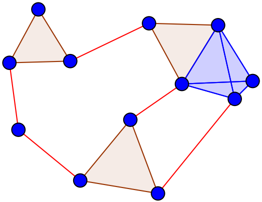
Distance entre complexes de chaînes normés

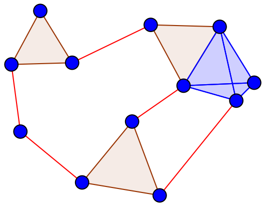
Pierre Pansu, Université Paris-Saclay

5 octobre 2023

Un complexe simplicial est formé de simplexes de différentes dimensions. Les *chaînes simpliciales*, ce sont les combinaisons linéaires de simplexes. Le *bord* d'un simplexe est une chaîne, d'où un opérateur ∂ et son adjoint d, qui satisfont $\partial \circ \partial = 0$ et $d \circ d = 0$.

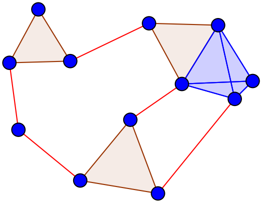


Un complexe simplicial est formé de simplexes de différentes dimensions. Les *chaînes simpliciales*, ce sont les combinaisons linéaires de simplexes. Le *bord* d'un simplexe est une chaîne, d'où un opérateur ∂ et son adjoint d, qui satisfont $\partial \circ \partial = 0$ et $d \circ d = 0$.



L'homologie (resp. la cohomologie) du complexe simplicial, c'est $\mathrm{Ker}(\partial)/\mathrm{Im}(\partial)$ (resp. $\mathrm{Ker}(d)/\mathrm{Im}(d)$).

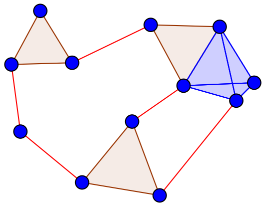
Un complexe simplicial est formé de simplexes de différentes dimensions. Les *chaînes simpliciales*, ce sont les combinaisons linéaires de simplexes. Le *bord* d'un simplexe est une chaîne, d'où un opérateur ∂ et son adjoint d, qui satisfont $\partial \circ \partial = 0$ et $d \circ d = 0$.



L'homologie (resp. la cohomologie) du complexe simplicial, c'est $\mathrm{Ker}(\partial)/\mathrm{Im}(\partial)$ (resp. $\mathrm{Ker}(d)/\mathrm{Im}(d)$).

On peut munir les chaînes (cochaînes) simpliciales de normes ℓ^p.

Un complexe simplicial est formé de simplexes de différentes dimensions. Les *chaînes simpliciales*, ce sont les combinaisons linéaires de simplexes. Le *bord* d'un simplexe est une chaîne, d'où un opérateur ∂ et son adjoint d, qui satisfont $\partial \circ \partial = 0$ et $d \circ d = 0$.

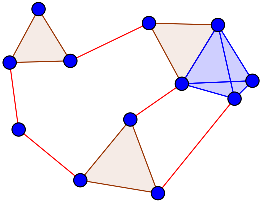


L'homologie (resp. la cohomologie) du complexe simplicial, c'est $\mathrm{Ker}(\partial)/\mathrm{Im}(\partial)$ (resp. $\mathrm{Ker}(d)/\mathrm{Im}(d)$).

On peut munir les chaînes (cochaînes) simpliciales de normes ℓ^p.

En général, un *complexe de chaînes normé* est un espace vectoriel normé B muni d'un endomorphisme d tel que $d \circ d = 0$.

Un complexe simplicial est formé de simplexes de différentes dimensions. Les *chaînes simpliciales*, ce sont les combinaisons linéaires de simplexes. Le *bord* d'un simplexe est une chaîne, d'où un opérateur ∂ et son adjoint d, qui satisfont $\partial \circ \partial = 0$ et $d \circ d = 0$.



L'homologie (resp. la cohomologie) du complexe simplicial, c'est $\mathrm{Ker}(\partial)/\mathrm{Im}(\partial)$ (resp. $\mathrm{Ker}(d)/\mathrm{Im}(d)$).

On peut munir les chaînes (cochaînes) simpliciales de normes ℓ^p.

En général, un *complexe de chaînes normé* est un espace vectoriel normé B muni d'un endomorphisme d tel que $d \circ d = 0$.

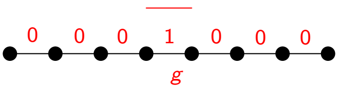
Ce qui garantit la robustesse du calcul de l'homologie, c'est le *conditionnement*

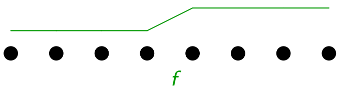
$$\kappa = |\bar{d}||\bar{d}^{-1}|,$$

où $\bar{d} : B/\mathrm{Ker}(d) \to \mathrm{Im}(d)$.

Rappel : on munit les chaînes (cochaînes) d'un graphe des normes ℓ^p.
Exemple. Le graphe rectiligne de longueur n satisfait $H^1 = 0$. La 1-cochaîne g égale à $\bar{1}$ sur l'arête centrale et 0 ailleurs s'écrit df où

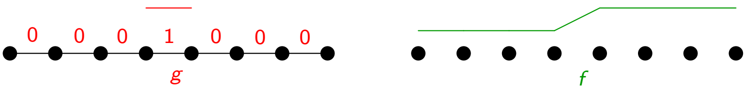
$$\|g\|_p = 1, \quad \|f\|_p \sim n^{1/p}.$$





Rappel : on munit les chaînes (cochaînes) d'un graphe des normes ℓ^p.
Exemple. Le graphe rectiligne de longueur n satisfait $H^1 = 0$. La 1-cochaîne g égale à $\bar{1}$ sur l'arête centrale et 0 ailleurs s'écrit df où

$$\|g\|_p = 1, \quad \|f\|_p \sim n^{1/p}.$$

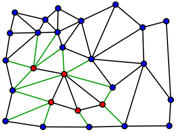


Quand n est grand, résoudre $df = g$ est instable. Le calcul de l'homologie est mal conditionné.

Définition

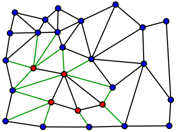
Le **conditionnement** *d'un graphe X est $\kappa(X, p, \mathbf{k}) = |\bar{d}||\bar{d}^{-1}|$ où $\bar{d} : C(X, \mathbf{k})/\mathrm{Ker}(d) \to dC(X, \mathbf{k})$. (Il dépend de p et du corps $\mathbf{k}$).*

Isopérimétrie = art de couper l'espace en deux.



$|A| = 5$, $|\partial A| = 15$.

Isopérimétrie = art de couper l'espace en deux.



$|A| = 5$, $|\partial A| = 15$.

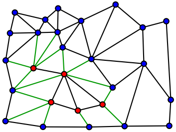
Définition

La **constante de Cheeger** *$h(X)$ d'un graphe X est le plus grand h tel que pour tout ensemble A de sommets tel que $|A| \leq \frac{1}{2}|X|$,*

$$|\partial A| \geq h\,|A|.$$

Ici, ∂A est l'ensemble des arêtes reliant A à son complémentaire.

Isopérimétrie = art de couper l'espace en deux.



$|A| = 5$, $|\partial A| = 15$.

Définition

*La **constante de Cheeger** $h(X)$ d'un graphe X est le plus grand h tel que pour tout ensemble A de sommets tel que $|A| \leq \frac{1}{2}|X|$,*

$$|\partial A| \geq h\,|A|.$$

Ici, ∂A est l'ensemble des arêtes reliant A à son complémentaire.

Proposition

$$h(X) = \frac{2}{\kappa(X, 1, \mathbb{F}_2)} = 2(\|\bar{d}\|_{1\to 1}\|\bar{d}^{-1}\|_{1\to 1})^{-1} \text{ sur } \mathbb{F}_2.$$

Proposition

Soit Δ *l'opérateur auto-adjoint correspondant à la forme quadratique* $f \mapsto \|df\|_2^2 = \langle f, \Delta f \rangle$. *Soient* $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots$ *ses valeurs propres. Si* X *est connexe, alors* $\lambda_1 = 0$ *et*

$$\lambda_2 = (\|\bar{d}^{-1}\|_{2\to 2})^{-2}.$$

Proposition

Soit Δ l'opérateur auto-adjoint correspondant à la forme quadratique $f \mapsto \|df\|_2^2 = \langle f, \Delta f\rangle$. Soient $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots$ ses valeurs propres. Si X est connexe, alors $\lambda_1 = 0$ et

$$\lambda_2 = (\|\bar{d}^{-1}\|_{2\to 2})^{-2}.$$

En particulier,

$$2\lambda_2^{-1} \leq \kappa_0(X, 2, \mathbb{R})^2 \leq 4\lambda_2^{-1}.$$

Proposition

Soit Δ l'opérateur auto-adjoint correspondant à la forme quadratique $f \mapsto \|df\|_2^2 = \langle f, \Delta f\rangle$. Soient $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots$ ses valeurs propres. Si X est connexe, alors $\lambda_1 = 0$ et

$$\lambda_2 = (\|\bar{d}^{-1}\|_{2\to 2})^{-2}.$$

En particulier,

$$2\lambda_2^{-1} \leq \kappa_0(X, 2, \mathbb{R})^2 \leq 4\lambda_2^{-1}.$$

On appelle λ_2 le *trou spectral* du graphe.
Il contrôle la vitesse à laquelle une marche au hasard sur le graphe est mélangeante.
En particulier, la facilité de tirer un sommet au hasard.

Proposition

Soit Δ l'opérateur auto-adjoint correspondant à la forme quadratique $f \mapsto \|df\|_2^2 = \langle f, \Delta f \rangle$. Soient $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots$ ses valeurs propres. Si X est connexe, alors $\lambda_1 = 0$ et

$$\lambda_2 = (\|\bar{d}^{-1}\|_{2\to 2})^{-2}.$$

En particulier,

$$2\lambda_2^{-1} \leq \kappa_0(X, 2, \mathbb{R})^2 \leq 4\lambda_2^{-1}.$$

On appelle λ_2 le *trou spectral* du graphe.
Il contrôle la vitesse à laquelle une marche au hasard sur le graphe est mélangeante.
En particulier, la facilité de tirer un sommet au hasard.

Moralité. Le complexe de chaînes normé contient des informations intéressantes, au-delà de sa seule homologie.

Question. Peut-on interpréter le conditionnement $\kappa = |\bar{d}||\bar{d}^{-1}|$ comme la distance entre certains complexes de chaînes normés ?

Question. Peut-on interpréter le conditionnement $\kappa = |\bar{d}||\bar{d}^{-1}|$ comme la distance entre certains complexes de chaînes normés ?

Pour définir une distance entre complexes de chaines normés, la première idée est de mesurer les conditionnements des isomorphismes.

Définition

Soient $B_1 \stackrel{d_1}{\to} B_1$ *et* $B_2 \stackrel{d_2}{\to} B_2$ *deux complexes de chaînes normés. La* **distance de Banach-Mazur** $\mathrm{BMDist}(B_1, B_2)$ *est l'inf des* $\log(|F||F^{-1}|)$ *sur tous les isomorphismes* $F : B_1 \to B_2$ *tels que* $Fd_1 = d_2F$.

Question. Peut-on interpréter le conditionnement $\kappa = |\bar{d}||\bar{d}^{-1}|$ comme la distance entre certains complexes de chaînes normés ?

Pour définir une distance entre complexes de chaines normés, la première idée est de mesurer les conditionnements des isomorphismes.

Définition

Soient $B_1 \stackrel{d_1}{\to} B_1$ et $B_2 \stackrel{d_2}{\to} B_2$ deux complexes de chaînes normés. La **distance de Banach-Mazur** $\mathrm{BMDist}(B_1, B_2)$ *est l'inf des* $\log(|F||F^{-1}|)$ *sur tous les isomorphismes $F : B_1 \to B_2$ tels que $Fd_1 = d_2 F$.*

C'est trop restrictif : cela impose que $\dim(B_1) = \dim(B_2)$.

La seconde idée est de mesurer la taille des homotopies.

Définition

Soient $B_1 \xrightarrow{d_1} B_1$ *et* $B_2 \xrightarrow{d_2} B_2$ *deux complexes de chaînes normés. On considère toutes les homotopies bornées, i.e.*

- *des morphismes bornés* $F_1 : B_1 \to B_2$ *et* $F_2 : B_2 \to B_1$ *tels que*

$$d_2 F_1 = F_1 d_1, \quad d_1 F_2 = F_2 d_2,$$

- *des opérateurs bornés* $Q_1 : B_1 \to B_1$ *and* $Q_2 : B_2 \to B_2$ *tels que*

$$1 - F_2 F_1 = d_1 Q_1 + Q_1 d_1, \quad 1 - F_1 F_2 = d_2 Q_2 + Q_2 d_2.$$

On note $q = \max\{|Q_1|, |Q_2|\}$, $f = \max\{1, |F_1||F_2|\}$. *La* **distance homotopique** $\mathrm{HomDist}(B_1, B_2)$ *est l'inf sur toutes les homotopies de* $\min\{\frac{q}{f} + \log f, \frac{f}{q} + \log q\}$.

La seconde idée est de mesurer la taille des homotopies.

Définition

Soient $B_1 \overset{d_1}{\to} B_1$ *et* $B_2 \overset{d_2}{\to} B_2$ *deux complexes de chaînes normés. On considère toutes les homotopies bornées, i.e.*

- *des morphismes bornés* $F_1 : B_1 \to B_2$ *et* $F_2 : B_2 \to B_1$ *tels que*

$$d_2 F_1 = F_1 d_1, \quad d_1 F_2 = F_2 d_2,$$

- *des opérateurs bornés* $Q_1 : B_1 \to B_1$ *and* $Q_2 : B_2 \to B_2$ *tels que*

$$1 - F_2 F_1 = d_1 Q_1 + Q_1 d_1, \quad 1 - F_1 F_2 = d_2 Q_2 + Q_2 d_2.$$

On note $q = \max\{|Q_1|, |Q_2|\}$, $f = \max\{1, |F_1||F_2|\}$. *La* **distance homotopique** $\mathrm{HomDist}(B_1, B_2)$ *est l'inf sur toutes les homotopies de* $\min\{\frac{q}{f} + \log f, \frac{f}{q} + \log q\}$.

L'expression bizarre est là pour garantir l'inégalité triangulaire.

Analogie entre complexes de chaînes normés et espaces métriques.

Espace métrique	Complexe de chaînes normé
Borné	Homotope à un complexe nul
Précompact	Dans l'adhérence des complexes de dim. finie
Distance de Hausdorff-Gromov	Distance homotopique
Critère de compacité (Gromov)	?

Analogie entre complexes de chaînes normés et espaces métriques.

Espace métrique	Complexe de chaînes normé
Borné	Homotope à un complexe nul
Précompact	Dans l'adhérence des complexes de dim. finie
Distance de Hausdorff-Gromov	Distance homotopique
Critère de compacité (Gromov)	?

Définition

Soit (B, d) *un complexe de chaînes normé. Son* **profil** *est la plus petite fonction* $\pi = (\pi_d, \pi_c) : (0, +\infty) \to (0, +\infty)^2$ *ayant la propriété suivante. Pour tout* $\epsilon > 0$*, il existe un complexe de dimension finie* (B', d') *tel que*

$$HomDist(B, B') < \epsilon, \quad \dim(B') \leq \pi_d(\epsilon), \quad \kappa(B', d') \leq \pi_c(\epsilon).$$

Analogie entre complexes de chaînes normés et espaces métriques.

Espace métrique	Complexe de chaînes normé
Borné	Homotope à un complexe nul
Précompact	Dans l'adhérence des complexes de dim. finie
Distance de Hausdorff-Gromov	Distance homotopique
Critère de compacité (Gromov)	?

Définition

Soit (B,d) un complexe de chaînes normé. Son **profil** *est la plus petite fonction $\pi = (\pi_d, \pi_c) : (0,+\infty) \to (0,+\infty)^2$ ayant la propriété suivante. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe un complexe de dimension finie (B', d') tel que*

$$HomDist(B, B') < \epsilon, \quad \dim(B') \leq \pi_d(\epsilon), \quad \kappa(B', d') \leq \pi_c(\epsilon).$$

Théorème

Une famille de complexes de chaînes normés non nuls est précompacte si et seulement si les profils sont uniformément majorés.

Exemple

Soit M une variété riemannienne compacte lisse. Soit E le complexe des formes différentielles lisses sur M muni de la norme L^2. Alors le profil π de (E, d) est majoré par l'asymptotique des valeurs propres du laplacien de Hodge-Beltrami,

$$\pi_d(\epsilon) \leq \mathrm{Card}\{\lambda \in \mathrm{spectre}(\Delta)\,;\, \lambda < \frac{1}{\epsilon^2}\}, \quad \pi_c(\epsilon) \leq \frac{1}{\epsilon\sqrt{\lambda_2}}.$$

Cela donne une estimée du type $\pi_d(\epsilon) \leq C\,\epsilon^{-N}$, où $N = \dim(M)$.

Exemple

Soit M une variété riemannienne compacte lisse. Soit E le complexe des formes différentielles lisses sur M muni de la norme L^2. Alors le profil π de (E, d) est majoré par l'asymptotique des valeurs propres du laplacien de Hodge-Beltrami,

$$\pi_d(\epsilon) \leq \mathrm{Card}\{\lambda \in \mathrm{spectre}(\Delta)\,;\, \lambda < \frac{1}{\epsilon^2}\}, \quad \pi_c(\epsilon) \leq \frac{1}{\epsilon\sqrt{\lambda_2}}.$$

Cela donne une estimée du type $\pi_d(\epsilon) \leq C\,\epsilon^{-N}$, où $N = \dim(M)$.

Conjecture

Pour des nuages de points répartis sur une variété compacte lisse, les complexes de cochaînes ℓ^2 forment une famille précompacte.

Espace métrique	Complexe de chaînes normé
Borné	Homotope à un complexe nul
Précompact	Dans l'adhérence des complexes de dim. finie
Distance de Hausdorff-Gromov	Distance homotopique
Critère de compacité (Gromov)	?

Espace métrique	Complexe de chaînes normé
Borné	Homotope à un complexe nul
Précompact	Dans l'adhérence des complexes de dim. finie
Distance de Hausdorff-Gromov	Distance homotopique
Critère de compacité (Gromov)	?

Définition

Un complexe de chaînes est **nul** *si* $d = 0$. *Soit Null l'ensemble des complexes de chaînes normés nuls. Pour un complexe de chaînes normé* B, *on note*

$$\mathrm{ND}(B) = \mathrm{HomDist}(B, Null),$$
$$\mathrm{NH}(B) = |\bar{d}^{-1}|.$$

Espace métrique	Complexe de chaînes normé
Borné	Homotope à un complexe nul
Précompact	Dans l'adhérence des complexes de dim. finie
Distance de Hausdorff-Gromov	Distance homotopique
Critère de compacité (Gromov)	?

Définition

Un complexe de chaînes est **nul** *si* $d = 0$. *Soit* $Null$ *l'ensemble des complexes de chaînes normés nuls. Pour un complexe de chaînes normé* B, *on note*

$$\mathrm{ND}(B) = \mathrm{HomDist}(B, Null),$$
$$\mathrm{NH}(B) = |\bar{d}^{-1}|.$$

Question. Est-ce que B est "borné", i.e. $\mathrm{ND}(B) < \infty$, si et seulement si $\mathrm{NH}(B) < \infty$?

Espace métrique	Complexe de chaînes normé
Borné	Homotope à un complexe nul
Précompact	Dans l'adhérence des complexes de dim. finie
Distance de Hausdorff-Gromov	Distance homotopique
Critère de compacité (Gromov)	?

Définition

Un complexe de chaînes est **nul** *si $d = 0$. Soit Null l'ensemble des complexes de chaînes normés nuls. Pour un complexe de chaînes normé B, on note*

$$\mathrm{ND}(B) = \mathrm{HomDist}(B, \mathit{Null}),$$
$$\mathrm{NH}(B) = |\bar{d}^{-1}|.$$

Question. Est-ce que B est "borné", i.e. $\mathrm{ND}(B) < \infty$, si et seulement si $\mathrm{NH}(B) < \infty$?

Réponse. Oui lorsque B est hilbertien, non en général.

Exemple. Soit (B, d) un complexe où B est un Banach. Alors $\mathrm{NH}(B) < \infty$ si et seulement si $\mathrm{Im}(d)$ est fermé. En revanche, s'il n'existe pas de rétraction linéaire bornée de $\mathrm{Ker}(d)$ sur $\mathrm{Im}(d)$, alors $\mathrm{ND}(B) = +\infty$.

Espace métrique	Complexe de chaînes normé
Borné	Homotope à un complexe nul
Précompact	Dans l'adhérence des complexes de dim. finie
Distance de Hausdorff-Gromov	Distance homotopique
Critère de compacité (Gromov)	?

Espace métrique	Complexe de chaînes normé
Borné	Homotope à un complexe nul
Précompact	Dans l'adhérence des complexes de dim. finie
Distance de Hausdorff-Gromov	Distance homotopique
Critère de compacité (Gromov)	?

Définition

Soit B un complexe de chaînes borné. On note $\bar{B} = B/\mathrm{Ker}(d)$ et $\bar{d} : \bar{B} \to \mathrm{Im}(d)$. Les **valeurs singulières** *de B sont les nombres*

$$\sigma_j = \inf\{s \geq 0\,;\, \exists L \subset \bar{B} \text{ sous-space vectoriel tel que } \dim(L) \geq j \text{ and } \forall \bar{x} \in L,\ |\bar{d}\bar{x}| \leq s|\bar{x}|\}.$$

Espace métrique	Complexe de chaînes normé
Borné	Homotope à un complexe nul
Précompact	Dans l'adhérence des complexes de dim. finie
Distance de Hausdorff-Gromov	Distance homotopique
Critère de compacité (Gromov)	?

Définition

Soit B un complexe de chaînes borné. On note $\bar{B} = B/\mathrm{Ker}(d)$ et $\bar{d} : \bar{B} \to \mathrm{Im}(d)$. Les **valeurs singulières** *de B sont les nombres*

$$\sigma_j = \inf\{s \geq 0\,;\ \exists L \subset \bar{B} \text{ sous-space vectoriel tel que } \dim(L) \geq j \text{ and } \forall \bar{x} \in L,\ |\bar{d}\bar{x}| \leq s|\bar{x}|\}.$$

Question. Est-ce que B appartient à l'adhérence des complexes de chaînes de dimension finie si et seulement si ses valeurs singulières forment une suite tendant vers $+\infty$?

Espace métrique	Complexe de chaînes normé
Borné	Homotope à un complexe nul
Précompact	Dans l'adhérence des complexes de dim. finie
Distance de Hausdorff-Gromov	Distance homotopique
Critère de compacité (Gromov)	?

Définition

Soit B un complexe de chaînes borné. On note $\bar{B} = B/\mathrm{Ker}(d)$ et $\bar{d} : \bar{B} \to \mathrm{Im}(d)$. Les **valeurs singulières** *de B sont les nombres*

$$\sigma_j = \inf\{s \geq 0\,;\, \exists L \subset \bar{B} \textit{ sous-space vectoriel tel que } \dim(L) \geq j \textit{ and } \forall \bar{x} \in L,\ |\bar{d}\bar{x}| \leq s|\bar{x}|\}.$$

Question. Est-ce que B appartient à l'adhérence des complexes de chaînes de dimension finie si et seulement si ses valeurs singulières forment une suite tendant vers $+\infty$?

Réponse. Oui lorsque B est hilbertien, peut-être que non en général.

Définition

Soit B un complexe de chaînes borné. B **admet une homotopie compacte** *s'il existe des opérateurs compacts $T, S : B \to B$ tels que $1 - S = dT + Td$.*

Définition

Soit B un complexe de chaînes borné. B **admet une homotopie compacte** *s'il existe des opérateurs compacts $T, S : B \to B$ tels que $1 - S = dT + Td$.*

Exemple. Le complexe L^p, $1 \leq p \leq \infty$, d'une variété riemannienne compacte admet une homotopie compacte.

Proposition

Si B admet une homotopie compacte, alors ses valeurs singulières forment une suite tendant vers $+\infty$.

Définition

Soit B un complexe de chaînes borné. B **admet une homotopie compacte** *s'il existe des opérateurs compacts $T, S : B \to B$ tels que $1 - S = dT + Td$.*

Exemple. Le complexe L^p, $1 \leq p \leq \infty$, d'une variété riemannienne compacte admet une homotopie compacte.

Proposition

Si B admet une homotopie compacte, alors ses valeurs singulières forment une suite tendant vers $+\infty$.

Remarque. Pour approcher B par des complexes de chaînes de dimension finie, il ne suffit pas d'approcher S par un opérateur de rang fini, il faut aussi que $|T|$ soit petit.

Définition

Soit B un complexe de chaînes borné. B **admet de petites homotopies** *si $\forall \epsilon > 0$, il existe des opérateurs compacts $T, S : B \to B$ tels que $1 - S = dT + Td$ et $|T| < \epsilon$.*

Définition

Soit B un complexe de chaînes borné. B **admet une homotopie compacte** *s'il existe des opérateurs compacts $T, S : B \to B$ tels que $1 - S = dT + Td$.*

Exemple. Le complexe L^p, $1 \leq p \leq \infty$, d'une variété riemannienne compacte admet une homotopie compacte.

Proposition

Si B admet une homotopie compacte, alors ses valeurs singulières forment une suite tendant vers $+\infty$.

Remarque. Pour approcher B par des complexes de chaînes de dimension finie, il ne suffit pas d'approcher S par un opérateur de rang fini, il faut aussi que $|T|$ soit petit.

Définition

Soit B un complexe de chaînes borné. B **admet de petites homotopies** *si $\forall \epsilon > 0$, il existe des opérateurs compacts $T, S : B \to B$ tels que $1 - S = dT + Td$ et $|T| < \epsilon$.*

Théorème

Le complexe L^p, $1 \leq p \leq \infty$, d'une variété riemannienne compacte admet de petites homotopies.

Espace métrique	Complexe de chaînes normé
Borné	Homotope à un complexe nul
Précompact	Dans l'adhérence des complexes de dim. finie
Localement compact	????
Distance de Hausdorff-Gromov	Distance homotopique

Espace métrique	Complexe de chaînes normé
Borné	Homotope à un complexe nul
Précompact	Dans l'adhérence des complexes de dim. finie
Localement compact	????
Distance de Hausdorff-Gromov	Distance homotopique

Question. Qu'est-ce qui correspond à la compacité locale ? à la topologie de Hausdorff-Gromov pointée ?

Espace métrique	Complexe de chaînes normé
Borné	Homotope à un complexe nul
Précompact	Dans l'adhérence des complexes de dim. finie
Localement compact	????
Distance de Hausdorff-Gromov	Distance homotopique

Question. Qu'est-ce qui correspond à la compacité locale ? à la topologie de Hausdorff-Gromov pointée ?

Exemple. Complexes de chaînes filtrés ? Filtrer le complexe des formes L^2 sur $\mathbb{R}$ par les sous-complexes des formes à support dans de grand intervalles ?

Espace métrique	Complexe de chaînes normé
Borné	Homotope à un complexe nul
Précompact	Dans l'adhérence des complexes de dim. finie
Localement compact	????
Distance de Hausdorff-Gromov	Distance homotopique

Question. Qu'est-ce qui correspond à la compacité locale ? à la topologie de Hausdorff-Gromov pointée ?

Exemple. Complexes de chaînes filtrés ? Filtrer le complexe des formes L^2 sur $\mathbb{R}$ par les sous-complexes des formes à support dans de grand intervalles ?

Moralité. La géométrie dérivée des espaces normés (i.e. géométrie des complexes de chaînes normés) est une variante de la géométrie des Banach, qui reste à développer.