Qu'est ce que la géométrie conforme métrique ?

Pierre Pansu

25 septembre 2014

Théorème (Lemme de Schwarz)

Soit $D \subset \mathbb{C}$ le disque unité. Soit $f : D \to D$ une fonction holomorphe telle que $f(0) = 0$. Alors $|f'(0)| \leq 1$.

Théorème (Lemme de Schwarz)

Soit $D \subset \mathbb{C}$ le disque unité. Soit $f : D \to D$ une fonction holomorphe telle que $f(0) = 0$. Alors $|f'(0)| \leq 1$.

Corollaire (Lemme de Schwarz-Pick)

Soit $f : D \to D$ une fonction holomorphe. Alors f est 1-lipschitzienne pour la métrique hyperbolique.

Théorème (Lemme de Schwarz)

Soit $D \subset \mathbb{C}$ le disque unité. Soit $f : D \to D$ une fonction holomorphe telle que $f(0) = 0$. Alors $|f'(0)| \leq 1$.

Corollaire (Lemme de Schwarz-Pick)

Soit $f : D \to D$ une fonction holomorphe. Alors f est 1-lipschitzienne pour la métrique hyperbolique.

Corollaire (Liouville)

Soit $f : \mathbb{C} \to D$ une fonction holomorphe. Alors f est constante.

Théorème (Lemme de Schwarz)

Soit $D \subset \mathbb{C}$ le disque unité. Soit $f : D \to D$ une fonction holomorphe telle que $f(0) = 0$. Alors $|f'(0)| \leq 1$.

Corollaire (Lemme de Schwarz-Pick)

Soit $f : D \to D$ une fonction holomorphe. Alors f est 1-lipschitzienne pour la métrique hyperbolique.

Corollaire (Liouville)

Soit $f : \mathbb{C} \to D$ une fonction holomorphe. Alors f est constante.

Corollaire (Picard)

Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{a, b\}$ une fonction holomorphe. Alors f est constante.

En dimensions supérieures,

Définition

Un difféomorphisme entre variétés riemanniennes est quasi-conforme si sa différentielle envoie sphères (infinitésimales) sur sphères.

En dimensions supérieures,

Définition

Un difféomorphisme entre variétés riemanniennes est quasi-conforme si sa différentielle envoie sphères (infinitésimales) sur sphères.

Exemples

1. L'espace euclidien est conforme à la sphère privée d'un point.
2. L'espace hyperbolique est conforme à une boule de l'espace euclidien.
3. Une boule de l'espace euclidien n'est pas conforme à l'espace euclidien.

En dimensions supérieures,

Définition

Un difféomorphisme entre variétés riemanniennes est quasi-conforme si sa différentielle envoie sphères (infinitésimales) sur sphères.

Exemples

1. L'espace euclidien est conforme à la sphère privée d'un point.
2. L'espace hyperbolique est conforme à une boule de l'espace euclidien.
3. Une boule de l'espace euclidien n'est pas conforme à l'espace euclidien.

Décevant : rareté des difféomorphismes conformes.
En dimension $n \geq 3$ tout difféomorphisme conforme entre ouverts de $\mathbb{R}^n$ est la restriction d'un difféomorphisme conforme global de la sphère S^n, i.e. un élément du groupe de Möbius $O(n+1,1)$.

Définition

Un difféomorphisme entre variétés riemanniennes est quasi-conforme si sa différentielle envoie sphères (infinitésimales) sur ellipsoïdes d'excentricité bornée.

Exemple

$z \mapsto z|z|^{K-1}$ *est quasi-conforme* $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Définition

Un difféomorphisme entre variétés riemanniennes est quasi-conforme si sa différentielle envoie sphères (infinitésimales) sur ellipsoïdes d'excentricité bornée.

Exemple

$z \mapsto z|z|^{K-1}$ *est quasi-conforme* $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Théorème (H. Grötsch 1928)

Une boule de l'espace euclidien n'est pas quasi-conforme à l'espace euclidien.

Définition

Un difféomorphisme entre variétés riemanniennes est quasi-conforme si sa différentielle envoie sphères (infinitésimales) sur ellipsoïdes d'excentricité bornée.

Exemple

$z \mapsto z|z|^{K-1}$ *est quasi-conforme* $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Théorème (H. Grötsch 1928)

Une boule de l'espace euclidien n'est pas quasi-conforme à l'espace euclidien.

Preuve : quasi-Lemme de Schwartz. Un difféomorphisme quasi-conforme f de la boule satisfait

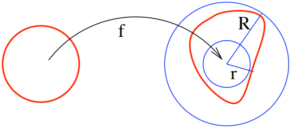
$$\frac{1}{L}d(x,x') - C \leq d(f(x),f(x')) \leq Ld(x,x') + C$$

pour la distance hyperbolique. C'est une *quasi-isométrie*, i.e. lipschitzienne à grande échelle.

Quasi-symétrique : homéomorphisme entre espaces métriques tel que

$$\forall x,\ \forall x',\ \forall x'',\quad \frac{d(f(x),f(x'))}{d(f(x),f(x''))} \leq \eta\left(\frac{d(x,x')}{d(x,x'')}\right),$$

où $\eta \in Homeo(\mathbb{R}_+)$.

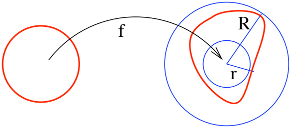


distorsion(f)=sup{R/r}

Quasi-symétrique : homéomorphisme entre espaces métriques tel que

$$\forall x,\ \forall x',\ \forall x'',\quad \frac{d(f(x),f(x'))}{d(f(x),f(x''))} \leq \eta\left(\frac{d(x,x')}{d(x,x'')}\right),$$

où $\eta \in Homeo(\mathbb{R}_+)$.



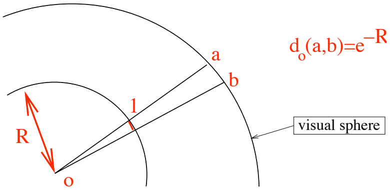
distorsion(f)=sup{R/r}

Exemples.
L'espace euclidien est quasi-symétrique à la sphère privée d'un point.
L'espace hyperbolique n'est pas quasi-symétrique à l'espace euclidien.

Théorème (H. Grötsch 1928)

Un homéomorphisme quasi-conforme de l'espace euclidien est quasi-symétrique.

Un groupe *hyperbolique* a un bord à l'infini ∂G, espace compact muni d'une famille de *distances visuelles*.

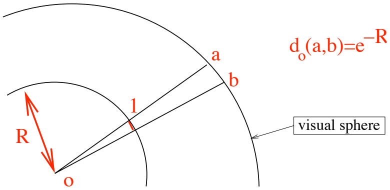


$$\text{quasi-isométries de } G \quad \Leftrightarrow \quad \text{homéomorphismes quasi-symétriques de } \partial G$$

De plus, les distances visuelles sont Ahlfors-régulières.

Espace métrique p-Ahlfors-régulier : s'il existe une mesure de probabilité μ telle que $\mu(B(x,R)) \simeq R^p$ pour $R < R_0$.

Un groupe *hyperbolique* a un bord à l'infini ∂G, espace compact muni d'une famille de *distances visuelles*.



$$\text{quasi-isométries de } G \quad \Leftrightarrow \quad \text{homéomorphismes quasi-symétriques de } \partial G$$

De plus, les distances visuelles sont Ahlfors-régulières.

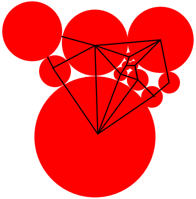
Espace métrique p-Ahlfors-régulier : s'il existe une mesure de probabilité μ telle que $\mu(B(x,R)) \simeq R^p$ pour $R < R_0$.

D'où la notion de *jauge quasi-symétrique* : classe d'équivalence des distances Ahlfors-régulières sur ∂G quasi-symétriques à une distance visuelle.

Cette "structure conforme microscopique" détermine la géométrie à grande échelle de G.

Empilement de boules : collections de boules d'intérieurs disjoints.

Graphe d'incidence : un sommet par boule, une arête lorsque 2 boules se touchent.

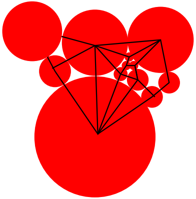


Définition

Un graphe est empilable dans $\mathbb{R}^d$ si c'est le graphe d'incidence d'un empilement de boules de $\mathbb{R}^d$.

Empilement de boules : collections de boules d'intérieurs disjoints.

Graphe d'incidence : un sommet par boule, une arête lorsque 2 boules se touchent.



Définition

Un graphe est empilable dans $\mathbb{R}^d$ si c'est le graphe d'incidence d'un empilement de boules de $\mathbb{R}^d$.

Théorème (Koebe 1931)

Un graphe est empilable dans $\mathbb{R}^2$ si et seulement si il est planaire (i.e. plongeable dans $\mathbb{R}^2$).

Interprétation : version mésoscopique du théorème de représentation conforme.

D'ailleurs,

- Il y a des algorithmes rapides de calcul de l'empilement de Koebe.
- Lorsqu'on applique le théorème au graphe d'incidence de l'empilement de disques de même rayon contenu dans un domaine plan, ça converge vers la représentation conforme de ce domaine quand le rayon tend vers 0.
- C'est un bon procédé algorithmique pour calculer une approximation de la représentation conforme.

D'ailleurs,

- Il y a des algorithmes rapides de calcul de l'empilement de Koebe.
- Lorsqu'on applique le théorème au graphe d'incidence de l'empilement de disques de même rayon contenu dans un domaine plan, ça converge vers la représentation conforme de ce domaine quand le rayon tend vers 0.
- C'est un bon procédé algorithmique pour calculer une approximation de la représentation conforme.

Théorème (Benjamini-Schramm 2013)

La grille de $\mathbb{R}^n$ n'est pas empilable dans $\mathbb{R}^d$ si $n > d$. Le graphe de Cayley d'un réseau cocompact de l'espace hyperbolique de dimension $n > d$ n'est pas empilable dans $\mathbb{R}^d$.

Dans la suite, on s'inspire de ce théorème (et sa preuve) pour introduire une notion de plongement conforme à grande échelle.

(N, ℓ, R, S)-*empilement* : dans un espace métrique, c'est une collection de boules B_j de rayons $R \leq r_j \leq S$ telle que les ℓB_j forment un recouvrement de multiplicité $< N$.

Définition

Une application f entre espaces métriques (doublée d'une correspondance $B \mapsto B'$ entre boules telle que $f(B) \subset B'$) est conforme à grande échelle si, pour tous $R \leq S$, $N \geq 1$ et $\ell' > 1$, il existe $N' \geq 1$ et $\ell \geq 1$ tels que f envoie (N, ℓ, R, S)-empilements sur $(N', \ell', 0, \infty)$-empilements.

(N, ℓ, R, S)-*empilement* : dans un espace métrique, c'est une collection de boules B_j de rayons $R \leq r_j \leq S$ telle que les ℓB_j forment un recouvrement de multiplicité $< N$.

Définition

Une application f entre espaces métriques (doublée d'une correspondance $B \mapsto B'$ entre boules telle que $f(B) \subset B'$) est conforme à grande échelle si, pour tous $R \leq S$, $N \geq 1$ et $\ell' > 1$, il existe $N' \geq 1$ et $\ell \geq 1$ tels que f envoie (N, ℓ, R, S)-empilements sur $(N', \ell', 0, \infty)$-empilements.

Exemples

Classe stable par précomposition avec les plongements uniformes et postcomposition avec les homéomorphismes quasi-symétriques.
Le modèle de Poincaré de l'espace hyperbolique est (presque) un plongement conforme à grande échelle de H^d dans R^d.

On peut parler de plongement conforme à grande échelle entre groupes discrets de type fini ou de groupes de Lie.

Un groupe *nilpotent* de type fini est à croissance polynômiale de degré entier $d(G)$.

Exemple : $d(\mathbb{R}^n) = n$. Pour le groupe d'Heisenberg, c'est la dimension plus 1. Il y a des groupes nilpotents de dimension n avec $d(G) \sim n^2/2$.

Un groupe *nilpotent* de type fini est à croissance polynômiale de degré entier $d(G)$.

Exemple : $d(\mathbb{R}^n) = n$. Pour le groupe d'Heisenberg, c'est la dimension plus 1. Il y a des groupes nilpotents de dimension n avec $d(G) \sim n^2/2$.

Tous ces groupes ont un plongement conforme à grande échelle dans un $\mathbb{R}^N$ (Assouad).

Un groupe *nilpotent* de type fini est à croissance polynômiale de degré entier $d(G)$.

Exemple : $d(\mathbb{R}^n) = n$. Pour le groupe d'Heisenberg, c'est la dimension plus 1. Il y a des groupes nilpotents de dimension n avec $d(G) \sim n^2/2$.

Tous ces groupes ont un plongement conforme à grande échelle dans un $\mathbb{R}^N$ (Assouad).

Pour un groupe *hyperbolique* G, on définit

1. la *dimension conforme* comme la borne inférieure des dimensions de Hausdorff des métriques dans la jauge quasi-symétrique du bord ∂G.
2. la *dimension cohomologique* comme la borne inférieure des p tels que $L^p H^1(G) \neq 0$.

Exemples : $\mathrm{CohDim} \leq \mathrm{ConfDim}$, l'inégalité est parfois stricte (Bourdon-Pajot), mais il y a égalité pour les groupes de Lie hyperboliques. $\mathrm{ConfDim}(O(n,1)) = n-1$, $\mathrm{ConfDim}(U(m,1)) = 2m$.

Un groupe *nilpotent* de type fini est à croissance polynômiale de degré entier $d(G)$.

Exemple : $d(\mathbb{R}^n) = n$. Pour le groupe d'Heisenberg, c'est la dimension plus 1. Il y a des groupes nilpotents de dimension n avec $d(G) \sim n^2/2$.

Tous ces groupes ont un plongement conforme à grande échelle dans un $\mathbb{R}^N$ (Assouad).

Pour un groupe *hyperbolique* G, on définit

1. la *dimension conforme* comme la borne inférieure des dimensions de Hausdorff des métriques dans la jauge quasi-symétrique du bord ∂G.
2. la *dimension cohomologique* comme la borne inférieure des p tels que $L^p H^1(G) \neq 0$.

Exemples : $\mathrm{CohDim} \leq \mathrm{ConfDim}$, l'inégalité est parfois stricte (Bourdon-Pajot), mais il y a égalité pour les groupes de Lie hyperboliques. $\mathrm{ConfDim}(O(n,1)) = n-1$, $\mathrm{ConfDim}(U(m,1)) = 2m$.

$O(n,1)$ a un plongement (presque) conforme à grande échelle dans $\mathbb{R}^n$, qui a un plongement conforme à grande échelle dans $O(n+1,1)$.

Tout groupe hyperbolique a un plongement conforme à grande échelle dans un $O(N,1)$ (Bonk-Schramm).

Théorème

Soient G, G' des groupes de Lie ou de type fini. On suppose qu'il existe une application continue conforme à grande échelle de G dans G'.

1. *Si G et G' sont nilpotents, $d(G) \leq d(G')$.*
2. *Si G et G' sont hyperboliques, $\mathrm{CohDim}(G) \leq \mathrm{ConfDim}(G') + 1$, inégalité stricte si $\mathrm{ConfDim}(G')$ est atteinte mais $\mathrm{CohDim}(G)$ ne l'est pas.*
3. *Si G est nilpotent et G' est hyperbolique, $d(G) \leq \mathrm{ConfDim}(G') + 1$.*
4. *Si G est hyperbolique et G' est nilpotent, $\mathrm{CohDim}(G) \leq d(G')$, inégalité stricte si $\mathrm{CohDim}(G)$ n'est pas atteinte.*

Par exemple, pas de plongement conforme à grande échelle

- du groupe d'Heisenberg $\mathbb{H}^{2m-1}$ dans $\mathbb{R}^n$ pour $n < 2m$.
- de $U(m,1)$ dans $O(n,1)$ pour $n \leq 2m$.
- du groupe d'Heisenberg $\mathbb{H}^{2m-1}$ dans $O(n,1)$ pour $n < 2m$.
- de $U(m,1)$ dans $\mathbb{R}^n$ pour $n \leq 2m$.

Bornes probablement non optimales.

p-énergie : si u est une application vers un espace métrique, $E_{p,N,\ell,R,S}(u)$ est le sup des sommes $\sum_j \mathrm{diam}(u(B_j))^p$ sur les (N,ℓ,R,S)-empilements. Exemple : sur un espace métrique d-Ahlfors-régulier, les applications lipschitziennes ont une d-énergie finie.

p-énergie : si u est une application vers un espace métrique, $E_{p,N,\ell,R,S}(u)$ est le sup des sommes $\sum_j \mathrm{diam}(u(B_j))^p$ sur les (N,ℓ,R,S)-empilements. Exemple : sur un espace métrique d-Ahlfors-régulier, les applications lipschitziennes ont une d-énergie finie.

p-module d'une famille de courbes Γ : c'est l'inf des p-énergies des applications u vers des espaces métriques telles que $\mathrm{long}(u\circ\gamma)\geq 1$ pour toute courbe $\gamma\in\Gamma$.

p-énergie : si u est une application vers un espace métrique, $E_{p,N,\ell,R,S}(u)$ est le sup des sommes $\sum_j \mathrm{diam}(u(B_j))^p$ sur les (N, ℓ, R, S)-empilements. Exemple : sur un espace métrique d-Ahlfors-régulier, les applications lipschitziennes ont une d-énergie finie.

p-module d'une famille de courbes Γ : c'est l'inf des p-énergies des applications u vers des espaces métriques telles que $\mathrm{long}(u \circ \gamma) \geq 1$ pour toute courbe $\gamma \in \Gamma$.

p-parabolicité : c'est lorsque le p-module de la famille des courbes non bornées issues d'un compact vaut 0.

p-énergie : si u est une application vers un espace métrique, $E_{p,N,\ell,R,S}(u)$ est le sup des sommes $\sum_j \mathrm{diam}(u(B_j))^p$ sur les (N,ℓ,R,S)-empilements. Exemple : sur un espace métrique d-Ahlfors-régulier, les applications lipschitziennes ont une d-énergie finie.

p-module d'une famille de courbes Γ : c'est l'inf des p-énergies des applications u vers des espaces métriques telles que $\mathrm{long}(u\circ\gamma)\geq 1$ pour toute courbe $\gamma\in\Gamma$.

p-parabolicité : c'est lorsque le p-module de la famille des courbes non bornées issues d'un compact vaut 0.

Norme L^p d'une cochaîne : c'est le sup des sommes $(\sum_j \sup|\kappa_{|B_j}|^p)^{1/p}$ sur les (N,ℓ,R,S)-empilements (on fixe N,ℓ,R,S).

p-énergie : si u est une application vers un espace métrique, $E_{p,N,\ell,R,S}(u)$ est le sup des sommes $\sum_j \mathrm{diam}(u(B_j))^p$ sur les (N,ℓ,R,S)-empilements. Exemple : sur un espace métrique d-Ahlfors-régulier, les applications lipschitziennes ont une d-énergie finie.

p-module d'une famille de courbes Γ : c'est l'inf des p-énergies des applications u vers des espaces métriques telles que $\mathrm{long}(u\circ\gamma)\geq 1$ pour toute courbe $\gamma\in\Gamma$.

p-parabolicité : c'est lorsque le p-module de la famille des courbes non bornées issues d'un compact vaut 0.

Norme L^p d'une cochaîne : c'est le sup des sommes $(\sum_j \sup|\kappa_{|B_j}|^p)^{1/p}$ sur les (N,ℓ,R,S)-empilements (on fixe N,ℓ,R,S).

Définition

La cohomologie L^p d'un espace métrique, c'est $L^pH^k=\{k\text{-cocycles } L^p\}/d\{(k-1)\text{-cochaînes } L^p\}$. *La cohomologie L^p réduite, c'est* $L^p\bar{H}^k=\{k\text{-cocycles } L^p\}/\overline{d\{(k-1)\text{-cochaînes } L^p\}}$.

Théorème

Soit Y un espace métrique compact, d-Ahlfors-régulier. S'il existe une application continue, conforme à grande échelle, de X dans Y, alors

1. *ou bien X est d-parabolique,*
2. *ou bien $L^d\bar{H}^1(X) \neq 0$.*

Théorème

Soit Y un espace métrique compact, d-Ahlfors-régulier. S'il existe une application continue, conforme à grande échelle, de X dans Y, alors

1. *ou bien X est d-parabolique,*
2. *ou bien $L^d \bar{H}^1(X) \neq 0$.*

Démonstration.

1. Naturalité : la composition avec une application f conforme à grande échelle préserve les fonctions d'énergie finie. En particulier, si Y est d-Ahlfors-régulier, $E_d(f) < \infty$.

Théorème

Soit Y un espace métrique compact, d-Ahlfors-régulier. S'il existe une application continue, conforme à grande échelle, de X dans Y, alors

1. *ou bien X est d-parabolique,*
2. *ou bien $L^d \bar{H}^1(X) \neq 0$.*

Démonstration.

1. Naturalité : la composition avec une application f conforme à grande échelle préserve les fonctions d'énergie finie. En particulier, si Y est d-Ahlfors-régulier, $E_d(f) < \infty$.
2. Si $L^d H^1(X) = 0$, toute application d'énergie finie vers un espace métrique complet possède une limite. Donc f possède une limite y.

Théorème

Soit Y un espace métrique compact, d-Ahlfors-régulier. S'il existe une application continue, conforme à grande échelle, de X dans Y, alors

1. *ou bien X est d-parabolique,*
2. *ou bien $L^d\bar{H}^1(X) \neq 0$.*

Démonstration.

1. Naturalité : la composition avec une application f conforme à grande échelle préserve les fonctions d'énergie finie. En particulier, si Y est d-Ahlfors-régulier, $E_d(f) < \infty$.
2. Si $L^d H^1(X) = 0$, toute application d'énergie finie vers un espace métrique complet possède une limite. Donc f possède une limite y.
3. Sur $Y \setminus \{y\}$, il existe une fonction v_y d'énergie finie qui tend vers $+\infty$ en y. Alors $v_y \circ f$ est d'énergie finie mais tend vers $+\infty$, contradiction.

Théorème

Soit Y un espace métrique compact, d-Ahlfors-régulier. S'il existe une application continue, conforme à grande échelle, de X dans Y, alors

1. *ou bien X est d-parabolique,*
2. *ou bien $L^d \bar{H}^1(X) \neq 0$.*

Démonstration.

1. Naturalité : la composition avec une application f conforme à grande échelle préserve les fonctions d'énergie finie. En particulier, si Y est d-Ahlfors-régulier, $E_d(f) < \infty$.
2. Si $L^d H^1(X) = 0$, toute application d'énergie finie vers un espace métrique complet possède une limite. Donc f possède une limite y.
3. Sur $Y \setminus \{y\}$, il existe une fonction v_y d'énergie finie qui tend vers $+\infty$ en y. Alors $v_y \circ f$ est d'énergie finie mais tend vers $+\infty$, contradiction.
4. Une application d'énergie finie possède une limite le long de presque toute courbe. En particulier, f possède une limite le long de presque toute courbe.

Théorème

Soit Y un espace métrique compact, d-Ahlfors-régulier. S'il existe une application continue, conforme à grande échelle, de X dans Y, alors

1. *ou bien X est d-parabolique,*
2. *ou bien $L^d\bar{H}^1(X) \neq 0$.*

Démonstration.

1. Naturalité : la composition avec une application f conforme à grande échelle préserve les fonctions d'énergie finie. En particulier, si Y est d-Ahlfors-régulier, $E_d(f) < \infty$.
2. Si $L^d H^1(X) = 0$, toute application d'énergie finie vers un espace métrique complet possède une limite. Donc f possède une limite y.
3. Sur $Y \setminus \{y\}$, il existe une fonction v_y d'énergie finie qui tend vers $+\infty$ en y. Alors $v_y \circ f$ est d'énergie finie mais tend vers $+\infty$, contradiction.
4. Une application d'énergie finie possède une limite le long de presque toute courbe. En particulier, f possède une limite le long de presque toute courbe.
5. Si $L^d\bar{H}^1(X) = 0$, cette limite est p-presque toujours la même, y.

Théorème

Soit Y un espace métrique compact, d-Ahlfors-régulier. S'il existe une application continue, conforme à grande échelle, de X dans Y, alors

1. *ou bien X est d-parabolique,*
2. *ou bien $L^d \bar{H}^1(X) \neq 0$.*

Démonstration.

1. Naturalité : la composition avec une application f conforme à grande échelle préserve les fonctions d'énergie finie. En particulier, si Y est d-Ahlfors-régulier, $E_d(f) < \infty$.
2. Si $L^d H^1(X) = 0$, toute application d'énergie finie vers un espace métrique complet possède une limite. Donc f possède une limite y.
3. Sur $Y \setminus \{y\}$, il existe une fonction v_y d'énergie finie qui tend vers $+\infty$ en y. Alors $v_y \circ f$ est d'énergie finie mais tend vers $+\infty$, contradiction.
4. Une application d'énergie finie possède une limite le long de presque toute courbe. En particulier, f possède une limite le long de presque toute courbe.
5. Si $L^d \bar{H}^1(X) = 0$, cette limite est p-presque toujours la même, y.
6. Alors $v_y \circ f$ est d'énergie finie mais tend vers $+\infty$ le long de presque toute courbe. Donc presque toute courbe = aucune courbe, c'est la p-parabolicité.

Tout groupe nilpotent G possède un plongement quasi-symétrique dans un espace compact $d(G)$-Ahlfors régulier Y. De plus, $L^p\bar{H}^1(G) = 0$ pour tout p, et G est p-parabolique si et seulement si $p \geq d(G)$.

Proposition (Troyanov)

Un groupe de type fini G est p-parabolique si et seulement si la croissance du volume est polynômiale de degré $\leq p$. D'après Gromov, cela entraîne que G est virtuellement nilpotent.

Tout groupe nilpotent G possède un plongement quasi-symétrique dans un espace compact $d(G)$-Ahlfors régulier Y. De plus, $L^p\bar{H}^1(G) = 0$ pour tout p, et G est p-parabolique si et seulement si $p \geq d(G)$.

Proposition (Troyanov)

Un groupe de type fini G est p-parabolique si et seulement si la croissance du volume est polynômiale de degré $\leq p$. D'après Gromov, cela entraîne que G est virtuellement nilpotent.

Démonstration. D'après Coulhon et Saloff-Coste, croissance du volume $> R^p \Rightarrow$ isopérimétrie meilleure que celle de $\mathbb{R}^p \Rightarrow$ (Ahlfors) non p-parabolique.

Si G' est nilpotent, on applique le théorème à $p = d(G')$. Si G est nilpotent, on conclut que G est p-parabolique, donc $p \geq d(G)$. Si G est hyperbolique, on conclut que $L^p\bar{H}^1(G) \neq 0$, donc $p \geq \mathrm{CohDim}(G)$.

Un groupe hyperbolique non élémentaire est non p-parabolique pour tout p.

Lemme (Shchur, généralisation du modèle de Poincaré)

Si G' est un groupe hyperbolique, alors G' se plonge (presque) conformément à grande échelle dans $\mathbb{R} \times \partial G'$. De plus, si $f : X \to G'$ est conforme à grande échelle, la composition donne un plongement (presque) conforme à grande échelle $X \to \mathbb{R} \times \partial G'$.

Si G' est hyperbolique, on applique le théorème à un $p > \mathrm{ConfDim}(G) + 1$ et $Y = \mathbb{R} \times \partial G'$ où $\partial G'$ est muni d'une distance p-Ahlfors-régulière dans la jauge ($p = \mathrm{ConfDim}(G) + 1$ si la dimension conforme est atteinte). Si G est nilpotent, on conclut que G est p-parabolique, donc $p \geq d(G)$. Si G est hyperbolique, on conclut que $L^p\bar{H}^1(G) \neq 0$, donc $p \geq \mathrm{CohDim}(G)$ ($p > \mathrm{CohDim}(G)$ si la dimension cohomologique n'est pas atteinte).

Questions

1. Un arbre a-t-il un plongement conforme à grande échelle dans un disque ?
2. Quels sont les espaces métriques qui possèdent un plongement conforme à grande échelle dans un arbre ?
3. Y a-t-il un analogue à grande échelle du théorème de représentation conforme ?
4. Y a-t-il une théorie des submersions conformes à grande échelle ?