \to 1$ et $vol(\partial\Omega_j) \to I(1) - \epsilon$ partent à l'infini.

Principe de la construction. Soit $N = \coprod M_n$ où $vol(M_n) = 1 + \tau_n$, $\tau_n \to 0$, et $I_{M_n}(1) = I_{M_n}(\tau_n) = 1$. Alors $I_N(1+\tau_n) = 0$. Il est vraisemblable que $I_N(1) \geq 1$. En connectant les M_n par des tubes très fins, on rend N connexe sans modifier sensiblement le profil.
En réalité, on suppose que $I_{M_n}(v) \geq c\, v^{\alpha}$, $\alpha < 1$. Par concavité, on montre que $I_N(1) > 0$, ce qui suffit.

M_n est une nilvariété $N_{t,\epsilon} = (\Gamma_t \setminus \mathbb{H}, g_\epsilon)$ où $\mathbb{H}$ est le groupe d'Heisenberg,

$$\mathbb{H} = \{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \; ; x,\, y,\, z \in \mathbb{R} \}, \quad \Gamma_t = \{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \; ; \frac{x}{t},\, \frac{y}{t},\, \frac{z}{t^2} \in \mathbb{Z} \},$$

$g_\epsilon = dx^2 + dy^2 + \frac{1}{\epsilon^2}(dz - ydx)^2$, pour $\epsilon = \tau_n^3$, $t = \tau_n^{3/4}(1+\tau_n)^{3/4}$, $\tau_n = \frac{1}{n}$.
Noter que diamètre$(M_n) \to 0$.

M_n est une nilvariété $N_{t,\epsilon} = (\Gamma_t \setminus \mathbb{H}, g_\epsilon)$ où $\mathbb{H}$ est le groupe d'Heisenberg,

$$\mathbb{H} = \{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; x, y, z \in \mathbb{R} \}, \quad \Gamma_t = \{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{z}{t^2} \in \mathbb{Z} \},$$

$g_\epsilon = dx^2 + dy^2 + \frac{1}{\epsilon^2}(dz - ydx)^2$, pour $\epsilon = \tau_n^3$, $t = \tau_n^{3/4}(1+\tau_n)^{3/4}$, $\tau_n = \frac{1}{n}$.
Noter que diamètre$(M_n) \to 0$.

Théorème (Pansu 1982)

Pour le revêtement universel $\mathbb{H}$, il existe c tel que

$$I_{(\mathbb{H}, g_\epsilon)}(v) \geq c\epsilon^{-1/4}\, v^{3/4}.$$

Relevées dans $\mathbb{H} = \widetilde{M_n}$, les métriques g_ϵ sont 2 à 2 homothétiques. Comme $\frac{3}{4} \neq \frac{2}{3}$, en jouant sur ϵ, on peut ajuster l'isopérimétrie du revêtement universel : $I_{(\widetilde{M_n}, g_\epsilon)}(\tau_n) = 1$. Quotienter par Γ_t permet d'ajuster le volume à $1 + \tau_n$. Reste à montrer que le passage au quotient ne détruit pas l'isopérimétrie.

Dans le cas des tores plats $\mathbb{Z}^3 \setminus \mathbb{R}^3$, on sait que le profil commence comme le profil euclidien (Hauswirth-Perez-Romon-Ros 2004). Ici, on n'obtient qu'une version approchée.

Lemme

$\forall \lambda < 1$, $\exists c$ *tel que* $\forall M = N_{t,\epsilon}$, *si* $v < c\, vol(M)$, $I_M(v) \geq \lambda I_{\tilde{M}}(v)$.

Dans le cas des tores plats $\mathbb{Z}^3 \setminus \mathbb{R}^3$, on sait que le profil commence comme le profil euclidien (Hauswirth-Perez-Romon-Ros 2004). Ici, on n'obtient qu'une version approchée.

Lemme

$\forall \lambda < 1$, $\exists c$ tel que $\forall M = N_{t,\epsilon}$, si $v < c\, vol(M)$, $I_M(v) \geq \lambda I_{\tilde{M}}(v)$.

Pour avoir l'uniformité en ϵ, on se ramène à l'énoncé analogue pour la *métrique de Carnot-Carathéodory*

$$(M, d_{cc}) = Hausdorff - Gromov - \lim_{\epsilon \to 0} (M, g_\epsilon).$$

Elle induit un élément de volume V_{cc} et une aire P_{cc} sur les surfaces,

$$V_{g_\epsilon} = \frac{1}{\epsilon} V_{cc}, \quad P_{g_\epsilon} \geq \frac{1}{\epsilon} P_{cc}.$$

Comme les (N_t, d_{cc}) sont homothétiques, le lemme se ramène à l'étude d'une seule nilvariété sous-riemannienne, d'où l'uniformité en t.

Bérard-Meyer 1982 : pour toute variété riemannienne M, $I_M \sim I_{\mathbb{R}^n}$ au voisinage de 0.

Bérard-Meyer 1982 : pour toute variété riemannienne M, $I_M \sim I_{\mathbb{R}^n}$ au voisinage de 0.

Démonstration dans le cas du tore plat $T = \mathbb{Z}^3 \setminus \mathbb{R}^3$. Couper par une famille de plans parallèles à distance 1. Coaire $\implies$ l'aire des découpes est linéaire en le volume. En 3 découpes, les morceaux, contenus dans des cubes, se relèvent, d'où

$$I_T(v) \geq I_{\mathbb{R}^3}(v) - Cv \sim I_{\mathbb{R}^3}(v).$$

Bérard-Meyer 1982 : pour toute variété riemannienne M, $I_M \sim I_{\mathbb{R}^n}$ au voisinage de 0.

Démonstration dans le cas du tore plat $T = \mathbb{Z}^3 \setminus \mathbb{R}^3$. Couper par une famille de plans parallèles à distance 1. Coaire $\implies$ l'aire des découpes est linéaire en le volume. En 3 découpes, les morceaux, contenus dans des cubes, se relèvent, d'où

$$I_T(v) \geq I_{\mathbb{R}^3}(v) - Cv \sim I_{\mathbb{R}^3}(v).$$

Dans la nilvariété. La méthode s'applique aux plans verticaux. Les morceaux sont des piliers, qu'on coupe ensuite selon des plans horizontaux.

Pour avoir $I(v) \geq c\, v^{3/4}$ pour tout $v \leq \frac{1}{2} V_{cc}(M)$, on démontre la semi-continuïté du profil Carnot-Carathéodory : compacité d'ensembles de périmètre fini et semi-continuité du périmètre (Garofalo-Nhieu 1996).

Question

Existe-t-il un exemple en dimension 2 ?