Géométrie conforme à grande échelle

Pierre Pansu

8 février 2018

1569 : Gerard de Kremer (dit *Mercator*) invente le planisphère qui porte son nom.

1569 : Gerard de Kremer (dit *Mercator*) invente le planisphère qui porte son nom.

La carte de Mercator est *conforme* : les angles entre courbes sont préservés.

Elle introduit une distorsion métrique qui tend vers l'infini aux pôles.

Théorème (Lemme de Schwarz)

Soit $D \subset \mathbb{C}$ le disque unité. Soit $f : D \to D$ une fonction holomorphe telle que $f(0) = 0$. Alors $|f'(0)| \leq 1$.

Théorème (Lemme de Schwarz)

Soit $D \subset \mathbb{C}$ le disque unité. Soit $f : D \to D$ une fonction holomorphe telle que $f(0) = 0$. Alors $|f'(0)| \leq 1$.

Corollaire (Lemme de Schwarz-Pick)

Soit $f : D \to D$ une fonction holomorphe. Alors f est 1-lipschitzienne pour la métrique hyperbolique.

Théorème (Lemme de Schwarz)

Soit $D \subset \mathbb{C}$ le disque unité. Soit $f : D \to D$ une fonction holomorphe telle que $f(0) = 0$. Alors $|f'(0)| \leq 1$.

Corollaire (Lemme de Schwarz-Pick)

Soit $f : D \to D$ une fonction holomorphe. Alors f est 1-lipschitzienne pour la métrique hyperbolique.

Corollaire (Liouville)

Soit $f : \mathbb{C} \to D$ une fonction holomorphe. Alors f est constante.

Théorème (Lemme de Schwarz)

Soit $D \subset \mathbb{C}$ le disque unité. Soit $f : D \to D$ une fonction holomorphe telle que $f(0) = 0$. Alors $|f'(0)| \leq 1$.

Corollaire (Lemme de Schwarz-Pick)

Soit $f : D \to D$ une fonction holomorphe. Alors f est 1-lipschitzienne pour la métrique hyperbolique.

Corollaire (Liouville)

Soit $f : \mathbb{C} \to D$ une fonction holomorphe. Alors f est constante.

Corollaire (Picard)

Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{a, b\}$ une fonction holomorphe. Alors f est constante.

En dimensions supérieures,

Définition

Un difféomorphisme entre variétés riemanniennes est conforme si sa différentielle envoie sphères (infinitésimales) sur sphères.

En dimensions supérieures,

Définition

Un difféomorphisme entre variétés riemanniennes est conforme si sa différentielle envoie sphères (infinitésimales) sur sphères.

Exemples

1. L'espace euclidien est conforme à la sphère privée d'un point.
2. L'espace hyperbolique est conforme à une boule de l'espace euclidien.
3. Une boule de l'espace euclidien n'est pas conforme à l'espace euclidien.

En dimensions supérieures,

Définition

Un difféomorphisme entre variétés riemanniennes est conforme si sa différentielle envoie sphères (infinitésimales) sur sphères.

Exemples

1. L'espace euclidien est conforme à la sphère privée d'un point.
2. L'espace hyperbolique est conforme à une boule de l'espace euclidien.
3. Une boule de l'espace euclidien n'est pas conforme à l'espace euclidien.

Décevant : rareté des difféomorphismes conformes.
En dimension $n \geq 3$ tout difféomorphisme conforme entre ouverts de $\mathbb{R}^n$ est la restriction d'un difféomorphisme conforme global de la sphère S^n, i.e. un élément du groupe de Möbius $O(n+1,1)$.

Définition

Un difféomorphisme entre variétés riemanniennes est quasi-conforme si sa différentielle envoie sphères (infinitésimales) sur ellipsoïdes d'excentricité bornée.

Exemple

$z \mapsto z|z|^{K-1}$ *est quasi-conforme* $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Définition

Un difféomorphisme entre variétés riemanniennes est quasi-conforme si sa différentielle envoie sphères (infinitésimales) sur ellipsoïdes d'excentricité bornée.

Exemple

$z \mapsto z|z|^{K-1}$ *est quasi-conforme* $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Théorème (H. Grötsch 1928)

Une boule de l'espace euclidien n'est pas quasi-conforme à l'espace euclidien.

Définition

Un difféomorphisme entre variétés riemanniennes est quasi-conforme si sa différentielle envoie sphères (infinitésimales) sur ellipsoïdes d'excentricité bornée.

Exemple

$z \mapsto z|z|^{K-1}$ *est quasi-conforme* $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Théorème (H. Grötsch 1928)

Une boule de l'espace euclidien n'est pas quasi-conforme à l'espace euclidien.

Preuve : quasi-Lemme de Schwartz. Un difféomorphisme quasi-conforme f de la boule satisfait

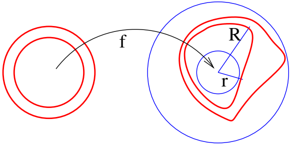
$$\frac{1}{L}d(x,x') - C \leq d(f(x),f(x')) \leq Ld(x,x') + C$$

pour la distance hyperbolique. C'est une *quasi-isométrie*, i.e. lipschitzienne à grande échelle.

Quasi-symétrique : homéomorphisme entre espaces métriques tel que

$$\forall x, \forall x', \forall x'', \quad \frac{d(f(x), f(x'))}{d(f(x), f(x''))} \leq \eta\left(\frac{d(x, x')}{d(x, x'')}\right),$$

où $\eta \in Homeo(\mathbb{R}_+)$.

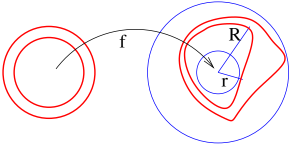


distorsion(f)=sup{R/r}

Quasi-symétrique : homéomorphisme entre espaces métriques tel que

$$\forall x,\ \forall x',\ \forall x'',\quad \frac{d(f(x),f(x'))}{d(f(x),f(x''))} \leq \eta\left(\frac{d(x,x')}{d(x,x'')}\right),$$

où $\eta \in Homeo(\mathbb{R}_+)$.

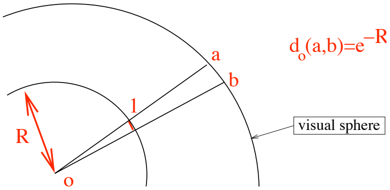


distorsion(f)=sup{R/r}

Théorème (H. Grötsch 1928)

Un homéomorphisme quasi-conforme de l'espace euclidien est quasi-symétrique.

Un groupe *hyperbolique* a un bord à l'infini ∂G, espace compact muni d'une famille de *distances visuelles*.

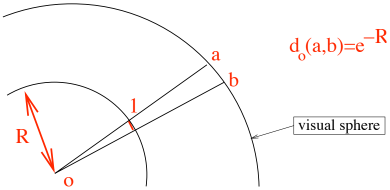


$$\text{quasi-isométries de } G \quad \Leftrightarrow \quad \text{homéomorphismes quasi-symétriques de } \partial G$$

De plus, les distances visuelles sont Ahlfors-régulières.

Espace métrique p-Ahlfors-régulier : s'il existe une mesure de probabilité μ telle que $\mu(B(x,R)) \simeq R^p$ pour $R < R_0$.

Un groupe *hyperbolique* a un bord à l'infini ∂G, espace compact muni d'une famille de *distances visuelles*.



$$\text{quasi-isométries de } G \quad \Leftrightarrow \quad \text{homéomorphismes quasi-symétriques de } \partial G$$

De plus, les distances visuelles sont Ahlfors-régulières.

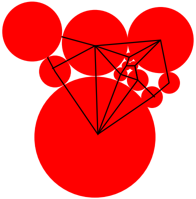
Espace métrique p-Ahlfors-régulier : s'il existe une mesure de probabilité μ telle que $\mu(B(x,R)) \simeq R^p$ pour $R < R_0$.

D'où la notion de *jauge quasi-symétrique* : classe d'équivalence des distances Ahlfors-régulières sur ∂G quasi-symétriques à une distance visuelle.

Cette "structure conforme microscopique" détermine la géométrie à grande échelle de G.

Empilement de boules : collections de boules d'intérieurs disjoints.

Graphe d'incidence : un sommet par boule, une arête lorsque 2 boules se touchent.

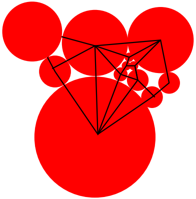


Définition

Un graphe est empilable dans $\mathbb{R}^d$ si c'est le graphe d'incidence d'un empilement de boules de $\mathbb{R}^d$.

Empilement de boules : collections de boules d'intérieurs disjoints.

Graphe d'incidence : un sommet par boule, une arête lorsque 2 boules se touchent.



Définition

Un graphe est empilable dans $\mathbb{R}^d$ si c'est le graphe d'incidence d'un empilement de boules de $\mathbb{R}^d$.

Théorème (Koebe 1931)

Un graphe est empilable dans $\mathbb{R}^2$ si et seulement si il est planaire (i.e. plongeable dans $\mathbb{R}^2$).

Interprétation : version mésoscopique du théorème de représentation conforme.

D'ailleurs,

- Il y a des algorithmes rapides de calcul de l'empilement de Koebe.
- Lorsqu'on applique le théorème au graphe d'incidence de l'empilement de disques de même rayon contenu dans un domaine plan, ça converge vers la représentation conforme de ce domaine quand le rayon tend vers 0.
- C'est un bon procédé algorithmique pour calculer une approximation de la représentation conforme.

Interprétation : version mésoscopique du théorème de représentation conforme.

D'ailleurs,

- Il y a des algorithmes rapides de calcul de l'empilement de Koebe.
- Lorsqu'on applique le théorème au graphe d'incidence de l'empilement de disques de même rayon contenu dans un domaine plan, ça converge vers la représentation conforme de ce domaine quand le rayon tend vers 0.
- C'est un bon procédé algorithmique pour calculer une approximation de la représentation conforme.

Théorème (Benjamini-Schramm 2013)

La grille de $\mathbb{R}^n$ n'est pas empilable dans $\mathbb{R}^d$ si $n > d$. Le graphe de Cayley d'un réseau cocompact de l'espace hyperbolique de dimension $n > d$ n'est pas empilable dans $\mathbb{R}^d$.

Dans la suite, on s'inspire de ce théorème (et sa preuve) pour introduire une notion de plongement conforme à grande échelle.

L'argument de Benjamini-Schramm. Soient M, N des variétés riemanniennes de dimension n, soit $f : M \to N$ quasiconforme.

1. f transporte les fonctions de n-énergie finie.
2. Si $L^n\bar{H}^1(M) = 0$, alors pour toute fonction u de n-énergie finie, il existe une constante vers laquelle u tend le long de presque toute courbe tendant vers l'infini.
3. Cas où $N = \mathbb{R}^n$. On compose avec la projection stéréographique, d'où $f : M \to S^n$. Les fonctions de n-énergie finie séparent les points de la sphère S^n, donc f a une limite $y \in S^n$.
4. Cas où $N = H^n$. On compose avec le modèle de Poincaré, d'où $f : M \to D^n$. Les fonctions de n-énergie finie séparent les points de la boule D^n, donc f a une limite $y \in \partial D^n$.
5. Dans les deux cas, il existe une fonction v de n-énergie finie sur N qui tend vers $+\infty$ en y. Alors $v \circ f$ tend vers $+\infty$, contradiction.

(N, ℓ, R, S)-*empilement* : dans un espace métrique, c'est une collection de boules B_j de rayons $R \leq r_j \leq S$ telle que les ℓB_j forment un recouvrement de multiplicité $< N$.

Définition

Une application f entre espaces métriques (doublée d'une correspondance $B \mapsto B'$ entre boules telle que $f(B) \subset B'$) est conforme à grande échelle si, pour tous $R \leq S$, $N \geq 1$ et $\ell' > 1$, il existe $N' \geq 1$ et $\ell \geq 1$ tels que f envoie (N, ℓ, R, S)-empilements sur $(N', \ell', 0, \infty)$-empilements.

(N, ℓ, R, S)-*empilement* : dans un espace métrique, c'est une collection de boules B_j de rayons $R \leq r_j \leq S$ telle que les ℓB_j forment un recouvrement de multiplicité $< N$.

Définition

Une application f entre espaces métriques (doublée d'une correspondance $B \mapsto B'$ entre boules telle que $f(B) \subset B'$) est conforme à grande échelle si, pour tous $R \leq S$, $N \geq 1$ et $\ell' > 1$, il existe $N' \geq 1$ et $\ell \geq 1$ tels que f envoie (N, ℓ, R, S)-empilements sur $(N', \ell', 0, \infty)$-empilements.

Inclut les plongements quasiisométriques. Classe stable par composition. Ne distingue pas un espace et un groupe qui agit dessus avec quotient compact.

(N, ℓ, R, S)-*empilement* : dans un espace métrique, c'est une collection de boules B_j de rayons $R \leq r_j \leq S$ telle que les ℓB_j forment un recouvrement de multiplicité $< N$.

Définition

Une application f entre espaces métriques (doublée d'une correspondance $B \mapsto B'$ entre boules telle que $f(B) \subset B'$) est conforme à grande échelle si, pour tous $R \leq S$, $N \geq 1$ et $\ell' > 1$, il existe $N' \geq 1$ et $\ell \geq 1$ tels que f envoie (N, ℓ, R, S)-empilements sur $(N', \ell', 0, \infty)$-empilements.

Inclut les plongements quasiisométriques. Classe stable par composition. Ne distingue pas un espace et un groupe qui agit dessus avec quotient compact.

Exemples

- Tout groupe nilpotent se plonge c.g.e. dans un $\mathbb{R}^N$ (Assouad).
- Tout groupe hyperbolique se plonge c.g.e. dans un H^N (Bonk-Schramm).
- $z \mapsto z|z|^{K-1}$ est c.g.e si $K \geq 1$.

Quel est le N optimal tel que

- le groupe d'Heisenberg se plonge c.g.e. dans $\mathbb{R}^N$?
- l'espace hyperbolique complexe $H^n_{\mathbb{C}}$ se plonge c.g.e. dans H^N ?

Quel est le N optimal tel que

- le groupe d'Heisenberg se plonge c.g.e. dans $\mathbb{R}^N$?
- l'espace hyperbolique complexe $H^n_{\mathbb{C}}$ se plonge c.g.e. dans H^N ?

Réponse partielle. Il est nécessaire qu'une sorte de dimension augmente. "Non-squeezing theorem".

Pour un groupe hyperbolique G, on définit

1. la *dimension cohomologique* $d_1(G)$ comme la borne inférieure des p tels que $L^pH^1(G) \neq 0$.
2. la *dimension conforme* $d_2(G)$ comme la borne inférieure des dimensions de Hausdorff des métriques Ahlfors-régulières dans la jauge quasi-symétrique du bord ∂G.

Pour les groupes nilpotents, il s'agit de l'exposant de croissance (polynômiale) du volume, $d_1(G) = d_2(G)$.

Théorème

Soient G, G' des groupes de Lie ou de type fini, nilpotents ou hyperboliques. On suppose qu'il existe un plongement conforme à grande échelle de G dans G'. Alors

$$d_1(G) \leq d_2(G').$$

Par exemple, pas de plongement conforme à grande échelle

- du groupe d'Heisenberg $\mathbb{H}^{2m-1}$ dans $\mathbb{R}^n$ pour $n < 2m$.
- de $H_{\mathbb{C}}^m$ dans $H_{\mathbb{R}}^n$ pour $n \leq 2m$.

Théorème

Soient G, G' des groupes de Lie ou de type fini, nilpotents ou hyperboliques. On suppose qu'il existe un plongement conforme à grande échelle de G dans G'. Alors

$$d_1(G) \leq d_2(G').$$

Par exemple, pas de plongement conforme à grande échelle

- du groupe d'Heisenberg $\mathbb{H}^{2m-1}$ dans $\mathbb{R}^n$ pour $n < 2m$.
- de $H^m_{\mathbb{C}}$ dans $H^n_{\mathbb{R}}$ pour $n \leq 2m$.

Corollaire

En particulier, s'il existe un plongement uniforme de G dans G', alors $d_1(G) \leq d_2(G')$.

Les immeubles de Bourdon ont des dimensions $d_1 = d_2$ qui forment un sous-ensemble dense de $[1, +\infty[$. Il y a des plongements quasiisométriques bizarres des uns dans les autres. Hume-McKay-Tessera utilisent la p-séparation pour prouver le même résultat.

Isomorphismes dans la catégorie c.g.e.

Une variété riemannienne a une dimension isopérimétrique $\geq d$ si pour tout domaine borné Δ, $vol(\partial\Delta) \geq C\,(vol(\Delta))^{d-1/d}$.

Le Lemme de Schwarz entraîne que les homéomorphismes quasiconformes de H^n sont des isométries. Classiquement, cela se (quasi-) généralise aux variétés de dimension n et de dimension isopérimétrique $> n$.

Théorème

Soient M, N des variétés à géométrie bornée. On suppose que leurs dimensions isopérimétriques sont > 1. Alors tout homéomorphisme $f : M \to N$ tel que f et f^{-1} sont conformes à grande échelle est une quasiisométrie.

p-énergie : si u est une application vers un espace métrique,

$$E_{p,\ell,R,S}(u)=\sup_{(1,\ell,R,S)-empilements\ \{B_j\}}\sum_j osc(u_{|B_j})^p.$$

Exemple : sur un espace métrique d-Ahlfors-régulier, les applications lipschitziennes ont une d-énergie finie.

p-énergie : si u est une application vers un espace métrique,

$$E_{p,\ell,R,S}(u) = \sup_{(1,\ell,R,S)-empilements\ \{B_j\}} \sum_j osc(u_{|B_j})^p.$$

Exemple : sur un espace métrique d-Ahlfors-régulier, les applications lipschitziennes ont une d-énergie finie.

Questions

1. Un arbre a-t-il un plongement conforme à grande échelle dans le plan hyperbolique ?
2. Quels sont les espaces métriques qui possèdent un plongement conforme à grande échelle dans un arbre ?
3. Y a-t-il un analogue à grande échelle du théorème de représentation conforme ?
4. Y a-t-il une théorie des submersions conformes à grande échelle ?