

Isopérimétrie, trou spectral et analyse topologique des données

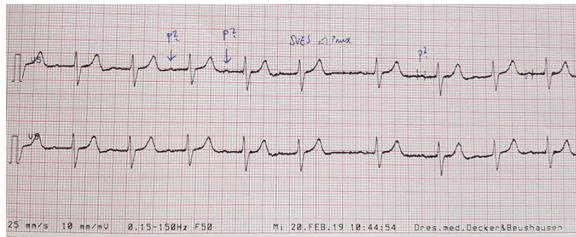
Pierre Pansu, Université Paris-Saclay

6 décembre 2022

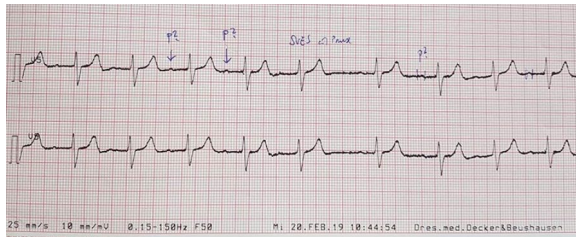
Étudier des images de roches poreuses pour décider si la roche est perméable ou non, c'est répondre à une question de topologie.



Dans un électrocardiogramme, ce qui compte, c'est les pics (nombre, hauteur approximative), pas leur localisation temporelle exacte. C'est le paysage de Morse, à reparamétrage près, i.e. avant tout une information topologique.



Dans un électrocardiogramme, ce qui compte, c'est les pics (nombre, hauteur approximative), pas leur localisation temporelle exacte. C'est le paysage de Morse, à reparamétrage près, i.e. avant tout une information topologique.



Version multidimensionnelle : classification guidée par la densité (F. Chazal, L. Guibas, S. Oudot, P. Skrabas)

Donnée : un espace métrique fini.

Première étape. On calcule une densité locale. L'algorithme divise d'abord l'espace en amas qui sont les bassins d'attraction du gradient de la densité. Il y en trop : autant que de maxima locaux.

Deuxième étape. L'algorithme fusionne les amas qui correspondent à des maxima non suffisamment accusés.

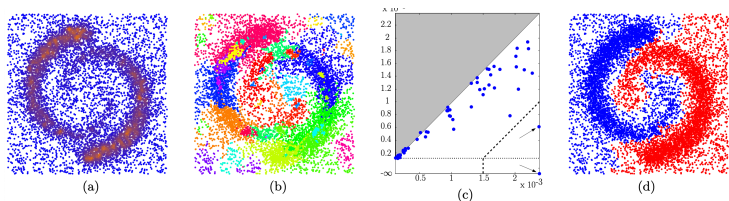


Figure 2: Our approach in a nutshell: (a) estimation of the underlying density function f at the data points; (b) result of the basic graph-based hill-climbing step; (c) approximate PD showing 2 points far off the diagonal corresponding to the 2 prominent peaks of f ; (d) final result obtained after merging the clusters of non-prominent peaks.

La méthode a donné d'excellents résultats sur des données de cytologie (classification de cellules à partir de photos).

Plus généralement, dès que les données sont plus que de simples images (i.e. des fonctions sur un espace), ou des matrices de même taille, un descripteur topologique a l'avantage d'être indépendant de choix arbitraires.

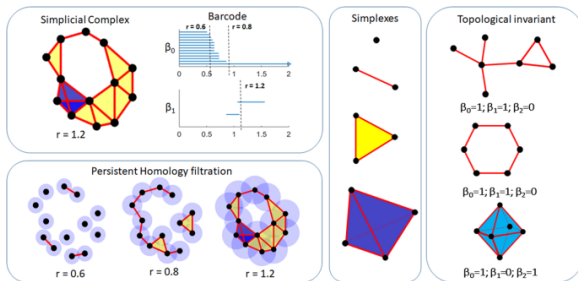
Plus généralement, dès que les données sont plus que de simples images (i.e. des fonctions sur un espace), ou des matrices de même taille, un descripteur topologique a l'avantage d'être indépendant de choix arbitraires.

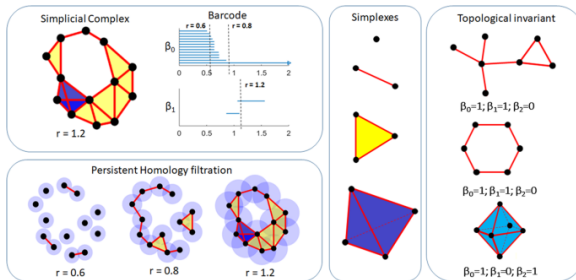
Souvent, les données se présentent comme un nuage fini de points dans \mathbb{R}^N .
Comment parler de la topologie d'un nuage ?

Plus généralement, dès que les données sont plus que de simples images (i.e. des fonctions sur un espace), ou des matrices de même taille, un descripteur topologique a l'avantage d'être indépendant de choix arbitraires.

Souvent, les données se présentent comme un nuage fini de points dans \mathbb{R}^N .
Comment parler de la topologie d'un nuage ?

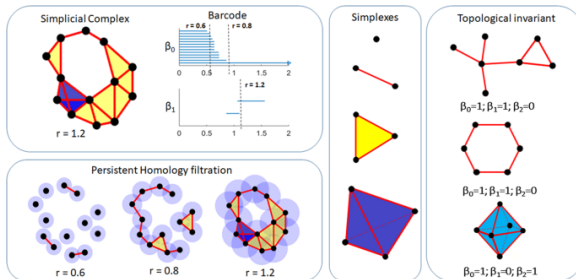
On lui associe une famille croissante de polyèdres simpliciaux : N_r est le nerf du recouvrement par des boules de rayon r .





Il n'y a pas a priori de choix naturel pour r .

On calcule l'homologie à coefficients dans \mathbb{F}_2 , $H_k(N_r, \mathbb{F}_2)$, pour chaque r .

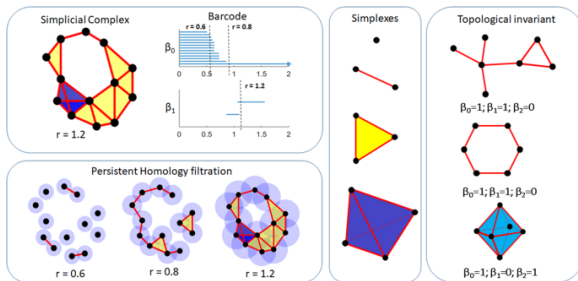


Il n'y a pas a priori de choix naturel pour r .

On calcule l'homologie à coefficients dans \mathbb{F}_2 , $H_k(N_r, \mathbb{F}_2)$, pour chaque r .

Inconvénient. $H_k(N_r, \mathbb{F}_2)$ est très instable.

Comment en extraire une information stable ?



Il n'y a pas a priori de choix naturel pour r .

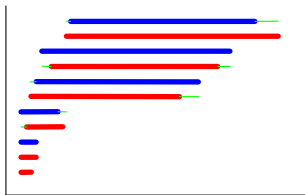
On calcule l'homologie à coefficients dans \mathbb{F}_2 , $H_k(N_r, \mathbb{F}_2)$, pour chaque r .

On sait détecter quand une classe d'homologie naît (elle n'appartient pas à $im(H_k(N_{r-\epsilon}, \mathbb{F}_2) \rightarrow H_k(N_r, \mathbb{F}_2)) \forall \epsilon$) et quand elle meurt, d'où une collection d'intervalles $[r, s]$, le *code-barre*.

Idée : les grandes barres sont robustes (stables par perturbation du nuage en distance de Hausdorff), les petites sont du bruit.

Idée : les grandes barres sont robustes (stables par perturbation du nuage en distance de Hausdorff), les petites sont du bruit.

La *distance bottleneck* entre deux codes-barres s'obtient en appariant les barres au mieux, quitte à jeter les barres trop courtes.



Théorème (de stabilité)

$$\text{dist. bottleneck}(\text{codes-barres}) \leq \text{dist. Hausdorff}(\text{nuages}).$$

En analyse numérique, la robustesse est obtenue par un autre moyen.

En analyse numérique, la robustesse est obtenue par un autre moyen.

Si $F : B \rightarrow B'$ est un opérateur inversible entre espaces normés, son *conditionnement* est

$$\kappa(F) = \|F\| \|F^{-1}\|.$$

En analyse numérique, la robustesse est obtenue par un autre moyen.

Si $F : B \rightarrow B'$ est un opérateur inversible entre espaces normés, son *conditionnement* est

$$\kappa(F) = \|F\| \|F^{-1}\|.$$

Le conditionnement assure la stabilité de la résolution de l'équation $F(x) = b$.

En analyse numérique, la robustesse est obtenue par un autre moyen.

Si $F : B \rightarrow B'$ est un opérateur inversible entre espaces normés, son *conditionnement* est

$$\kappa(F) = |F| |F^{-1}|.$$

Le conditionnement assure la stabilité de la résolution de l'équation $F(x) = b$.

Si on change b en $b' = b + \Delta b$, la solution change en $x' = x + \Delta x$, telle que

$$\frac{|\Delta x|}{|x|} \leq \kappa(F) \frac{|\Delta b|}{|b|}.$$

Si on change F en $F' = F + \Delta F$, la solution change en $x' = x + \Delta x$, telle que

$$\frac{|\Delta x|}{|x'|} \leq \kappa(F) \frac{|\Delta F|}{|F|}.$$

En analyse numérique, la robustesse est obtenue par un autre moyen.

Si $F : B \rightarrow B'$ est un opérateur inversible entre espaces normés, son *conditionnement* est

$$\kappa(F) = |F| |F^{-1}|.$$

Le conditionnement assure la stabilité de la résolution de l'équation $F(x) = b$.

Si on change b en $b' = b + \Delta b$, la solution change en $x' = x + \Delta x$, telle que

$$\frac{|\Delta x|}{|x|} \leq \kappa(F) \frac{|\Delta b|}{|b|}.$$

Si on change F en $F' = F + \Delta F$, la solution change en $x' = x + \Delta x$, telle que

$$\frac{|\Delta x|}{|x'|} \leq \kappa(F) \frac{|\Delta F|}{|F|}.$$

Lorsque $d : B \rightarrow B$ est un complexe (i.e. $d \circ d = 0$), on s'intéresse au conditionnement de $\bar{d} : B/\text{Ker}(d) \rightarrow \text{Im}(d)$. En dimension infinie, il peut être infini.

X complexe simplicial, $\mathbf{k} = \mathbb{F}_2$ ou \mathbb{R} . Une k -cochaîne est une fonction antisymétrique à valeurs dans \mathbf{k} sur l'ensemble des k -simplexes. Son cobord df is $df(\sigma) = f(\partial\sigma)$.

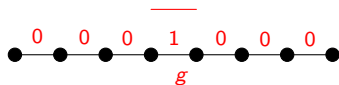
Une valeur absolue sur \mathbf{k} donne des normes ℓ^p sur les cochaînes : on tire les simplexes uniformément au hasard, et on pose $\|f\|_p = \mathbb{E}(|f|^p)^{1/p}$.

X complexe simplicial, $\mathbf{k} = \mathbb{F}_2$ ou \mathbb{R} . Une k -cochaîne est une fonction antisymétrique à valeurs dans \mathbf{k} sur l'ensemble des k -simplexes. Son cobord df is $df(\sigma) = f(\partial\sigma)$.

Une valeur absolue sur \mathbf{k} donne des normes ℓ^p sur les cochaînes : on tire les simplexes uniformément au hasard, et on pose $\|f\|_p = \mathbb{E}(|f|^p)^{1/p}$.

Exemple. Le graphe rectiligne de longueur n satisfait $H^1 = 0$. La 1-cochaîne g égale à $\bar{1}$ sur l'arête centrale et 0 ailleurs s'écrit df où

$$\|g\|_p = \frac{1}{n^{1/p}}, \quad \|f\|_p \sim 1.$$

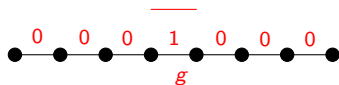


X complexe simplicial, $\mathbf{k} = \mathbb{F}_2$ ou \mathbb{R} . Une k -cochaîne est une fonction antisymétrique à valeurs dans \mathbf{k} sur l'ensemble des k -simplexes. Son cobord df is $df(\sigma) = f(\partial\sigma)$.

Une valeur absolue sur \mathbf{k} donne des normes ℓ^p sur les cochaînes : on tire les simplexes uniformément au hasard, et on pose $\|f\|_p = \mathbb{E}(|f|^p)^{1/p}$.

Exemple. Le graphe rectiligne de longueur n satisfait $H^1 = 0$. La 1-cochaîne g égale à $\bar{1}$ sur l'arête centrale et 0 ailleurs s'écrit df où

$$\|g\|_p = \frac{1}{n^{1/p}}, \quad \|f\|_p \sim 1.$$



Quand n est grand, résoudre $df = g$ est instable. Le calcul de l'homologie en degré 0 est mal conditionné.

Définition

Le conditionnement en dimension k est $\kappa_k(X, p, \mathbf{k}) = |\bar{d}||\bar{d}^{-1}|$ où $\bar{d} : C^k(X, \mathbf{k})/\text{Ker}(d) \rightarrow dC^k(X, \mathbf{k})$. (Il dépend de k , de p et de \mathbf{k}).

Fait (Gromov-Shubin)

D'une certaine façon, comme la cohomologie, l'ordre de grandeur du conditionnement est un invariant topologique (et même homotopique) des complexes simpliciaux. Pour les complexes simpliciaux non compacts, à géométrie bornée, le fait qu'il soit fini ou non est un invariant de quasiisométrie.

Fait (Gromov-Shubin)

D'une certaine façon, comme la cohomologie, l'ordre de grandeur du conditionnement est un invariant topologique (et même homotopique) des complexes simpliciaux. Pour les complexes simpliciaux non compacts, à géométrie bornée, le fait qu'il soit fini ou non est un invariant de quasiisométrie.

À retenir : la cohomologie n'est pas la seule information intéressante qu'on puisse extraire d'un complexe de chaînes normé. Le conditionnement l'est aussi.

Fait (Gromov-Shubin)

D'une certaine façon, comme la cohomologie, l'ordre de grandeur du conditionnement est un invariant topologique (et même homotopique) des complexes simpliciaux. Pour les complexes simpliciaux non compacts, à géométrie bornée, le fait qu'il soit fini ou non est un invariant de quasiisométrie.

À retenir : la cohomologie n'est pas la seule information intéressante qu'on puisse extraire d'un complexe de chaînes normé. Le conditionnement l'est aussi.

Plan de l'exposé

- 1 Relier les divers conditionnements ℓ^p à l'isopérimétrie et à l'expansion.
- 2 Ébaucher une étude géométrique des complexes de chaînes, en lien avec le conditionnement.

Définition

La **constante de Cheeger** $h(X)$ d'un graphe X est le plus grand h tel que pour tout ensemble A de sommets tel que $|A| \leq \frac{1}{2}|X|$,

$$|\partial A| \geq h|A|.$$

Ici, ∂A est l'ensemble des arêtes reliant A à son complémentaire.

Définition

La **constante de Cheeger** $h(X)$ d'un graphe X est le plus grand h tel que pour tout ensemble A de sommets tel que $|A| \leq \frac{1}{2}|X|$,

$$|\partial A| \geq h|A|.$$

Ici, ∂A est l'ensemble des arêtes reliant A à son complémentaire.

Proposition

$$h(X) = \frac{2}{\kappa_0(X, \mathbf{1}, \mathbb{F}_2)} = 2(\|d\|_{1 \rightarrow 1} \|d^{-1}\|_{1 \rightarrow 1})^{-1} \text{ sur } \mathbb{F}_2.$$

► Démonstration

Définition

La **constante de Cheeger** $h(X)$ d'un graphe X est le plus grand h tel que pour tout ensemble A de sommets tel que $|A| \leq \frac{1}{2}|X|$,

$$|\partial A| \geq h|A|.$$

Ici, ∂A est l'ensemble des arêtes reliant A à son complémentaire.

Proposition

$$h(X) = \frac{2}{\kappa_0(X, \mathbf{1}, \mathbb{F}_2)} = 2(\|d\|_{1 \rightarrow 1} \|d^{-1}\|_{1 \rightarrow 1})^{-1} \text{ sur } \mathbb{F}_2.$$

► Démonstration

Exemple (de graphe de grande constante de Cheeger)

Pour le graphe complet K_n à n sommets, $h(K_n) = \frac{n}{n-1}$ (n pair) ou $\frac{n+1}{n-1}$ (n impair).

► Démonstration

Proposition

Soit Δ l'opérateur auto-adjoint correspondant à la forme quadratique $f \mapsto \|df\|_2^2 = \langle f, \Delta f \rangle$. Soient $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ ses valeurs propres. Si X est connexe, alors $\lambda_1 = 0$ et

$$\lambda_2 = (\|d^{-1}\|_{2 \rightarrow 2})^{-2}.$$

► Démonstration

Proposition

Soit Δ l'opérateur auto-adjoint correspondant à la forme quadratique $f \mapsto \|df\|_2^2 = \langle f, \Delta f \rangle$. Soient $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ ses valeurs propres. Si X est connexe, alors $\lambda_1 = 0$ et

$$\lambda_2 = (\|d^{-1}\|_{2 \rightarrow 2})^{-2}.$$

► Démonstration

Définition

Désormais, on part d'une distribution de probabilité \mathbb{P}_1 sur les arêtes, et on définit la distribution \mathbb{P}_0 sur les sommets comme suit : on tire une arête selon \mathbb{P}_1 et on tire un de ses sommets au hasard. On l'appelle la **distribution de Garland** engendrée par \mathbb{P}_1 .

Si \mathbb{P}_1 est uniforme, cela donne à chaque sommet un poids proportionnel à son degré.

Proposition

Soit Δ l'opérateur auto-adjoint correspondant à la forme quadratique $f \mapsto \|df\|_2^2 = \langle f, \Delta f \rangle$. Soient $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ ses valeurs propres. Si X est connexe, alors $\lambda_1 = 0$ et

$$\lambda_2 = (\|d^{-1}\|_{2 \rightarrow 2})^{-2}.$$

► Démonstration

Définition

Désormais, on part d'une distribution de probabilité \mathbb{P}_1 sur les arêtes, et on définit la distribution \mathbb{P}_0 sur les sommets comme suit : on tire une arête selon \mathbb{P}_1 et on tire un de ses sommets au hasard. On l'appelle la **distribution de Garland** engendrée par \mathbb{P}_1 .

Si \mathbb{P}_1 est uniforme, cela donne à chaque sommet un poids proportionnel à son degré.

En utilisant \mathbb{P}_1 et \mathbb{P}_0 , on définit des normes ℓ^p sur les 0- et 1-cochaînes, et donc des conditionnements $\kappa_0(\mathbb{P}, p, \mathbf{k}) = \|d\|_{p \rightarrow p} \|d^{-1}\|_{p \rightarrow p}$ sur \mathbf{k} .

Proposition

Soit Δ l'opérateur auto-adjoint correspondant à la forme quadratique $f \mapsto \|df\|_2^2 = \langle f, \Delta f \rangle$. Soient $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ ses valeurs propres. Si X est connexe, alors $\lambda_1 = 0$ et

$$\lambda_2 = (\|d^{-1}\|_{2 \rightarrow 2})^{-2}.$$

► Démonstration

Définition

Désormais, on part d'une distribution de probabilité \mathbb{P}_1 sur les arêtes, et on définit la distribution \mathbb{P}_0 sur les sommets comme suit : on tire une arête selon \mathbb{P}_1 et on tire un de ses sommets au hasard. On l'appelle la **distribution de Garland** engendrée par \mathbb{P}_1 .

Si \mathbb{P}_1 est uniforme, cela donne à chaque sommet un poids proportionnel à son degré.

En utilisant \mathbb{P}_1 et \mathbb{P}_0 , on définit des normes ℓ^p sur les 0- et 1-cochaînes, et donc des conditionnements $\kappa_0(\mathbb{P}, p, \mathbf{k}) = \|d\|_{p \rightarrow p} \|d^{-1}\|_{p \rightarrow p}$ sur \mathbf{k} .

Alors, pour tout $p \geq 1$, $2^{1/p} \leq \|d\|_{p \rightarrow p} \leq 2$. En particulier,

$$2\lambda_{2, \mathbb{P}}^{-1} \leq \kappa_0(X, 2, \mathbb{R})^2 \leq 4\lambda_{2, \mathbb{P}}^{-1}.$$

Théorème (Cheeger, Buser, Dodziuk, Alon-Milman)

Pour un graphe fini connexe muni d'une distribution de Garland \mathbb{P} ,

$$\frac{1}{2} \lambda_{2, \mathbb{P}} \leq h_{\mathbb{P}} \leq 2 \sqrt{\lambda_{2, \mathbb{P}}}.$$

► Démonstration

Théorème (Cheeger, Buser, Dodziuk, Alon-Milman)

Pour un graphe fini connexe muni d'une distribution de Garland \mathbb{P} ,

$$\frac{1}{2} \lambda_{2, \mathbb{P}} \leq h_{\mathbb{P}} \leq 2 \sqrt{\lambda_{2, \mathbb{P}}}.$$

► Démonstration

Cet encadrement du conditionnement se généralise à toutes les valeurs de $p > 1$.

Proposition

Pour un graphe fini connexe muni d'une distribution de Garland \mathbb{P} ,

$$\min\left\{\frac{1}{p}, 2^{1-p}\right\} \kappa_0(\mathbb{P}, p, \mathbb{R}) \leq \kappa_0(\mathbb{P}, 1, \mathbb{F}_2) \leq 2^{p-(1/p)} \kappa_0(\mathbb{P}, p, \mathbb{R})^p.$$

Moralité. Le phénomène important (κ_0 borné) est finalement indépendant de p et du corps \mathbf{k} . Ce n'est malheureusement pas vrai en dimensions supérieures. Cela rend la construction d'expandeurs de dimension supérieure ($\kappa_k(\mathbb{P}, 1, \mathbb{F}_2)$ bornés pour $k = 1, 2, \dots$) plus difficile que celle de graphes expandeurs.

Question. Peut-on interpréter le conditionnement $\kappa = |\bar{d}||\bar{d}^{-1}|$ comme la distance entre certains complexes de chaînes ?

Question. Peut-on interpréter le conditionnement $\kappa = |\bar{d}||\bar{d}^{-1}|$ comme la distance entre certains complexes de chaînes ?

Un *complexe normé* est la donnée d'un espace vectoriel normé B et d'un opérateur $d : B \rightarrow B$ tel que $d \circ d = 0$. Un *isomorphisme* de complexes normés $B_1 \xrightarrow{d_1} B_1$ and $B_2 \xrightarrow{d_2} B_2$ est une bijection linéaire $F : B_1 \rightarrow B_2$ telle que $d_2 f_1 = f_1 d_1$ and F, F^{-1} sont bornés. Un *isométrie* de complexes normés est un isomorphisme isométrique.

Question. Peut-on interpréter le conditionnement $\kappa = |\bar{d}||\bar{d}^{-1}|$ comme la distance entre certains complexes de chaînes ?

Un *complexe normé* est la donnée d'un espace vectoriel normé B et d'un opérateur $d : B \rightarrow B$ tel que $d \circ d = 0$. Un *isomorphisme* de complexes normés $B_1 \xrightarrow{d_1} B_1$ and $B_2 \xrightarrow{d_2} B_2$ est une bijection linéaire $F : B_1 \rightarrow B_2$ telle que $d_2 f_1 = f_1 d_1$ and F, F^{-1} sont bornés. Un *isométrie* de complexes normés est un isomorphisme isométrique.

Pour définir une distance entre complexes de chaînes normés, la première idée est de mesurer les conditionnements des isomorphismes.

Définition

Soient $B_1 \xrightarrow{d_1} B_1$ et $B_2 \xrightarrow{d_2} B_2$ deux complexes normés. La **distance de Banach-Mazur** $\text{BMDist}(B_1, B_2)$ est l'inf des $\log(|F||F^{-1}|)$ sur tous les isomorphismes $F : B_1 \rightarrow B_2$.

Question. Peut-on interpréter le conditionnement $\kappa = |\bar{d}||\bar{d}^{-1}|$ comme la distance entre certains complexes de chaînes ?

Un *complexe normé* est la donnée d'un espace vectoriel normé B et d'un opérateur $d : B \rightarrow B$ tel que $d \circ d = 0$. Un *isomorphisme* de complexes normés $B_1 \xrightarrow{d_1} B_1$ and $B_2 \xrightarrow{d_2} B_2$ est une bijection linéaire $F : B_1 \rightarrow B_2$ telle que $d_2 f_1 = f_1 d_1$ and F, F^{-1} sont bornés. Un *isométrie* de complexes normés est un isomorphisme isométrique.

Pour définir une distance entre complexes de chaînes normés, la première idée est de mesurer les conditionnements des isomorphismes.

Définition

Soient $B_1 \xrightarrow{d_1} B_1$ et $B_2 \xrightarrow{d_2} B_2$ deux complexes normés. La **distance de Banach-Mazur** $\text{BMDist}(B_1, B_2)$ est l'inf des $\log(|F||F^{-1}|)$ sur tous les isomorphismes $F : B_1 \rightarrow B_2$.

C'est trop restrictif : ne permet pas de comparer les complexes ℓ^p d'une variété riemannienne et d'un complexe simplicial, par exemple.

La seconde idée est de mesurer la taille des homotopies.

Définition

Soient $B_1 \xrightarrow{d_1} B_1$ et $B_2 \xrightarrow{d_2} B_2$ deux complexes normés. On considère toutes les homotopies bornées, i.e.

- des morphismes bornés $F_1 : B_1 \rightarrow B_2$ et $F_2 : B_2 \rightarrow B_1$ tels que

$$d_2 F_1 = F_1 d_1, \quad d_1 F_2 = F_2 d_2,$$

- des opérateurs bornés $Q_1 : B_1 \rightarrow B_1$ and $Q_2 : B_2 \rightarrow B_2$ tels que

$$1 - F_2 F_1 = d_1 Q_1 + Q_1 d_1, \quad 1 - F_1 F_2 = d_2 Q_2 + Q_2 d_2.$$

On note $q = \max\{|Q_1|, |Q_2|\}$, $f = \max\{1, |F_1||F_2|\}$. La **distance homotopique**

$\text{HomDist}(B_1, B_2)$ est l'inf sur toutes les homotopies de $\min\left\{\frac{q}{f} + \log f, \frac{f}{q} + \log q\right\}$.

La seconde idée est de mesurer la taille des homotopies.

Définition

Soient $B_1 \xrightarrow{d_1} B_1$ et $B_2 \xrightarrow{d_2} B_2$ deux complexes normés. On considère toutes les homotopies bornées, i.e.

- des morphismes bornés $F_1 : B_1 \rightarrow B_2$ et $F_2 : B_2 \rightarrow B_1$ tels que

$$d_2 F_1 = F_1 d_1, \quad d_1 F_2 = F_2 d_2,$$

- des opérateurs bornés $Q_1 : B_1 \rightarrow B_1$ and $Q_2 : B_2 \rightarrow B_2$ tels que

$$1 - F_2 F_1 = d_1 Q_1 + Q_1 d_1, \quad 1 - F_1 F_2 = d_2 Q_2 + Q_2 d_2.$$

On note $q = \max\{|Q_1|, |Q_2|\}$, $f = \max\{1, |F_1||F_2|\}$. La **distance homotopique**

$\text{HomDist}(B_1, B_2)$ est l'inf sur toutes les homotopies de $\min\left\{\frac{q}{f} + \log f, \frac{f}{q} + \log q\right\}$.

L'expression bizarre est là pour garantir l'inégalité triangulaire.

▶ Détails

En dimension finie,

$$\text{HomDist}(B_1, B_2) < \infty \iff \dim(H(B_1)) = \dim(H(B_2)),$$

$$\text{HomDist}(B_1, B_2) = 0 \iff (B_1, d_1) \text{ et } (B_2, d_2) \text{ sont isométriques.}$$

Donc on obtient une distance sur l'ensemble des classes d'isométrie de complexes normés de dimension finie, de même homologie.

En dimension finie,

$$\text{HomDist}(B_1, B_2) < \infty \iff \dim(H(B_1)) = \dim(H(B_2)),$$

$$\text{HomDist}(B_1, B_2) = 0 \iff (B_1, d_1) \text{ et } (B_2, d_2) \text{ sont isométriques.}$$

Donc on obtient une distance sur l'ensemble des classes d'isométrie de complexes normés de dimension finie, de même homologie.

Proposition

Le conditionnement $\kappa(B, d) = |\bar{d}| |\bar{d}^{-1}|$ est un covariant d'homotopie : si deux complexes B_1 et B_2 sont homotopes, et $|d_1| = |d_2| = r$, alors

$$\kappa(B_1) \leq \exp(\text{HomDist}(B_1, B_2))(r + \kappa(B_2)).$$

► Détails

Une distance inspirée de la distance de Hausdorff-Gromov entre espaces métriques.

Définition

Soit $r > 0$. Soit $B \xrightarrow{d} B$ un complexe normé tel que $|d| \leq r$, soient B' et B'' des sous-complexes de B . On considère tous les morphismes bornés $F : B' \rightarrow B$ tels que $F(B') \subset B''$ et les opérateurs bornés $Q : B' \rightarrow B$ tels que, sur B' , $1 - F = dQ + Qd$. On prend l'inf de $\log(1 + 2r|Q|)$. Ceci définit la distance de Hausdorff relative asymétrique $\text{HausDist}_{B,r}(B' \rightarrow B'')$. On la rend symétrique en posant

$$\text{HausDist}_{B,r}(B', B'') = \text{HausDist}_{B,r}(B' \rightarrow B'') + \text{HausDist}_{B,r}(B'' \rightarrow B').$$

Soient $B_1 \xrightarrow{d_1} B_1$ et $B_2 \xrightarrow{d_2} B_2$ deux complexes normés. On considère tous les complexes normés $B \xrightarrow{d} B$ tels que $|d| \leq r$, contenant des sous-complexes B' et B'' isométriques à B_1 et B_2 respectivement, et on prend l'inf de toutes les distances de Hausdorff relatives $\text{HausDist}_{B,r}(B', B'')$. Cela définit la **distance de Hausdorff absolue** $\text{HausDist}_r(B_1, B_2)$.

Cette distance satisfait à l'inégalité triangulaire.

[Détails](#)

Définition

On note $Null$ l'ensemble des complexes normés dont la différentielle est nulle.

Théorème

Si B est un espace de Hilbert, $HausDist(B, Null) = \log(1 + 2\kappa(B))$.

[▶ Détails](#)

Définition

On note $Null$ l'ensemble des complexes normés dont la différentielle est nulle.

Théorème

Si B est un espace de Hilbert, $HausDist(B, Null) = \log(1 + 2\kappa(B))$. [▶ Détails](#)

Ça s'applique aux cochaînes sur les graphes : le trou spectral mesure la distance de Hausdorff aux complexes dont la différentielle est nulle.

Sur \mathbb{F}_2 , ça se passe moins bien.

Exemple

Soit K_3 le graphe complet à 3 sommets. Alors

$$HausDist(C^0(K_3, \mathbb{F}_2, 1), Null) = \log 5, \quad \kappa(K_3, \mathbb{F}_2, 1) = 1.$$

[▶ Détails](#)