Hind TAIBI
Emilie MBOUSSA
Camille COUSTILLET

EMPILEMENT DE DEMI-DISQUES DANS LE PLAN

Introduction

L'étude des empilements de disques dans le plan a fait l'objet de nombreux travaux de recherches par les mathématiciens. Nous nous étions intéressées à ce sujet et notamment à une preuve de la densité maximale de n'importe lequel de ces empilements, rapportée dans un texte de T. Fernique [1]. Cela a été prouvé par Thue [2], rappelé dans un article de H.-C. Chang et L.-C. Wang [3], et donne comme densité maximale $\frac{\pi}{2\sqrt{3}} \approx 90\%$. Néanmoins, on peut se demander si des empilements de demi-disques ne permettraient pas d'obtenir une densité meilleure.

Dans un premier temps, nous étudions des exemples d'empilements de demi-disques dont la densité est supérieure à $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$. Enfin, nous essayons de majorer la densité des empilements de demi-disques dans le plan.

I- Quelques empilements de demi-disques remarquables

1. Premier exemple d'un empilement de demi-disques

Définition 1.1.1

Soient D_1, D_2,…, D_n des demi-disques de rayon unité d'un empilement, noté E, dans un plan, c'est-à-dire qu'ils sont disposés dans le plan tels qu'aucun demi-disque n'empiète sur un autre. Soit P une partie de ce plan. La densité de l'empilement dans P est donnée par ;

$$\delta_P(E) = \frac{\text{Aire}(P \cap (\bigcup_i D_i))}{\text{Aire}(P)}, i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

Définition 1.1.2

Soit $D(0,r)$ un disque centré au point O à l'origine et de rayon $r \in \mathbb{R}_+$. On s'intéresse à un empilement E de disques D_1, D_2,…, D_n de rayon unité à l'intérieur de $D(0,r)$.

Soit f la fonction définie par ;

$$f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$$
$$r \mapsto \frac{\text{Aire}(D(0,r) \cap (\bigcup_i D_i))}{\text{Aire}(D(0,r))}, i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

On définit la densité de l'empilement de disques $\delta(E)$ dans le plan par tout entier par ;

$$\delta(E) = \lim_{r \to +\infty} \sup f(r)$$

La densité de l'empilement est donc la limite de la borne supérieure de cette fonction f quand r tend vers $+\infty$. On note Δ la borne supérieure des densités de tous les empilements possibles, $\Delta = \sup \delta(E)$.

On peut extrapoler cette définition à un empilement de demi-disque et ainsi avoir une densité d'empilement de demi-disques et la borne supérieure de densité.

Proposition 1.1.3

La densité maximale dans le plan d'un empilement de demi-disques est strictement supérieure à $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$ qui est la densité maximale d'un empilement de disques.

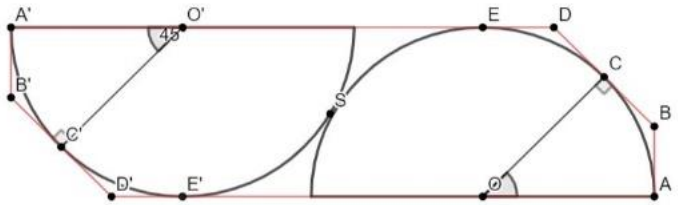
Proposition 1.1.4

Soit un pavage du plan avec des pavés de diamètre borné. Si un réel δ majore (respectivement minore) la densité de l'empilement dans chaque pavé, alors δ majore (respectivement minore) la densité de l'empilement dans le plan tout entier.

Exemple 1.1.5

Soient deux demi-disques (D) et (D') de rayon unité et de centres O et O' respectivement, prenons E et E' deux points de ces demi-disques tels que (OE) et $(O'E')$ soient orthogonales à leur diamètre. On met (D) et (D') côte à côte de façon qu'ils soient tangents l'un à l'autre au point S et que le quadrilatère $OEO'E'$ soit un rectangle. Prenons un point C de (D) tel que $\widehat{AOC} = \frac{\pi}{4}$ et traçons la tangente de (D) en ce point qui traversera le rectangle circonscrit au demi-disque (D) en D et B. En procédant de même pour le demi-disque (D'), on obtient l'hexagone $ABDEA'B'D'E'$. La construction est représentée à la figure 1.1.6.

Figure 1.1.6



2. Calcul de sa densité

On veut calculer la densité à l'intérieur de l'hexagone représenté à la figure 1.1.6.

Cet empilement présente une symétrie centrale par rapport au point S, donc $BD = B'D'$ et les droites (BD) et $(B'D')$ sont parallèles, ainsi, l'hexagone $ABDEA'B'D'E'$ pave le plan.

On note (H) l'hexagone $ABDEA'B'D'E'$ et $\mathcal{A}_H$ son aire. La densité à l'intérieur de (H) est donnée par : $\delta_H(E) = \frac{\text{Aire (deux demi−disques)}}{\mathcal{A}_H} = \frac{\pi}{\mathcal{A}_H}$

Calcul de $\mathcal{A}_H$

Il est facile de voir, par symétrie, que tous les triangles OAB, OBC, OCD, ODE, $O'A'B'$, $O'B'C'$, $O'C'D'$ et $O'D'E'$ sont égaux. On a alors : $\mathcal{A}_H = 8 \times \mathcal{A}_{ODE} + \mathcal{A}_{O'E'OE}$

$\mathcal{A}_{ODE}$ étant l'aire du triangle rectangle ODE et $\mathcal{A}_{O'E'OE}$ l'aire du rectangle $O'E'OE$.

On a : $\tan \widehat{EOD} = \frac{ED}{EO} \Rightarrow ED = EO \tan \widehat{EOD} = \tan \frac{\pi}{8}$

On en déduit : $\mathcal{A}_{ODE} = \frac{ED \cdot EO}{2} = \frac{1}{2} \tan \frac{\pi}{8}$

En appliquant le théorème de Pythagore au triangle rectangle $OE'O'$ on a ;

$$OE' = \sqrt{OO'^2 - E'O'^2} = \sqrt{3}$$

Donc ; $A_{O'E'OE} = E'O' \times OE' = \sqrt{3}$

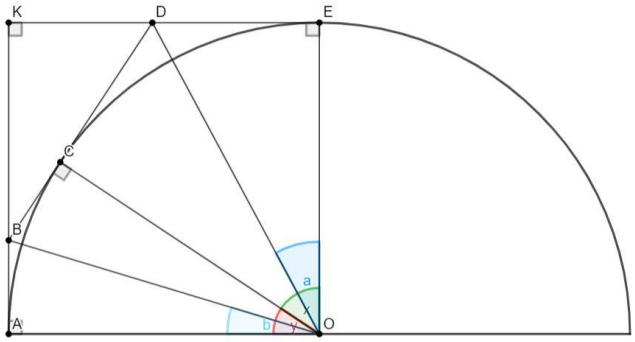
Finalement ; $\mathcal{A}_H = 8 \times \frac{1}{2}\tan\frac{\pi}{8} + \sqrt{3} = 4\tan\frac{\pi}{8} + \sqrt{3}$

<u>Calcul de $\delta_H(E)$</u> $\quad \delta(E) = \frac{\pi}{\mathcal{A}_H} = \frac{\pi}{4\tan\frac{\pi}{8}+\sqrt{3}} = \frac{\pi}{\sqrt{3}-4(1-\sqrt{2})} \approx 0.9270$ □

<u>Vérification</u>

Vérifions qu'en prenant le point C tel que $\widehat{AOC} = \frac{\pi}{4}$ soit le meilleur choix pour que l'aire de l'hexagone soit la plus petite possible. Pour cela, considérons la figure 1.2.1.

<u>Figure 1.2.1</u>



Prenons cette fois-ci C un point quelconque du côté gauche du demi-disque et notons $\mathcal{A}_T$ l'aire du triangle BKD. On veut C tel que $\mathcal{A}_T$ soit la plus grande possible.

C peut être désigné par l'angle $(\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OC}) = x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ou $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) = y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Essayons d'écrire $a = (\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OD})$ et $b = (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA})$ en fonction de x. On a par Pythagore ;

$$\begin{cases} CD^2 = OD^2 - OC^2 = OD^2 - 1 \\ ED^2 = OD^2 - OE^2 = OD^2 - 1 \end{cases}$$

Donc : $\begin{cases} CD = ED \\ a = (\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OD}) = (\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OC}) = \frac{x}{2} \end{cases}$

De même, par des arguments similaires, on trouve $\begin{cases} AB = CB \\ b = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) = \frac{y}{2} \end{cases}$

Ainsi, on a : $\begin{cases} a = \frac{x}{2} \\ b = \frac{\frac{\pi}{2}-x}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \end{cases}$

On a : $\mathcal{A}_T = \frac{1}{2}KB \times KD = \frac{1}{2}(1-\tan a)(1-\tan b) = \frac{1}{2}\left(1-\tan\frac{x}{2}\right)\left(1-\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right)$

Reste à étudier la variation de la fonction :

$$\mathcal{A}_T : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}_+$$
$$x \mapsto \frac{1}{2}\left(1-\tan\frac{x}{2}\right)\left(1-\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right)$$

On pose $u = \frac{x}{2}$ avec $u \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. Etudier la variation de la fonction $\mathcal{A}_T$ revient à étudier la variation de la fonction :

$$f : \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \to \mathbb{R}_+$$
$$u \mapsto (1 - \tan u)\left(1 - \tan\left(\frac{\pi}{4} - u\right)\right)$$

Par la formule de trigonométrie $\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$ on a ;

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - u\right) = \frac{1 - \tan u}{1 + \tan u} = \frac{\cos u - \sin u}{\cos u + \sin u}$$

Donc

$$f(u) = \left(1 - \frac{\sin u}{\cos u}\right)\left(1 - \frac{\cos u - \sin u}{\cos u + \sin u}\right) = \left(\frac{\cos u - \sin u}{\cos u}\right)\left(\frac{2 \sin u}{\cos u + \sin u}\right)$$
$$= \frac{2 \sin u\,(\cos u - \sin u)}{\cos u\,(\cos u + \sin u)} = \frac{a(u)}{b(u)}$$

On remarque que : $a(u) = 2b(u) - 2$

Donc $f(u) = 2 - \frac{2}{b(u)}$ et sa dérivée est donnée par ; $f'(u) = \frac{2b'(u)}{(b(u))^2}$

Il suffit donc d'étudier le signe de $b'(u)$ pour déterminer la variation de f.

On a ;

$$b'(u) = -\sin u\,(\cos u + \sin u) + \cos u\,(\cos u - \sin u) = -2 \sin u \cos u + (\cos^2 u - \sin^2 u\,)$$
$$= \cos(2u) - \sin(2u) = \cos x - \sin x$$

Regardons le signe de $\cos x - \sin x$ pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$;

$$\cos x - \sin x \geq 0 \Leftrightarrow \cos x \geq \sin x \Leftrightarrow x \leq \frac{\pi}{4}$$

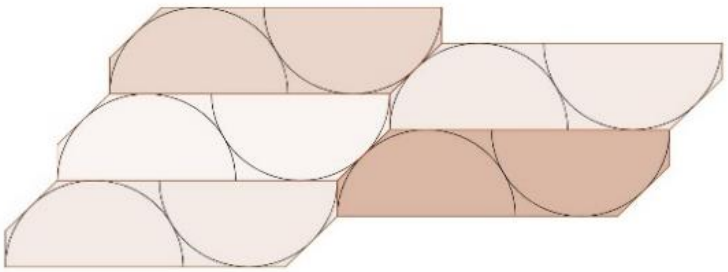
On a donc : $\begin{cases} f'(u) \geq 0 \text{ pour } x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \Leftrightarrow u \in \left[0, \frac{\pi}{8}\right] \\ f'(u) \leq 0 \text{ pour } x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow u \in \left[\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}\right] \end{cases}$

On en déduit que la fonction $\mathcal{A}_T$ admet un maximum en $x = \frac{\pi}{4}$. □

3. Empilement étendu à tout le plan

L'hexagone $ABDEA'B'D'E'$ (voir figure 1.1.6) pave le plan. On peut donc étendre cet empilement de demi-disques sur tout le plan comme le montre la figure 1.3.1.

Figure 1. 3.1



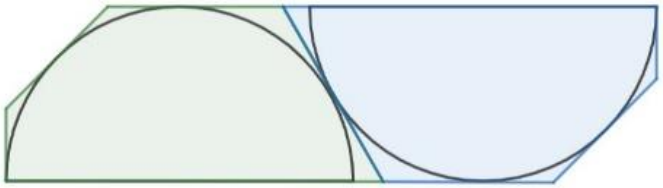
Par la proposition 1.1.4, on a que la densité de cet empilement dans tout le plan est égale à la densité de l'empilement dans chacun des hexagones du pavage, et cette densité est égale à (cf. partie I.2) : $\frac{\pi}{\sqrt{3} - 4(1 - \sqrt{2})} > \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$

Cependant, il semblerait qu'on bougeant très légèrement les demi-disques de cette configuration on puisse obtenir une meilleure densité de l'empilement ! [4]

4. Second cas d'empilement de demi-disques de densité meilleure

Nous pouvons remarquer que l'empilement présenté dans la partie I.1 correspond à un pavage pentagonal où chacun de ses pavés est circonscrit à un demi-disque de l'empilement (voir figure 1.4.1). La densité dans chacun des pavés, qui sont des pentagones, est $\frac{\pi}{\sqrt{3}-4(1-\sqrt{2})}$.

Figure 1.4.1



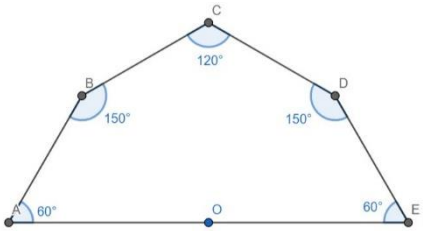
On regarde les différents types de pentagones qui pavent le plan (il n'en existe que 15) et on essaye de voir si l'un d'eux peut être circonscrit à un demi-disque tout en ayant une surface inférieure la surface des pentagones de le figure 1.4.1. On arrive à construire un pentagone de type 2 (voir proposition 1.4.2) qui vérifie cela. Par la proposition 1.1.4, cela nous permet d'avoir un empilement de demi-disques dans le plan de densité meilleure.

Proposition 1.4.2

Si un pentagone possède deux côtés opposés égaux et que ces côtés forment avec deux autres côtés non adjacents des angles supplémentaires, alors ce pentagone pave le plan.

Etudions le pentagone présenté à la figure 1.4.3. qui est de type 2.

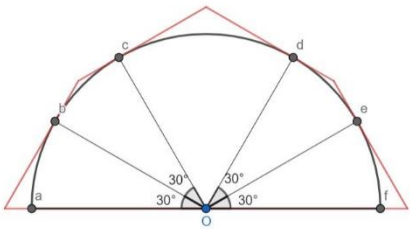
Figure 1.4.3



Ce pentagone est tel que : $AB = BC = CD = DE = \tan\frac{\pi}{6} + \tan\frac{\pi}{12} = \frac{6-2\sqrt{3}}{3}$

Par la proposition 1.4.2, il pave le plan. Ce pentagone a été obtenu en traçant des droites tangentes à un demi-disque comme montré à la figure 1.4.4.

Figure 1.4.4



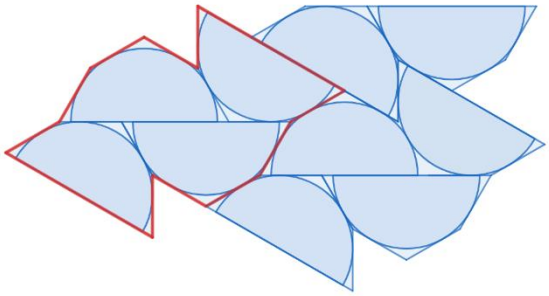
Les droites tangentes ont été tracées aux points b, c, d, et e du demi-disque de rayon unité avec

$$\widehat{boa} = \widehat{cob} = \widehat{eod} = \widehat{foe} = \frac{\pi}{6}$$

La densité dans ce pentagone est égale à : $\frac{\pi}{2\times 4\left(\frac{\tan\frac{\pi}{6}+\tan\frac{\pi}{12}}{2}\right)} = \frac{3\pi}{8(3-\sqrt{3})} \approx 0.929$

En étendant l'empilement à tout le plan, comme le montre la figure 1.4.5, on a une densité d'empilement égale à la densité dans un pentagone. En rouge est montrée la forme de la figure régulière qui permet de paver le plan.

Figure 1.4.5



Cette première partie est entièrement basée sur notre rapport de stage réalisé en 2021. [5] Dans ce rapport, on pourra trouver une démonstration de la densité maximale d'un empilement de cercles dans le plan, d'abord par Thue puis par H.-C. Chang et L.-C. Wang, mais aussi des généralités sur la triangulation de Delaunay et les cellules de Voronoï. Enfin, nous discutons dans notre rapport de stage de la densité maximale d'un empilement de demi-disques.
On cherche par la suite à obtenir une majoration de l'empilement de demi-disques dans le plan.

II- Majoration de la densité de l'empilement

Définition 2.1

Soit un empilement de demi-disques. Pour chaque demi-disque D, de centre O et contenu dans un demi-plan P dont le bord contient O, on définit la fonction f_D sur plan par ;

$$\begin{cases} f_D(x) = d(x, O) \text{ si } x \epsilon P \\ f_D(x) = +\infty \text{ sinon} \end{cases}$$

La cellule C_D de D dans l'empilement est ;

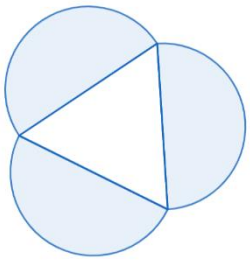
$$\{x\ ;\ f_D(x) < f_{D'}(x) \text{ pour tous les autres demi} - \text{disques } D' \text{de l'empilement}\}$$

Cette définition s'inspire de la définition des cellules de Voronoï dans le plan [6]. Ces dernières permettent d'introduire la triangulation de Delaunay [7] avec laquelle nous pouvons démontrer la densité maximale d'un empilement quelconque de disques dans le plan. Pour plus de détails sur ce point, on pourra se référer à notre rapport de stage. [5]

Remarque 2.2

Il est à noter que ces cellules de demi-disques, telles qu'elles sont définies en 2.1, ne pavent pas le plan. En effet, en prenant le cas représenté à la figure 2.3 par exemple, le triangle constitué par les parties droites des trois demi-disques n'appartient à aucune des cellules de l'empilement.

Figure 2.3



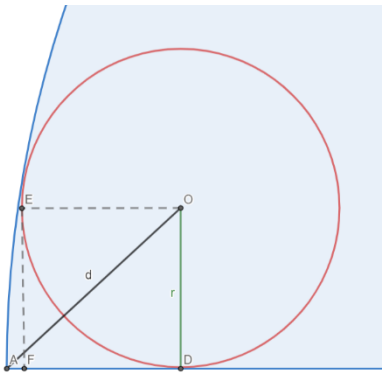
Comme ici nous cherchons à majorer la densité de l'empilement, cela n'est pas un problème. En effet, si des demi-disques sont dans cette configuration, la densité de l'empilement dans le plan sera à diminuer de l'aire comprise entre les trois demi-disques. On peut donc majorer la densité dans cette configuration par celle d'une configuration où tous les points du plan appartiennent à la cellule d'un demi-disque.

Résultat préliminaire 2.4

Avant de majorer la densité de l'empilement, on démontre un résultat préliminaire qui nous servira par la suite. On s'intéresse à un demi-disque dans lequel on insère dans l'un des coins un cercle de rayon r tel qu'il soit tangent au demi-disque. Minorons la distance entre le centre du disque et le coin du demi-disque.

On représente sur la figure 2.5 ci-après la situation étudiée. On note : $OA = d$, $OD = r$ et $AD = x$. On cherche une minoration de la distance d.

Figure 2.5



Les points D et F sont tels que $\widehat{ADO} = \frac{\pi}{2} = \widehat{FEO}$. On applique le théorème de Pythagore sur le triangle ADO et on a : $d^2 = r^2 + x^2$.

Or, on peut minorer la distance x par r. En effet, sur le schéma, on a : $AD = AF + FD = AF + r$. La distance AF peut être au minimum nulle, donc $AD = x \geq r$ donc $x^2 \geq r^2$ car x et r sont positifs. On a donc $d^2 \geq r^2 + r^2 = 2r^2 \Leftrightarrow d \geq r\sqrt{2}$ car d et r sont tous les deux positifs.

On a donc trouvé une minoration de d. □

Majoration de la densité d'un empilement de demi-disques dans le plan

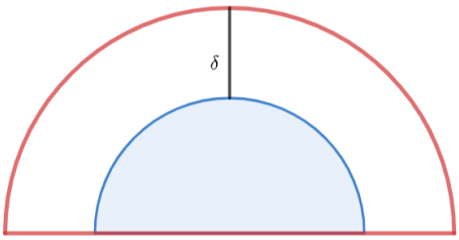
On cherche à majorer la densité de chaque demi-disque de l'empilement dans sa cellule. Pour cela, on considère D_1 un demi-disque que l'on suppose de densité 0.999 dans sa cellule. Prenons $x_0 \in D_1$ et $y \in D_2$ avec D_2 un demi-disque proche de D_1, alors $d(x_0, y)$ admet un minimum. En effet, les

demi-disques D_1 et D_2 sont des ensembles compacts donc $D_1 \times D_2$ est compact. Comme la fonction distance est continue, on a par le théorème de Weierstrass qu'elle atteint sa borne inférieure d'où $d(x_0, y)$ admet un minimum.
Mais alors, s'il existe une distance minimale entre les points x_0 et y, alors ils sont forcément situés sur la frontière de chacun des demi-disques. En effet, si les points sont situés dans les demi-disques, alors la distance entre x_0 et y sera la distance entre les demi-disques, qui est la distance entre leur frontière, additionnée à la distance de x_0 et y aux frontières.
Majorons la distance $d(x_0, y)$ afin de pouvoir minorer l'aire de la cellule et donc majorer la densité dans celle-ci. Pour la suite, nous introduisons la proposition 2.6.

<u>Proposition 2.6</u>
Si un demi-disque est tel que la densité dans sa cellule est supérieure à d_c, alors la distance 2δ qui sépare le demi-disque de la réunion des autres demi-disques de l'empilement est telle que $\delta \leq -1 + \sqrt{\frac{1}{d_c}}$. La démonstration de cette proposition est donnée ci-après.

<u>Démonstration 2.7</u>
On note 2δ la distance de D_1 à la réunion des autres demi-disques de l'empilement. Alors tout point situé à distance inférieure à δ de D_1 du côté curviligne appartient à la cellule de D_1. Le lieu de ces points est représenté en rouge sur la figure 2.8.

<u>Figure 2.8</u>



On cherche à estimer δ pour que la densité dans la cellule soit supérieure à d_c. Pour cela, calculons l'aire de la cellule $\mathcal{A}_C$: $\mathcal{A}_C = \frac{\pi}{2}(1+\delta)^2$

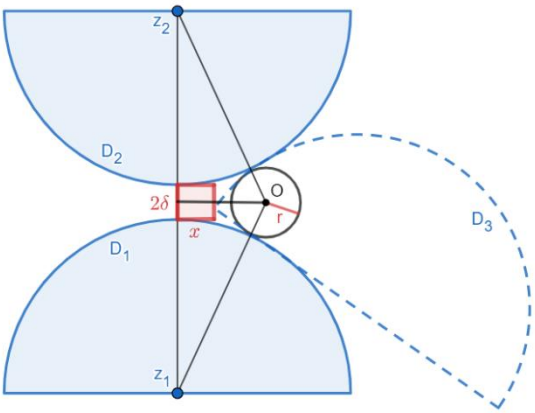
Or, on a supposé que la densité du demi-disque dans sa cellule est de d_c donc ; $\frac{\pi}{2\mathcal{A}_C} \geq d_c$.

On trouve en résolvant l'inéquation ; $\delta \leq -1 + \sqrt{\frac{1}{d_c}}$. □

Reprenons la démonstration de la majoration de la densité d'un empilement de demi-disques dans le plan.
On suppose par l'absurde que la densité de chaque demi-disque dans sa cellule est supérieure à 0.999 et donc $\delta \leq 0.0005$. On raisonne par la suite par disjonction de cas. On considère un demi-disque de l'empilement D_1 tel que la densité dans sa cellule est supérieure à 0.999. Alors, il existe $x_0 \in D_1$ et $y \in D_2$, où D_2 est un demi-disque de l'empilement au voisinage de D_1, tels que $d(x_0, y) < 2\delta \approx 0.001$. On va alors distinguer différents cas suivant l'orientation des deux demi-disques.

- On s'intéresse tout d'abord au cas où D_1 et D_2 tournent leur convexité du même côté, x_0 et y appartiennent respectivement aux bords curvilignes de D_1 et D_2. Cette situation est représentée à la figure 2.9.

Figure 2.9



On veut minorer la distance d'un demi-disque D_3 à la droite (z_1z_2). Pour que cela soit plus simple, on insère dans le coin de D_3 un petit disque de rayon $r = 0.1$ tel qu'il soit tangent aux demi-disques (voir figures 2.5 et 2.9). On note x cette distance (distance entre la droite (z_1z_2) et le coin du demi-disque D_3).
Il est facile de voir que x croît en fonction de δ, en effet, plus D_1 et D_2 sont proches l'un de l'autre, moins D_3 aura de la place pour se glisser entre eux. Regardons ce qui se passe quand D_1 et D_2 sont tangents l'un à l'autre (voir figure 2.10).

Figure 2.10

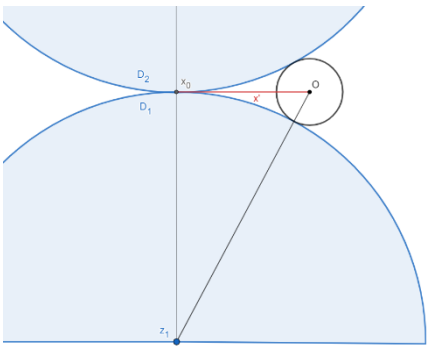
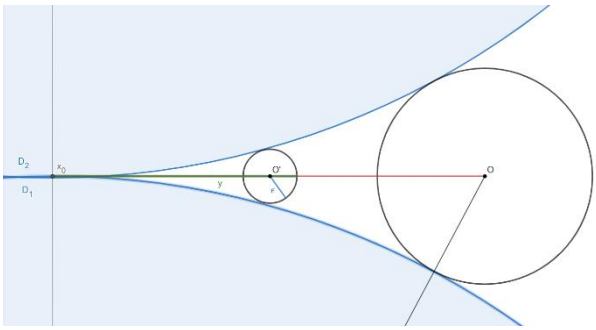


Figure 2.11



Notons $x' = d(o, x_0)$ la distance entre le centre du petit disque de rayon r et la droite (z_1z_2). En appliquant le théorème de Pythagore sur le triangle ox_0z_1 on a : $x' = \sqrt{(1+r)^2 - 1} \approx 0.458$.
Essayons de remplir l'espace entre les trois demi-disques par un disque de rayon ϵ (disque de centre o' à la figure 2.11). Afin d'être sûrs que celui-ci n'empiète ni sur D_3 ni sur sa cellule, on prend $y = d(o', x_0) + \epsilon = x' - r\sqrt{2} - 2\delta$. Cette formule vient du fait qu'on soustrait la distance entre o et le coin du demi-disque D_3 afin d'être sûrs de ne pas empiéter sur ce dernier, d'où le $-r\sqrt{2}$ (cf. résultat préliminaire 2.4) et on soustrait également 2δ afin de ne pas compter les points qui se trouvent dans la cellule de D_3.
Par le théorème de Pythagore on a $(x' - r\sqrt{2} - 2\delta - \epsilon)^2 + 1 = (1+\epsilon)^2$, ce qui donne finalement ;

$$\epsilon = \frac{(x' - r\sqrt{2} - 2\delta)^2}{2 + 2(x' - r\sqrt{2} - 2\delta)} \approx 0.03785$$

On en déduit l'aire du disque de rayon ϵ : $\mathcal{A}_\epsilon \approx 0.0045$. On peut affirmer sans problème qu'au moins la moitié de cette aire appartient à la cellule de D_1, et en raisonnant de la même manière du côté gauche de D_1, on peut insérer au moins un autre demi-disque de même rayon ϵ dans sa cellule. On peut finalement majorer la densité de D_1 dans sa cellule par ;

$$d_{D_1} \leq \frac{\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2} + \mathcal{A}_\epsilon} \approx 0.997$$

Or, on a supposé cette densité supérieure à 0.999, il y a contradiction ! On conclut dans ce premier cas que la densité de l'empilement est inférieure à 0.999.

- Afin que la démonstration soit complète, il faudrait un argument similaire pour les autres cas, notamment lorsque les deux demi-disques tournent leur convexité de deux côtés différents et leurs diamètres sont presque parallèles entre eux. On envisage de reprendre les arguments du premier cas dans le demi-plan P dont le bord est l'un des diamètres.

Conclusion

Nous avons déterminé dans un premier temps qu'il existe des empilements de demi-disques dans le plan dont la densité est supérieure à celle maximale d'un empilement de disques. Pour l'instant, l'empilement de demi-disques dont la densité est maximale est d'environ 0.929.

Par la suite, nous avons tenté de démontrer une majoration de la densité de l'empilement de demi-disques dans le plan. Par manque de temps, nous n'avons pas pu conclure mais nous avons néanmoins pu esquisser les premiers pas d'une démonstration par disjonction de cas.

Références

[1] T. Fernique, *Empilements de disques de densité maximale*, pages 1 à 4, 2019, https://lipn.univ-paris13.fr/~fernique/geomateriaux2/fernique.pdf

[2] Axel Thue, *Über die dichteste Zusammenstellung von kongruenten Kreisen in einer Ebene*, Skrifter udg. af Videnskabs-Selskabet i Christiania., 1. Math.-naturv. kl. ; 1910,1.

[3] H.-C. Chang et L.-C. Wang, *A simple proof of Thue's theorem on circle packing*, 2010 https://arxiv.org/pdf/1009.4322.pdf

[4] https://images.math.cnrs.fr/Le-gratin-d-aubergines

[5] https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~pansu/Manuscrit_Immersion%20recherche_vE.pdf

[6] https://fr.wikipedia.org/wiki/Diagramme_de_Vorono%C3%AF

[7] https://fr.wikipedia.org/wiki/Triangulation_de_Delaunay