Distances entre complexes de chaînes normés

Pierre Pansu, Université Paris-Saclay

14 octobre 2022

X variété riemannienne. Sur les espaces $\Omega^k(X)$ de formes différentielles C^∞, des normes L^p sont définies. La différentielle extérieure d est un complexe dont la cohomologie coïncide avec la cohomologie de X à coefficients réels.

Exemple. $X =$ intervalle de longueur L. Alors $H^1(X) = 0$. Soit $f = \tanh$ une fonction sigmoïde, i.e. qui vaut presque -1 (resp. 1) sur X sauf sur un intervalle borné au milieu. Le cocycle $g = df$ satisfait

$$\|g\|_p \sim 1, \quad \|f\|_p \sim L^{1/p}.$$

X variété riemannienne. Sur les espaces $\Omega^k(X)$ de formes différentielles C^∞, des normes L^p sont définies. La différentielle extérieure d est un complexe dont la cohomologie coïncide avec la cohomologie de X à coefficients réels.

Exemple. $X =$ intervalle de longueur L. Alors $H^1(X) = 0$. Soit $f = \tanh$ une fonction sigmoïde, i.e. qui vaut presque -1 (resp. 1) sur X sauf sur un intervalle borné au milieu. Le cocycle $g = df$ satisfait

$$\|g\|_p \sim 1, \quad \|f\|_p \sim L^{1/p}.$$

Quand L est grand, résoudre $df = g$ est coûteux. On dit que g représente un élément non trivial en *presque-cohomologie*.

Définition

Le **seuil de presque-cohomologie en degré** k, *noté* $NH_k(X,p,\mathbb{R})$, *est la norme de l'inverse* $\bar{d}^{-1}$ *de* $\bar{d} : \Omega^k(X,)/\mathrm{Ker}(d) \to dC^k(X)$. *(Il dépend de* p*).*

X variété riemannienne. Sur les espaces $\Omega^k(X)$ de formes différentielles C^∞, des normes L^p sont définies. La différentielle extérieure d est un complexe dont la cohomologie coïncide avec la cohomologie de X à coefficients réels.

Exemple. $X =$ intervalle de longueur L. Alors $H^1(X) = 0$. Soit $f = \tanh$ une fonction sigmoïde, i.e. qui vaut presque -1 (resp. 1) sur X sauf sur un intervalle borné au milieu. Le cocycle $g = df$ satisfait

$$\|g\|_p \sim 1, \quad \|f\|_p \sim L^{1/p}.$$

Quand L est grand, résoudre $df = g$ est coûteux. On dit que g représente un élément non trivial en *presque-cohomologie*.

Définition

Le **seuil de presque-cohomologie en degré** *k, noté $NH_k(X, p, \mathbb{R})$, est la norme de l'inverse $\bar{d}^{-1}$ de $\bar{d} : \Omega^k(X,)/\mathrm{Ker}(d) \to dC^k(X)$. (Il dépend de p).*

Exemple. $X =$ intervalle de longueur L. Alors $NH_0(X) \sim L^{1/p}$.

X complexe simplicial, $\mathbf{k} = \mathbb{F}_2$ ou $\mathbb{R}$. Une k-cochaîne est une fonction antisymétrique à valeurs dans $\mathbf{k}$ sur l'ensemble des k-simplexes. Son *cobord* df is $df(\sigma) = f(\partial\sigma)$.

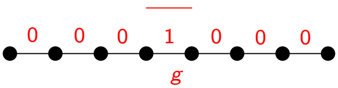
Une valeur absolue sur $\mathbf{k}$ donne des normes ℓ^p sur les cochaînes : on tire les simplexes uniformément au hasard, et on pose $\|f\|_p = \mathbb{E}(|f|^p)^{1/p}$.

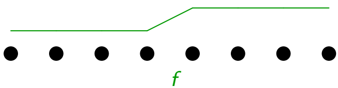
X complexe simplicial, $\mathbf{k} = \mathbb{F}_2$ ou $\mathbb{R}$. Une k-cochaîne est une fonction antisymétrique à valeurs dans $\mathbf{k}$ sur l'ensemble des k-simplexes. Son *cobord* df is $df(\sigma) = f(\partial\sigma)$.

Une valeur absolue sur $\mathbf{k}$ donne des normes ℓ^p sur les cochaînes : on tire les simplexes uniformément au hasard, et on pose $\|f\|_p = \mathbb{E}(|f|^p)^{1/p}$.

Exemple. Le graphe rectiligne de longueur n satisfait $H^1 = 0$. La 1-chaîne g égale à $\bar{1}$ sur l'arête centrale et 0 ailleurs s'écrit df où

$$\|g\|_p = \frac{1}{n^{1/p}}, \quad \|f\|_p \sim 1.$$





X complexe simplicial, $\mathbf{k} = \mathbb{F}_2$ ou $\mathbb{R}$. Une k-cochaîne est une fonction antisymétrique à valeurs dans $\mathbf{k}$ sur l'ensemble des k-simplexes. Son *cobord* df is $df(\sigma) = f(\partial\sigma)$.

Une valeur absolue sur $\mathbf{k}$ donne des normes ℓ^p sur les cochaînes : on tire les simplexes uniformément au hasard, et on pose $\|f\|_p = \mathbb{E}(|f|^p)^{1/p}$.

Exemple. Le graphe rectiligne de longueur n satisfait $H^1 = 0$. La 1-chaîne g égale à $\bar{1}$ sur l'arête centrale et 0 ailleurs s'écrit df où

$$\|g\|_p = \frac{1}{n^{1/p}}, \quad \|f\|_p \sim 1.$$

Quand n est grand, résoudre $df = g$ est coûteux. On dit que g représente un élément non trivial en *presque-cohomologie*.

Définition

Le **seuil de presque-cohomologie en degré** *k, noté $NH_k(X, p, \mathbf{k})$, est la norme de l'inverse $\bar{d}^{-1}$ de $\bar{d}$: $C^k(X, \mathbf{k})/\mathrm{Ker}(d) \to dC^k(X, \mathbf{k})$. (Il dépend de p et de $\mathbf{k}$).*

Fait (Gromov-Shubin)

Comme la cohomologie, la presque-cohomologie est un invariant topologique (et même homotopique) des variétés et des complexes simpliciaux. Pour les variétés et complexes non compacts, à géométrie bornée, c'est un invariant de quasiisométrie

Fait (Gromov-Shubin)

Comme la cohomologie, la presque-cohomologie est un invariant topologique (et même homotopique) des variétés et des complexes simpliciaux. Pour les variétés et complexes non compacts, à géométrie bornée, c'est un invariant de quasiisométrie

À retenir : la cohomologie n'est pas la seule information intéressante qu'on puisse extraire d'un complexe de cochaînes. La presque-cohomologie l'est aussi.

Fait (Gromov-Shubin)

Comme la cohomologie, la presque-cohomologie est un invariant topologique (et même homotopique) des variétés et des complexes simpliciaux. Pour les variétés et complexes non compacts, à géométrie bornée, c'est un invariant de quasiisométrie

À retenir : la cohomologie n'est pas la seule information intéressante qu'on puisse extraire d'un complexe de cochaînes. La presque-cohomologie l'est aussi.

Plan de l'exposé

1. *Relier les divers seuils de presque cohomologie ℓ^p à l'isopérimétrie et à l'expansion.*
2. *Ébaucher une étude géométrique des complexes de chaînes, en lien avec la presque-homologie.*

Définition

La **constante de Cheeger** $h(X)$ *d'une variété riemannienne* X *est le plus grand* h *tel que pour toute sous-variété* A *de* X *tel que* $vol(A)\leq\frac{1}{2}vol(X)$*,*

$$vol(\partial A)\geq h\,vol(A).$$

Définition

La **constante de Cheeger** $h(X)$ *d'une variété riemannienne* X *est le plus grand* h *tel que pour toute sous-variété* A *de* X *tel que* $vol(A) \leq \frac{1}{2} vol(X)$,

$$vol(\partial A) \geq h\, vol(A).$$

Proposition

$$h(X) = NH_0(X, 1, \mathbb{R})^{-1} = (\|d^{-1}\|_{1\to 1})^{-1} \text{ en de Rham.}$$

Définition

La **constante de Cheeger** $h(X)$ *d'une variété riemannienne* X *est le plus grand* h *tel que pour toute sous-variété* A *de* X *tel que* $vol(A) \leq \frac{1}{2} vol(X)$,

$$vol(\partial A) \geq h\, vol(A).$$

Proposition

$$h(X) = NH_0(X, 1, \mathbb{R})^{-1} = (\|d^{-1}\|_{1\to 1})^{-1} \text{ en de Rham.}$$

Pour un graphe, les sous-variétés sont remplacées par des ensembles A de sommets et le bord par l'ensemble des arêtes reliant A à son complémentaire.

Proposition

$$h(X) = NH_0(X, 1, \mathbb{F}_2)^{-1} = (\|d^{-1}\|_{1\to 1})^{-1} \text{ sur } \mathbb{F}_2.$$

▸ Démonstration

Définition

La **constante de Cheeger** $h(X)$ *d'une variété riemannienne* X *est le plus grand* h *tel que pour toute sous-variété* A *de* X *tel que* $vol(A) \leq \frac{1}{2}vol(X)$,

$$vol(\partial A) \geq h\, vol(A).$$

Proposition

$$h(X) = NH_0(X, 1, \mathbb{R})^{-1} = (\|d^{-1}\|_{1\to 1})^{-1} \text{ en de Rham.}$$

Pour un graphe, les sous-variétés sont remplacées par des ensembles A de sommets et le bord par l'ensemble des arêtes reliant A à son complémentaire.

Proposition

$$h(X) = NH_0(X, 1, \mathbb{F}_2)^{-1} = (\|d^{-1}\|_{1\to 1})^{-1} \text{ sur } \mathbb{F}_2.$$

Démonstration

Exemple (de graphe de grande constante de Cheeger)

Pour le graphe complet K_n *à* n *sommets,* $h(K_n) = \frac{n}{n-1}$ *(n pair) ou* $\frac{n+1}{n-1}$ *(n impair).*

Démonstration

Proposition

Soit Δ *l'opérateur auto-adjoint correspondant à la forme quadratique* $f \mapsto \|df\|_2^2 = \langle f, \Delta f\rangle$*. Soient* $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots$ *ses valeurs propres. Si* X *est connexe, alors* $\lambda_1 = 0$ *et*

$$\lambda_2 = NH_0(X, 2, \mathbb{R})^{-2} = (\|d^{-1}\|_{2\to 2})^{-2}.$$

Démonstration

Proposition

Soit Δ l'opérateur auto-adjoint correspondant à la forme quadratique $f \mapsto \|df\|_2^2 = \langle f, \Delta f \rangle$. Soient $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots$ ses valeurs propres. Si X est connexe, alors $\lambda_1 = 0$ et

$$\lambda_2 = NH_0(X, 2, \mathbb{R})^{-2} = (\|d^{-1}\|_{2\to 2})^{-2}.$$

Démonstration

Définition

Désormais, on part d'une distribution de probabilité $\mathbb{P}_1$ sur les arêtes, et on définit la distribution $\mathbb{P}_0$ sur les sommets comme suit : on tire une arête selon $\mathbb{P}_1$ et on tire un de ses sommets au hasard. On l'appelle la **distribution de Garland***.*

Cela donne à chaque sommet un poids proportionnel à son degré.

Proposition

Soit Δ l'opérateur auto-adjoint correspondant à la forme quadratique $f \mapsto \|df\|_2^2 = \langle f, \Delta f\rangle$. Soient $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots$ ses valeurs propres. Si X est connexe, alors $\lambda_1 = 0$ et

$$\lambda_2 = NH_0(X, 2, \mathbb{R})^{-2} = (\|d^{-1}\|_{2\to 2})^{-2}.$$

Démonstration

Définition

Désormais, on part d'une distribution de probabilité $\mathbb{P}_1$ sur les arêtes, et on définit la distribution $\mathbb{P}_0$ sur les sommets comme suit : on tire une arête selon $\mathbb{P}_1$ et on tire un de ses sommets au hasard. On l'appelle la **distribution de Garland**.

Cela donne à chaque sommet un poids proportionnel à son degré.

En utilisant $\mathbb{P}_1$ et $\mathbb{P}_0$, on définit des normes ℓ^p sur les 0- et 1-cochaînes, et donc des seuils de presque-cohomologie $NH_0(\mathbb{P}, 1, \mathbb{F}_2) = (\|d^{-1}\|_{1\to 1})$ sur $\mathbb{F}_2$ et $NH_0(\mathbb{P}, 2, \mathbb{R}) = \lambda_{2,\mathbb{P}}^{-1/2} = (\|d^{-1}\|_{2\to 2})$ sur $\mathbb{R}$.

Théorème (Cheeger, Buser, Dodziuk, Alon-Milman)

Pour un graphe fini connexe muni d'une distribution de Garland $\mathbb{P}$,

$$\frac{1}{2}\lambda_{2,\mathbb{P}} \leq NH_0(\mathbb{P},1,\mathbb{F}_2)^{-1} \leq 2\sqrt{\lambda_{2,\mathbb{P}}}.$$

▸ Démonstration

Théorème (Cheeger, Buser, Dodziuk, Alon-Milman)

Pour un graphe fini connexe muni d'une distribution de Garland $\mathbb{P}$,

$$\frac{1}{2}\lambda_{2,\mathbb{P}} \leq NH_0(\mathbb{P},1,\mathbb{F}_2)^{-1} \leq 2\sqrt{\lambda_{2,\mathbb{P}}}.$$

▸ Démonstration

Cet encadrement du seuil de presque-cohomologie ℓ^p $NH_0(\mathbb{P},p,\mathbb{F}_2)$ se généralise à toutes les valeurs de $p>1$.

Proposition

Pour un graphe fini connexe muni d'une distribution de Garland $\mathbb{P}$,

$$2^{1-p}NH_0(\mathbb{P},p,\mathbb{R})^{-p} \leq NH_0(\mathbb{P},1,\mathbb{F}_2)^{-1} \leq \max\{p,2^{p-1}\}NH_0(\mathbb{P},p,\mathbb{R})^{-1}.$$

Moralité. Le phénomène important (NH_0 borné) est finalement indépendant de p et du corps $\mathbf{k}$. Ce n'est malheureusement pas vrai en dimensions supérieures. Cela rend la construction d'expanseurs de dimension supérieure ($NH_k(\mathbb{P},1,\mathbb{F}_2)$ bornés pour $k=0,1,\dots$) plus difficile que celle de graphes expanseurs.

Question. Peut-on interpréter le seuil de presque-cohomologie $\|d^{-1}\|$ comme la distance entre certains complexes de cochaînes ?

Question. Peut-on interpréter le seuil de presque-cohomologie $\|d^{-1}\|$ comme la distance entre certains complexes de cochaînes ?

Un *complexe normé* est la donnée d'un espace vectoriel normé B et d'un opérateur $d : B \to B$ tel que $d \circ d = 0$. Un *isomorphisme* de complexes normés $B_1 \xrightarrow{d_1} B_1$ and $B_2 \xrightarrow{d_2} B_2$ est une bijection linéaire $F : B_1 \to B_2$ telle que $d_2 f_1 = f_1 d_1$ and F, F^{-1} sont bornés. Un *isométrie* de complexes normés est un isomorphisme isométrique.

Question. Peut-on interpréter le seuil de presque-cohomologie $\|d^{-1}\|$ comme la distance entre certains complexes de cochaînes ?

Un *complexe normé* est la donnée d'un espace vectoriel normé B et d'un opérateur $d : B \to B$ tel que $d \circ d = 0$. Un *isomorphisme* de complexes normés $B_1 \xrightarrow{d_1} B_1$ and $B_2 \xrightarrow{d_2} B_2$ est une bijection linéaire $F : B_1 \to B_2$ telle que $d_2 f_1 = f_1 d_1$ and F, F^{-1} sont bornés. Un *isométrie* de complexes normés est un isomorphisme isométrique.

Définition

Soient $B_1 \xrightarrow{d_1} B_1$ *et* $B_2 \xrightarrow{d_2} B_2$ *deux complexes normés. La* **distance de Banach-Mazur** $\mathrm{BMDist}(B_1, B_2)$ *est l'inf des* $\log(|F||F^{-1}|)$ *sur tous les isomorphismes* $F : B_1 \to B_2$.

Question. Peut-on interpréter le seuil de presque-cohomologie $\|d^{-1}\|$ comme la distance entre certains complexes de cochaînes ?

Un *complexe normé* est la donnée d'un espace vectoriel normé B et d'un opérateur $d : B \to B$ tel que $d \circ d = 0$. Un *isomorphisme* de complexes normés $B_1 \xrightarrow{d_1} B_1$ and $B_2 \xrightarrow{d_2} B_2$ est une bijection linéaire $F : B_1 \to B_2$ telle que $d_2 f_1 = f_1 d_1$ and F, F^{-1} sont bornés. Un *isométrie* de complexes normés est un isomorphisme isométrique.

Définition

Soient $B_1 \xrightarrow{d_1} B_1$ *et* $B_2 \xrightarrow{d_2} B_2$ *deux complexes normés. La* **distance de Banach-Mazur** $\mathrm{BMDist}(B_1, B_2)$ *est l'inf des* $\log(|F||F^{-1}|)$ *sur tous les isomorphismes* $F : B_1 \to B_2$.

C'est trop restrictif : ne permet pas de comparer les complexes L^p d'une variété riemannienne et d'un complexe simplicial, par exemple.

Définition

Soient $B_1 \xrightarrow{d_1} B_1$ *et* $B_2 \xrightarrow{d_2} B_2$ *deux complexes normés. On considère toutes les homotopies bornées, i.e.*

- *des morphismes bornés* $F_1 : B_1 \to B_2$ *et* $F_2 : B_2 \to B_1$ *tels que*

$$d_2 F_1 = F_1 d_1, \quad d_1 F_2 = F_2 d_2,$$

- *des opérateurs bornés* $Q_1 : B_1 \to B_1$ *and* $Q_2 : B_2 \to B_2$ *tels que*

$$1 - F_2 F_1 = d_1 Q_1 + Q_1 d_1, \quad 1 - F_1 F_2 = d_2 Q_2 + Q_2 d_2.$$

On note $q = \max\{|Q_1|, |Q_2|\}$, $f = \max\{1, |F_1||F_2|\}$. *La* **distance homotopique** $\mathrm{HomDist}(B_1, B_2)$ *est l'inf sur toutes les homotopies de* $\min\{\frac{q}{f}, 1\} + \log f$.

Définition

Soient $B_1 \stackrel{d_1}{\to} B_1$ *et* $B_2 \stackrel{d_2}{\to} B_2$ *deux complexes normés. On considère toutes les homotopies bornées, i.e.*

- *des morphismes bornés* $F_1 : B_1 \to B_2$ *et* $F_2 : B_2 \to B_1$ *tels que*
$$d_2 F_1 = F_1 d_1, \quad d_1 F_2 = F_2 d_2,$$
- *des opérateurs bornés* $Q_1 : B_1 \to B_1$ *and* $Q_2 : B_2 \to B_2$ *tels que*
$$1 - F_2 F_1 = d_1 Q_1 + Q_1 d_1, \quad 1 - F_1 F_2 = d_2 Q_2 + Q_2 d_2.$$

On note $q = \max\{|Q_1|, |Q_2|\}$, $f = \max\{1, |F_1||F_2|\}$. *La* **distance homotopique** $\mathrm{HomDist}(B_1, B_2)$ *est l'inf sur toutes les homotopies de* $\min\{\frac{q}{f}, 1\} + \log f$.

L'expression bizarre est là pour garantir l'inégalité triangulaire. Détails

En dimension finie,

$$\begin{aligned}\mathrm{HomDist}(B_1,B_2)<\infty &\iff \dim(H(B_1))=\dim(H(B_2)),\\ \mathrm{HomDist}(B_1,B_2)=0 &\iff (B_1,d_1) \text{ et } (B_2,d_2) \text{ sont isométriques.}\end{aligned}$$

Donc on obtient une distance sur l'ensemble des classes d'isométrie de complexes normés de dimension finie, de même homologie.

En dimension finie,

$$\mathrm{HomDist}(B_1, B_2) < \infty \iff \dim(H(B_1)) = \dim(H(B_2)),$$
$$\mathrm{HomDist}(B_1, B_2) = 0 \iff (B_1, d_1) \text{ et } (B_2, d_2) \text{ sont isométriques.}$$

Donc on obtient une distance sur l'ensemble des classes d'isométrie de complexes normés de dimension finie, de même homologie.

Définition

Le **seuil de presque-homologie** $NH(B)$ *est la norme de l'inverse* $\bar{d}^{-1}$ *de* $\bar{d} : B/\mathrm{Ker}(d) \to \mathrm{Im}(d)$.

En dimension finie,

$$\mathrm{HomDist}(B_1, B_2) < \infty \iff \dim(H(B_1)) = \dim(H(B_2)),$$
$$\mathrm{HomDist}(B_1, B_2) = 0 \iff (B_1, d_1) \text{ et } (B_2, d_2) \text{ sont isométriques.}$$

Donc on obtient une distance sur l'ensemble des classes d'isométrie de complexes normés de dimension finie, de même homologie.

Définition

Le ***seuil de presque-homologie*** *$NH(B)$ est la norme de l'inverse $\bar{d}^{-1}$ de $\bar{d} : B/\mathrm{Ker}(d) \to \mathrm{Im}(d)$.*

Remarque. NH est un covariant d'homotopie : si deux complexes B_1 et B_2 sont homotopes, alors $\mathrm{NH}(B_1) \leq \exp(\mathrm{HomDist}(B_1, B_2))(1 + \mathrm{NH}(B_2))$. ▸ Détails

En dimension finie,

$$\mathrm{HomDist}(B_1, B_2) < \infty \iff \dim(H(B_1)) = \dim(H(B_2)),$$
$$\mathrm{HomDist}(B_1, B_2) = 0 \iff (B_1, d_1) \text{ et } (B_2, d_2) \text{ sont isométriques.}$$

Donc on obtient une distance sur l'ensemble des classes d'isométrie de complexes normés de dimension finie, de même homologie.

Définition

Le **seuil de presque-homologie** $NH(B)$ *est la norme de l'inverse* $\bar{d}^{-1}$ *de* $\bar{d} : B/\mathrm{Ker}(d) \to \mathrm{Im}(d)$.

Remarque. NH est un covariant d'homotopie : si deux complexes B_1 et B_2 sont homotopes, alors $\mathrm{NH}(B_1) \leq \exp(\mathrm{HomDist}(B_1, B_2))(1 + \mathrm{NH}(B_2))$. ▸ Détails

Définition

On note Null l'ensemble des complexes normés dont la différentielle est nulle.

Lemme

$HomDist(B, Null) \geq \min\{NH(B), 1\}$. Détails

Lemme

$HomDist(B, Null) \geq \min\{NH(B), 1\}$. Détails

Proposition

Si B est un espace de Hilbert, $HomDist(B, Null) = \min\{NH(B), 1\}$. Détails

Lemme

$HomDist(B, Null) \geq \min\{NH(B), 1\}$. Détails

Proposition

Si B est un espace de Hilbert, $HomDist(B, Null) = \min\{NH(B), 1\}$. Détails

Ça s'applique aux cochaînes sur les graphes. Pour lever l'obstruction homologique, on attache à un graphe X les complexes

$$B_{X,\mathbf{k},p} = H^0(X, \mathbf{k}) \oplus C^0(X, \mathbf{k}) \oplus dC^0(X, \mathbf{k}) \text{ munis de normes } \ell^p,$$

où $d : H^0(X, \mathbf{k}) \to C^0(X, \mathbf{k})$ consiste à voir les fonctions localement constantes comme des 0-cochaines. Pour les graphes finis connexes,

$$HomDist(B_{X,\mathbb{R},2}, 0) = NH(B_{X,\mathbb{R},2}) = \lambda_2(X)^{1/2}.$$

Lemme

$HomDist(B, Null) \geq \min\{NH(B), 1\}$. Détails

Proposition

Si B est un espace de Hilbert, $HomDist(B, Null) = \min\{NH(B), 1\}$. Détails

Ça s'applique aux cochaînes sur les graphes. Pour lever l'obstruction homologique, on attache à un graphe X les complexes

$$B_{X,\mathbf{k},p} = H^0(X, \mathbf{k}) \oplus C^0(X, \mathbf{k}) \oplus dC^0(X, \mathbf{k}) \text{ munis de normes } \ell^p,$$

où $d : H^0(X, \mathbf{k}) \to C^0(X, \mathbf{k})$ consiste à voir les fonctions localement constantes comme des 0-cochaines. Pour les graphes finis connexes,

$$HomDist(B_{X,\mathbb{R},2}, 0) = NH(B_{X,\mathbb{R},2}) = \lambda_2(X)^{1/2}.$$

Sur $\mathbb{F}_2$, ça se passe moins bien. Détails

Exemple

Soit K_3 le graphe complet à 3 sommets. Alors

$$HomDist(B_{K_3,\mathbb{F}_2,1}, 0) = 1, \quad NH(B_{K_3,\mathbb{F}_2,1}) = \frac{1}{2}.$$

Définition

Soit $B \xrightarrow{d} B$ un complexe normé, soient B' et B'' des sous-complexes de B. On considère tous les morphismes bornés $F : B \to B$ tels que $F(B') \subset B''$ et les opérateurs bornés $Q : B \to B$ tels que, sur B', $1 - F = dQ + Qd$. On prend l'inf de $\min\{\frac{q}{f}, 1\} + \log(f)$ *pour*

$$q = |Q|, \quad f = \max\{|F|, 1\}.$$

Ceci définit la distance de Hausdorff asymétrique $\mathrm{HausDist}_B(B' \to B'')$*. On la rend symétrique en posant*

$$\mathrm{HausDist}_B(B', B'') = \mathrm{HausDist}_B(B' \to B'') + \mathrm{HausDist}_B(B'' \to B').$$

Cette distance satisfait à l'inégalité triangulaire. ▸ Détails

L'analogue d'un espace métrique compact est un complexe de chaînes normé qui peut être approximé par des sous-complexes de dimension finie.

Définition

Soit (B, d) un complexe de chaînes normé. Son **profil** *est la plus petite fonction $\pi = (\pi_d, \pi_n) : (0, +\infty) \to [0, +\infty]^2$ ayant la propriété suivante. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe un sous-complexe de dimension finie $B' \subset B$ tel que*

$$HausDist_B(B, B') < \epsilon, \quad \dim(B') \leq \pi_d(\epsilon), \quad |d_{|B'}| \leq \pi_n(\epsilon).$$

L'analogue d'un espace métrique compact est un complexe de chaînes normé qui peut être approximé par des sous-complexes de dimension finie.

Définition

Soit (B, d) un complexe de chaînes normé. Son **profil** *est la plus petite fonction $\pi = (\pi_d, \pi_n) : (0, +\infty) \to [0, +\infty]^2$ ayant la propriété suivante. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe un sous-complexe de dimension finie $B' \subset B$ tel que*

$$HausDist_B(B, B') < \epsilon, \quad \dim(B') \leq \pi_d(\epsilon), \quad |d_{|B'}| \leq \pi_n(\epsilon).$$

Exemple

Soit M une variété riemannienne compacte lisse. Soit E le complexe des formes différentielles lisses sur M muni de la norme L^2. Alors le profil π de (E, d) est majoré par l'asymptotique des valeurs propres du laplacien de Hodge,

$$\pi_d(\epsilon) \leq \mathrm{Card}\{\lambda \in \mathrm{spectre}(\Delta)\,;\, \lambda < \frac{1}{\epsilon^2}\}, \quad \pi_n(\epsilon) \leq \frac{1}{\epsilon}.$$

Cela donne une estimée du type $\pi_d(\epsilon) \leq C\,\epsilon^{-N}$, où $N = \dim(M)$.

On est tenté par la définition suivante.

Définition

Soient $B_1 \stackrel{d_1}{\to} B_1$ *et* $B_2 \stackrel{d_2}{\to} B_2$ *deux complexes de chaînes normés. On considère tous les complexes normés* $B \stackrel{d}{\to} B$*, contenant des sous-complexes* B' *et* B'' *isométriques à* B_1 *et* B_2 *respectivement, et on prend l'inf des distances de Hausdorff* $\mathrm{HausDist}_B(B', B'')$*. Ceci definit la* **distance de Gromov-Hausdorff** $\mathrm{GHDist}(B_1, B_2)$.

On est tenté par la définition suivante.

Définition

Soient $B_1 \xrightarrow{d_1} B_1$ et $B_2 \xrightarrow{d_2} B_2$ deux complexes de chaînes normés. On considère tous les complexes normés $B \xrightarrow{d} B$, contenant des sous-complexes B' et B'' isométriques à B_1 et B_2 respectivement, et on prend l'inf des distances de Hausdorff $\mathrm{HausDist}_B(B', B'')$. Ceci definit la **distance de Gromov-Hausdorff** $\mathrm{GHDist}(B_1, B_2)$.

Mauvaise idée !

Proposition

Si un complexe de dimension finie E satisfait $H(E) = 0$, alors $\mathrm{GHDist}(E, 0) = 0$. Il en résulte que $\mathrm{GHDist} = 0$ sur l'ensemble des complexes de dimension finie d'homologie nulle.

On est tenté par la définition suivante.

Définition

Soient $B_1 \xrightarrow{d_1} B_1$ *et* $B_2 \xrightarrow{d_2} B_2$ *deux complexes de chaînes normés. On considère tous les complexes normés* $B \xrightarrow{d} B$, *contenant des sous-complexes* B' *et* B'' *isométriques à* B_1 *et* B_2 *respectivement, et on prend l'inf des distances de Hausdorff* $\mathrm{HausDist}_B(B', B'')$. *Ceci definit la* **distance de Gromov-Hausdorff** $\mathrm{GHDist}(B_1, B_2)$.

Mauvaise idée !

Proposition

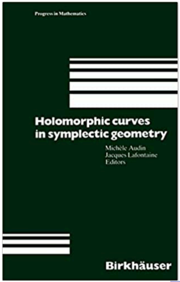
Si un complexe de dimension finie E *satisfait* $H(E) = 0$, *alors* $\mathrm{GHDist}(E, 0) = 0$. *Il en résulte que* $\mathrm{GHDist} = 0$ *sur l'ensemble des complexes de dimension finie d'homologie nulle.*

En effet, si $B = E \oplus E$ muni de

$$d = \begin{pmatrix} -d^E & 0 \\ a & d^E \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \frac{1}{ab+c} \begin{pmatrix} -cQ^E & b \\ 0 & cQ^E \end{pmatrix},$$

il vient $HausDist_B(0 \oplus E, 0) \leq \max\{\frac{c|Q^E|}{ab+c}, \frac{b}{ab+c}\}$ qui peut être rendu arbitrairement petit.


textes mathématiques
textes mathématiques
textes mathématiques
1
structures métriques
pour les variétés
riemanniennes
M. Gromov
recherche


Progress in Mathematics
Holomorphic curves
in symplectic geometry
Michèle Audin
Jacques Lafontaine
Editors
Birkhäuser

Un *expanseur* est une famille infinie de graphes de degrés bornés et de constante de Cheeger bornée inférieurement. De façon équivalente, de *trou spectraux* λ_2 bornés inférieurement.

Théorème (Pinsker 1973)

Les suites de graphes aléatoires d-reguliers sont des expanseurs.

Un *expanseur* est une famille infinie de graphes de degrés bornés et de constante de Cheeger bornée inférieurement. De façon équivalente, de *trou spectraux* λ_2 bornés inférieurement.

Théorème (Pinsker 1973)

Les suites de graphes aléatoires d-reguliers sont des expanseurs.

Il y a aussi des constructions déterministes d'expanseurs (à partir de groupes finis, de produit zig-zag,...).

Un *expanseur* est une famille infinie de graphes de degrés bornés et de constante de Cheeger bornée inférieurement. De façon équivalente, de *trou spectraux* λ_2 bornés inférieurement.

Théorème (Pinsker 1973)

Les suites de graphes aléatoires d-reguliers sont des expanseurs.

Il y a aussi des constructions déterministes d'expanseurs (à partir de groupes finis, de produit zig-zag,...).

Les expanseurs servent

- à dérandomiser des algorithmes,
- à augmenter les performances de générateurs de bits aléatoires,
- à construire des exemples d'espaces et de groupes qui n'ont pas de plongements uniformes dans les espaces de Hilbert.

Détails

Proposition

Soit $p \geq 1$. Soit Γ un groupe discret de type fini. Fixons un système générateur fini, et le graphe de Cayley G correspondant. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $h(G) > 0$.
2. *d a un inverse borné* $d\ell^p C^0(G) \to \ell^p C^1(G)/\mathrm{Ker}(d)$.
3. *La cohomologie ℓ^p* $\ell^p H^1(G) := (\ell^p C^1(G) \cap \mathrm{Ker}(d))/d\ell^p C^0(G)$ *est séparée.*
4. *Γ est non moyennable.*

Proposition

Soit $p \geq 1$. Soit Γ un groupe discret de type fini. Fixons un système générateur fini, et le graphe de Cayley G correspondant. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $h(G) > 0$.
2. *d a un inverse borné* $d\ell^p C^0(G) \to \ell^p C^1(G)/\mathrm{Ker}(d)$.
3. *La cohomologie ℓ^p* $\ell^p H^1(G) := (\ell^p C^1(G) \cap \mathrm{Ker}(d))/d\ell^p C^0(G)$ *est séparée.*
4. *Γ est non moyennable.*

Exemples. $\mathbb{Z}^d$ is moyennable. Il se comporte comme l'espace euclidien dont la constante de Cheeger vaut 0. Sa cohomologie ℓ^p est non nulle et non séparée pour tout $p > 1$.
Le groupe libre est non moyennable. Il se comporte comme l'espace hyperbolique dont la constante de Cheeger est non nulle. Sa cohomologie ℓ^p en degré 1 est non nulle et séparée pour tout $p > 1$.

Définition

Un expanseur en dimension n est une famille infinie de complexes simpliciaux de dimension pure N, de degrés bornés, munis de distributions de Garland, et de seuils de presque-cohomologie

$$h_k = (\|\bar{d}^{-1}\|_{1\to 1})^{-1}, \quad \textit{où} \quad \bar{d} : C^k(X,\mathbb{F}_2)/\mathrm{Ker}(d) \to dC^k(X,\mathbb{F}_2)$$

bornés inférieurement pour $k = 0, \dots, n-1$.

Définition

Un expanseur en dimension n est une famille infinie de complexes simpliciaux de dimension pure N, de degrés bornés, munis de distributions de Garland, et de seuils de presque-cohomologie

$$h_k = (\|\bar{d}^{-1}\|_{1\to 1})^{-1}, \quad \text{où} \quad \bar{d} : C^k(X, \mathbb{F}_2)/\mathrm{Ker}(d) \to dC^k(X, \mathbb{F}_2)$$

bornés inférieurement pour $k = 0, \ldots, n-1$.

Exemple Pour le N-squelette du n-simplexe, pour tout $k = 0, \ldots, N-1$, $h_k \geq \dfrac{n}{n-k-1}$.

Dans cet exemple, le degré augmente avec n.

Définition

Un expanseur en dimension n est une famille infinie de complexes simpliciaux de dimension pure N, de degrés bornés, munis de distributions de Garland, et de seuils de presque-cohomologie

$$h_k = (\|\bar{d}^{-1}\|_{1\to 1})^{-1}, \quad \textit{où} \quad \bar{d} : C^k(X, \mathbb{F}_2)/\mathrm{Ker}(d) \to dC^k(X, \mathbb{F}_2)$$

bornés inférieurement pour $k = 0, \ldots, n-1$.

Exemple Pour le N-squelette du n-simplexe, pour tout $k = 0, \ldots, N-1$, $h_k \geq \dfrac{n}{n-k-1}$.

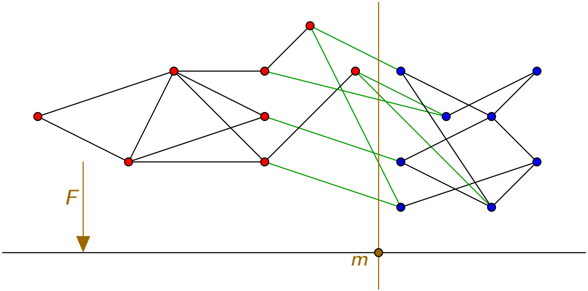
Dans cet exemple, le degré augmente avec n.

Théorème (Kaufman-Kazhdan-Lubotzky 2016)

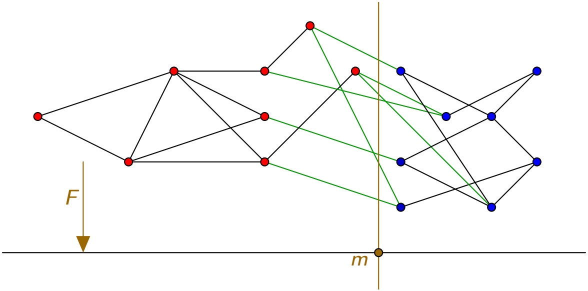
Il existe un expanseur en dimension 2*, dont la construction est déterministe.*

Pour un 2-complexe simplicial aléatoire, les garanties connues sur le degré sont un peu moins bonnes.

Remarque. Soit X un graphe connexe et $F : X \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit $m \in \mathbb{R}$ sa médiane. Alors m appartient aux images d'une fraction $h(X)$ des arêtes de X.



Remarque. Soit X un graphe connexe et $F : X \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit $m \in \mathbb{R}$ sa médiane. Alors m appartient aux images d'une fraction $h(X)$ des arêtes de X.



M. Gromov a trouvé une version multidimensionnelle de cette remarque : si un complexe simplicial de dimension pure n suffisamment riche est envoyé continûment dans $\mathbb{R}^n$, il existe un point de $\mathbb{R}^n$ qui est atteint par une fraction substantielle des n-simplexes.

Suffisamment riche signifie expanseur en dimension n, plus d'autres hypothèses sur le degré et les *cosystoles*. ▸ Détails

Lemme

$$h(X) = (\|d^{-1}\|_{1\to 1})^{-1} \text{ over } \mathbb{F}_2.$$

The support $x \mapsto A = \{v\,;\,x(v) \neq \bar{0}\}$ is a $1-1$ correspondence between 0-cochains (resp. 1-cochains) over $\mathbb{F}_2$ and subsets of vertices (resp. of edges). If A is a subset of vertices and x the corresponding 0-cochain, then the subset of edges corresponding to dx is ∂A.
Furthermore, $\|x\|_1 = \#A/n$ and $\|dx\|_1 = \#\partial A/e$.

Since G is connected, the kernel of d consists of the two 0-cochains x which are constant functions on the set of vertices.

If $y \in C^1$ belongs to dC^0, there exist exactly two 0-cochains $x_1, x_2 \in C^0$ such that $dx_1 = dx_2 = y$. One of them (let us denote it by x) has least ℓ^1 norm. The support A of x satisfies $\#A \leq \frac{n}{2}$ and ∂A corresponds to y. Therefore the estimates

$$\|x\|_1 \leq h^{-1}\,\|y\|_1 \quad \text{and} \quad \#\partial A/e \geq h\,\#A/n$$

are equivalent.

Back

Exemple

For the complete graph K_n on n vertices, $h(K_n) = \frac{n}{n-1}$ (n even) or $\frac{n+1}{n-1}$ (n odd).

Indeed, for every subset A, every vertex of A is connected to $n - \#A$ vertices of A^c, so

$$\mathbb{P}(\partial A) = \frac{\#\partial A}{e} = \frac{\#A(n-\#A)}{n(n-1)/2} = 2\frac{n}{n-1}\mathbb{P}(A)(1-\mathbb{P}(A)).$$

Since $\mathbb{P}(A) \leq \frac{1}{2}$ (resp. $\frac{n-1}{2n}$),

$$\frac{\mathbb{P}(\partial A)}{\mathbb{P}(A)} \geq \frac{n}{n-1} \quad (\text{resp, } \frac{n+1}{n-1}),$$

with equality if n is even and $\#A = \frac{n}{2}$ or n is odd and $\#A = \frac{n-1}{2}$.

Back

Proposition

X connected, Δ defined by $\|df\|_2^2 = \langle f, \Delta f\rangle$ with eigenvalues $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots$. Then

$$\lambda_1 = 0 \quad \textit{and} \quad \lambda_2 = (\|d^{-1}\|_{2\to 2})^{-2}.$$

Given $f \in C^0(G, \mathbb{R})$, let $f = \sum f_\lambda$ be the decomposition of f according to eigenspaces of Δ. Then

$$\|f\|_2^2 = \sum \|f_\lambda\|^2, \quad \|df\|_2^2 = \langle df, df\rangle = \langle f, \Delta f\rangle = \sum \lambda \|f_\lambda\|^2.$$

Since G is connected, $df = 0$ implies that f is a constant function on vertices, so the kernel of d, which coincides with the 0-eigenspace of Δ, is 1-dimensional.

If $f \in C^0(G, \mathbb{R})$ and $f_0 = 0$, then

$$\|df\|_2^2 \geq \lambda_2 \|f\|_2^2.$$

This shows that every $g \in dC^0$ has a primitive f such that $\|f\|_2 \leq \lambda_2^{-1/2} \|g\|_2$. Equality holds if $g = df$ where f belongs to the λ_2-eigenspace of Δ, so $\|d^{-1}\|_{2\to 2} = \lambda_2^{-1/2}$.

Back

Théorème (Cheeger, Buser, Dodziuk, Alon-Milman)

Pour un graphe fini connexe muni d'une distribution de Garland $\mathbb{P}$,

$$\frac{1}{2}\lambda_{2,\mathbb{P}} \leq h_{\mathbb{P}} \leq 2\sqrt{\lambda_{2,\mathbb{P}}}.$$

L'inégalité de gauche consiste à associer une cochaîne réelle $f = |x|$ à une $\mathbb{F}_2$-cochaîne x et à comparer $d^{-1}df$ et $d^{-1}dx$.

Théorème (Cheeger, Buser, Dodziuk, Alon-Milman)

Pour un graphe fini connexe muni d'une distribution de Garland $\mathbb{P}$,

$$\frac{1}{2}\lambda_{2,\mathbb{P}} \leq h_{\mathbb{P}} \leq 2\sqrt{\lambda_{2,\mathbb{P}}}.$$

L'inégalité de gauche consiste à associer une cochaîne réelle $f = |x|$ à une $\mathbb{F}_2$-cochaîne x et à comparer $d^{-1}df$ et $d^{-1}dx$.

L'inégalité de droite résulte de deux principes :

- Isopérimetrie $\implies$ inégalité de Poincaré-Sobolev ℓ^1.
  En effet, toute fonction réelle f à médiane nulle est l'intégrale de fonctions à valeurs dans $\{0, 1\}$, les fonctions caractéristiques de ses ensembles de sur-niveaux.
- L'inégalité de Poincaré-Sobolev ℓ^1 $\implies$ inégalité de Poincaré-Sobolev ℓ^2.
  Il suffit d'appliquer l'inégalité ℓ^1 à $g = f|f|$, puis Cauchy-Schwartz.

Théorème

$h \geq \frac{1}{2}\lambda_2$.

If x is an $\mathbb{F}_2$-cochain, $f = |x|$ is a real cochain, and $\|x\|_1 = \|f\|_2^2$, $\|dx\|_1 = \|df\|_2^2$.

The real number m which minimizes $\mathbb{E}((f-m)^2)$, is $m = \mathbb{E}(f)$. Thus $d^{-1}df = f - \mathbb{E}(f)$, and

$$\|f - \mathbb{E}(f)\|_2^2 \leq (|d^{-1}|_{2\to 2})^2 \|f\|_2^2.$$

On the other hand,

$$\|f - \mathbb{E}(f)\|_2^2 = \mathbb{P}(x \neq 0)(1-\mathbb{E}(f))^2 + \mathbb{P}(x = 0)\mathbb{E}(f)^2 = \|x\|_1(1 - \|x\|_1) \geq \frac{1}{2}\|d^{-1}dx\|_1.$$

so

$$\|d^{-1}dx\|_1 \leq 2(|d^{-1}|_{2\to 2})^2 \|x\|_1,$$

and

$$\|d^{-1}\|_{1\to 1} \leq 2(|d^{-1}|_{2\to 2})^2.$$

Back

Théorème

$h\leq 2\sqrt{\lambda_2}$.

First step.

$$\|d_{\mathbb{R}}^{-1}\|_{1\to 1}\leq \|d_{\mathbb{F}_2}^{-1}\|_{1\to 1},$$

i.e. the isoperimetric inequality (expressed in terms of $\mathbb{F}_2$ cochains) implies the Poincaré-Sobolev inequality (expressed in terms of $\mathbb{R}$ cochains).
Let $f\in C^0(G,\mathbb{R})$ be a function whose median vanishes. For $t\neq 0$, define $x_t\in C^0(G,\mathbb{F}_2)$ by

$$x_t(v)=\begin{cases}\bar{1} & \text{if } \frac{f(v)}{t}>1,\\ \bar{0} & \text{otherwise,}\end{cases}$$

and set $f_t=|x_t|$. Then $|f|=\int_{\mathbb{R}} f_t\,dt$. Since the ℓ^1 norm is a norm,

$$\begin{aligned}\|f\|_1=\||f|\|_1 &\leq \int_{\mathbb{R}}\|f_t\|_1\,dt=\int_{\mathbb{R}}\|x_t\|_1\,dt\leq h^{-1}\int_{\mathbb{R}}\|dx_t\|_1\,dt=h^{-1}\int_{\mathbb{R}}\|df_t\|_1\,dt\\ &\leq h^{-1}\|df\|_1.\end{aligned}$$

Second step. The ℓ^1 Poincaré-Sobolev inequality implies its ℓ^2 version.

Let $g = f|f|$. Then the median of g is equal to 0 as well. One can apply the ℓ^1 Poincaré-Sobolev inequality to g and get

$$\|g\|_1 \leq h^{-1}\|dg\|_1.$$

One checks that $\|dg\|_1 \leq 2\|f\|_2\|df\|_2$, hence

$$\|f\|_2^2 = \|g\|_1 \leq h^{-1}2\|f\|_2\|df\|_2,$$

so

$$\|f\|_2 \leq 2h^{-1}\|df\|_2$$

and

$$\lambda_2^{-1/2} = \|d^{-1}\|_{2\to 2} \leq 2h^{-1}.$$

Back

What are expanders good for

The uniform spectral gap says that spectrally, an expander behave as a complete graph. Therefore, in a problem where one should check all pairs of points (e.g. find the minimal distance between two points of a cloud), one can pick an expander and check only its edges. Hence expanders are used to *derandomize* algorithms. Fortunately, there are (several) deterministic constructions of expanders.

What are expanders good for

The uniform spectral gap says that spectrally, an expander behave as a complete graph. Therefore, in a problem where one should check all pairs of points (e.g. find the minimal distance between two points of a cloud), one can pick an expander and check only its edges. Hence expanders are used to *derandomize* algorithms. Fortunately, there are (several) deterministic constructions of expanders.

The spectral gap measures the exponential speed at which the simple random walk on the graph is mixing (i.e. pushes forward any distribution close to the uniform distribution). For instance, the art of cards shuffling is closely related to expansion in the symmetric group.

What are expanders good for

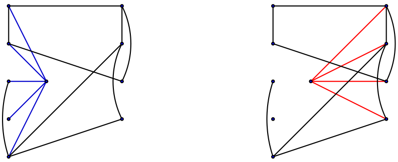
The uniform spectral gap says that spectrally, an expander behave as a complete graph. Therefore, in a problem where one should check all pairs of points (e.g. find the minimal distance between two points of a cloud), one can pick an expander and check only its edges. Hence expanders are used to *derandomize* algorithms. Fortunately, there are (several) deterministic constructions of expanders.

The spectral gap measures the exponential speed at which the simple random walk on the graph is mixing (i.e. pushes forward any distribution close to the uniform distribution). For instance, the art of cards shuffling is closely related to expansion in the symmetric group.

The spectral gap also controls coarse embeddings to Hilbert spaces. For instance, planar graphs cannot be expanders. Examples of finitely generated groups that cannot be coarsely embedded in Hilbert spaces (Gromov monsters) have been constructed by arranging that an expander embeds in their Cayley graphs.

Back

A *Seidel switch* on a graph consists in picking a vertex, removing all edges that contain it and insert edges to all vertices that were not previously its neighbours.



Two graphs on the same vertex set are *Seidel equivalent* if they can be obtained one from the other after a finite number of Seidel switches.

Exemple

Seidel equivalence is $(3,1)$*-testable.*

Indeed, a graph with vertex set $\{1,\ldots,n\}$ can be viewed as a 1-cochain on the complete graph K_n. A Seidel switch at vertex v amounts to adding $d\chi_v$, where $\chi_v(v)=\bar{1}$ and $\chi_v=\bar{0}$ elsewhere. Therefore two graphs with vertex set $\{1,\ldots,n\}$ are Seidel equivalent if and only if the corresponding 1-cochains are cohomologous, and we have a $(3,1)$-tester for that, since $H^1(K_n,\mathbb{F}_2)=0$ and $h_1(K_n)\geq 1$.

Back

Let X be a simplicial complex. Fix a Garland probability distribution on simplices σ of X. The *local sparsity* of X controls the fraction of simplices of all dimensions that can meet at a vertex,

$$\mathrm{spar}(X) = \max_{v \in X^0} \mathbb{P}(v \in \sigma).$$

Let X be a simplicial complex. Fix a Garland probability distribution on simplices σ of X. The *local sparsity* of X controls the fraction of simplices of all dimensions that can meet at a vertex,

$$\mathrm{spar}(X) = \max_{v \in X^0} \mathbb{P}(v \in \sigma).$$

When $H^k(X, \mathbb{F}_2) \neq 0$, the *k-cosystole* of X is the length of its shortest nonzero vector,

$$\theta_k(X) := \min\{\|\kappa\|_1 \, ; \, \kappa \in C^k(X, \mathbb{F}_2) \setminus dC^{k-1}(X, \mathbb{F}_2)\}.$$

Let X be a simplicial complex. Fix a Garland probability distribution on simplices σ of X. The *local sparsity* of X controls the fraction of simplices of all dimensions that can meet at a vertex,

$$\mathrm{spar}(X) = \max_{v \in X^0} \mathbb{P}(v \in \sigma).$$

When $H^k(X, \mathbb{F}_2) \neq 0$, the *k-cosystole* of X is the length of its shortest nonzero vector,

$$\theta_k(X) := \min\{\|\kappa\|_1 \, ; \, \kappa \in C^k(X, \mathbb{F}_2) \setminus dC^{k-1}(X, \mathbb{F}_2)\}.$$

Théorème (Gromov 2010)

For every $h > 0, \theta > 0$ and N, for all sufficiently small $\epsilon > 0$, there exists $c(\epsilon, h, \theta, N) > 0$ such that for every simplicial complex X of pure dimension N, and every continuous map $F : X \to \mathbb{R}^N$, there exists a point in $\mathbb{R}^N$ which belongs to the images by F of at least a fraction

$$c(\mathrm{spar}(X), \min_{k=0,\ldots,N-1} h_k(X), \min_{k=0,\ldots,N-1} \theta_k(X), N)$$

of the N-simplices of X.

Back

Lemme

$HomDist(B_1, B_3) \leq HomDist(B_1, B_2) + HomDist(B_2, B_3)$.

Let $(B_1, d_1, Q_1) \overset{F_1,F_2}{\rightleftharpoons} (B_2, d_2, Q_2)$ and $(B_2, d_2, Q_2') \overset{G_2,G_3}{\rightleftharpoons} (B_3, d_3, Q_3)$ be homotopies. Let $q = \max\{|Q_1|, |Q_2|\}$, $f = \max\{1, |F_1||F_2|\}$, $q' = \max\{|Q_2'|, |Q_3|\}$, $f' = \max\{1, |G_2||G_3|\}$. Then $(B_1, d_1, Q_1') \overset{G_2F_1,F_2G_3}{\rightleftharpoons} (B_3, d_3, Q_3')$ is a homotopy, where

$$Q_1' = Q_1 + F_2Q_2'F_1, \quad Q_3' = Q_3 + G_2Q_2G_3.$$

Thus $q'' = \max\{|Q_1'|, |Q_3'|\}$ and $f'' = \max\{1, |G_2F_1||F_2G_3|\}$ satisfy

$$q'' \leq f'q + fq', \quad f'' \leq ff',$$

so $\dfrac{q''}{f''} + \log(f'') \leq \dfrac{q}{f} + \log(f) + \dfrac{q'}{f'} + \log(f')$.

The expression $\max\{\dfrac{q}{f} + \log f, 1\}$ is necessary in order for this function to be nondecreasing in q and in f.

Back

Lemme

$HomDist(B,0) \geq \|\bar{d}^{-1}\|$.

Let

$$(B, d, Q) \overset{0,0}{\rightleftharpoons} (0,0,0)$$

be a homotopy to the trivial complex. This simply means that $1 = dQ + Qd$. If $y \in \mathrm{Im}(d)$, $y = dx$, then

$$y = dx = d(dQx + Qdx) = dQdx = dQy,$$

thus $|Qy| \geq |\bar{d}^{-1}y|$, and $|Q| \geq |\bar{d}^{-1}|$, so

$$HomDist(B,0) \geq \max\{|Q|, \frac{1}{|Q|} + \log(|Q|)\} \geq |\bar{d}^{-1}| = NH(B).$$

Back

Lemme

$\mathrm{NH}(B_1) \leq \exp(\mathrm{HomDist}(B_1, B_2))(1 + \mathrm{NH}(B_2))$.

Let $(B_1, d_1, Q_1) \overset{F_1, F_2}{\rightleftharpoons} (B_2, d_2, Q_2)$ be a homotopy of complexes. Let $c_2 = \mathrm{NH}(B_2)$.

If $y_1 \in d_1 B_1$, $y_2 = f_1(y_1) \in d_2 B_2$, so there exists $x_2 \in B_2$ such that $dx_2 = y_2$ and $|x_2| \leq c_2 |y_2|$. Let $x_1 = Q_1 y_1 + F_2(x_2)$. Then $dx_1 = y_1$ and

$$|x_2| \leq |Q_1||y_1| + |F_2|c_2|F_1||y_1| \leq (q + fc_2)|y_2|.$$

Therefore $\mathrm{NH}(B_1) \leq q + fc_2$.

Remember that $D = \mathrm{HomDist}(B_1, B_2) = \max\{\frac{q}{f} + \log f, \frac{f}{q} + \log q\}$.
If $q \leq f$, $D = \frac{q}{f} + \log f$ and $q + fc_2 \leq f + fc_2 \leq e^D(1 + c_2)$.
If $q \geq f$, $D = \frac{f}{q} + \log q$ and $q + fc_2 \leq q + qc_2 \leq e^D(1 + c_2)$ again.

Back

Proposition

If B is a Hilbert space, $HomDist(B,0) = NH(B) \iff H(B) = 0$.

Indeed, homotopic complexes has the same homology, so $HomDist(B,0) < \infty \implies H(B) = 0$.

Conversely, assume that $H(B) = 0$. The orthogonal projection $\pi : B \to \mathrm{Im}(d)$ has norm ≤ 1. The section σ of the projection $p : B \to B/\mathrm{Ker}(d)$ whose image is the orthogonal complement of $\mathrm{Ker}(d)$ has norm ≤ 1. Therefore $Q = \sigma \bar{d}^{-1}\pi$ satisfies $|Q| \leq |\bar{d}^{-1}|$. Since $H(B) = 0$, $\mathrm{Im}(\sigma) = \mathrm{Ker}(\pi)$, and B is the orthogonal direct sum $B = \mathrm{Im}(\sigma) \oplus \mathrm{Im}(d)$. In this decomposition,

$$Qd = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad dQ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

so $dQ + Qd = 1$, $HomDist(B,0) \leq NH(B)$.

Back

Exemple

$HomDist(B_{K_3,\mathbb{F}_2,1},0)=1$, $NH(B_{K_3,\mathbb{F}_2,1})=\frac{1}{2}$.

The assertion $NH(B_{K_3,\mathbb{F}_2,1})=\frac{1}{2}$ is a special case of $h(K_n)=\frac{n+1}{n-1}$ for n odd.

Let $Q:B\to B$ satisfy $1=dQ+Qd$. Let e_1,e_2,e_3 be the natural basis of $C^0(K_3,\mathbb{F}_2)$. Then $|de_1|=|de_2|=|de_3|=\frac{2}{3}$, and $d(e_1+e_2+e_3)=\bar{0}$.
If Qde_1 has norm $<\frac{2}{3}$, then $Qde_1=e_1$. If furthermore Qde_2 has norm $<\frac{2}{3}$, then $Qde_2=e_2$. Then $Qd(e_3)=Qde_1+Qde_2=e_1+e_2$ has norm $\frac{2}{3}$. Thus one of the Qde_i must have norm $\frac{2}{3}$, thus $|Q|\geq 1$.

Conversely, let us denote by e_0 the nonzero element of $H^0(K_3,\mathbb{F}_2)$, so that $de_0=e_1+e_2+e_3$ and $e_0,e_1,e_2,e_3,de_1,de_2$ is a basis of $B_{K_3,\mathbb{F}_2,1}$. If $x=x_0e_0+x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3+x_4de_1+x_5de_2$,

$$|x|=\frac{1}{3}(|x_0|+|x_1|+|x_2|+|x_3|)+\frac{2}{3}\max\{|x_4|,|x_5|,|x_4+x_5|\}.$$

Let us set $Q(x)=x_3e_3+x_4e_1+x_5e_2$. Then $dQ+Qd=1$, and

$$|Q(x)|=\frac{1}{3}(|x_3|+|x_4|+|x_5|)\leq\frac{1}{3}|x_3|+\frac{2}{3}\max\{|x_4|,|x_5|\}\leq|x|.$$

Back

Lemme

Let (B, d) be a normed complex. The embedded Hausdorff distance $\mathrm{HausDist}_B$ *between subcomplexes of B satisfies the triangle inequality.*

Let B_1, B_2, B_3 be subcomplexes of B. Let operators $F_1, F_2, Q_1, Q_2 : B \to B$ satisfy

$$F_1(B_1) \subset B_2, \quad F_2(B_2) \subset B_3,$$
$$1 - F_1 = d_1 Q_1 + Q_1 d_1, \quad 1 - F_2 = d_2 Q_2 + Q_2 d_2.$$

Then $F_3 = F_2 F_1$ maps B_1 to B_3 and satisfies $1 - F_3 = dQ_3 + Q_3 d$ for

$$Q_3 = Q_1 + Q_2 F_1.$$

Since

$$|Q_3| \leq |Q_1| \max\{|F_2|, 1\} + |Q_2||F_1| \quad \text{and} \quad |F_3| \leq |F_1||F_2|,$$

$$\frac{|Q_3|}{\max\{|F_3|} + \log(\max\{|F_3|, 1\}) \leq \frac{|Q_1|}{|F_1|} + \log(|F_1|) + \frac{|Q_2|}{\max\{|F_2|, 1\}} + \log(\max\{|F_2|, 1\}).$$

Back

Corollaire

Let $r > 0$. The Hausdorff distance $\mathrm{HausDist}_r$ between complete normed complexes $B \xrightarrow{d} B$ such that $|d| \leq r$ satisfies the triangle inequality.

Given isometries of B_1, B_2 to subcomplexes of B and isometries of B_2, B_3 to subcomplexes of $\bar{B}$, one constructs a complex $\bar{\bar{B}}$ that contains isometric copies of B and $\bar{B}$ which intersect along a common subcomplex B'' isometric to B_2. One starts with $B \oplus \bar{B}$ with the norm $|(x, \bar{x})| = |x| + |\bar{x}|$. By completeness, the subspace

$$D = \{(-x'', i(x'')) \,;\, x'' \in B''\}$$

of $B \oplus \bar{B}$ is closed. Let $\bar{\bar{B}} = (B \oplus \bar{B})/D$, equipped with the quotient norm and the quotient operator $\bar{\bar{d}}$.

The embedded Hausdorff distances in $\bar{\bar{B}}$ are less that those in B and $\bar{B}$, so one can apply the previous Lemma.

Back