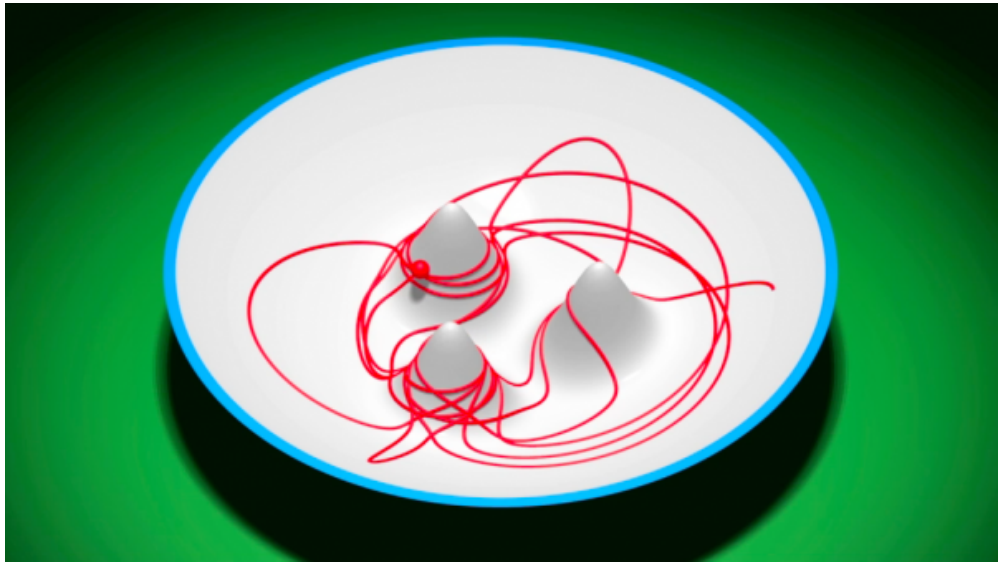
Le flot géodésique

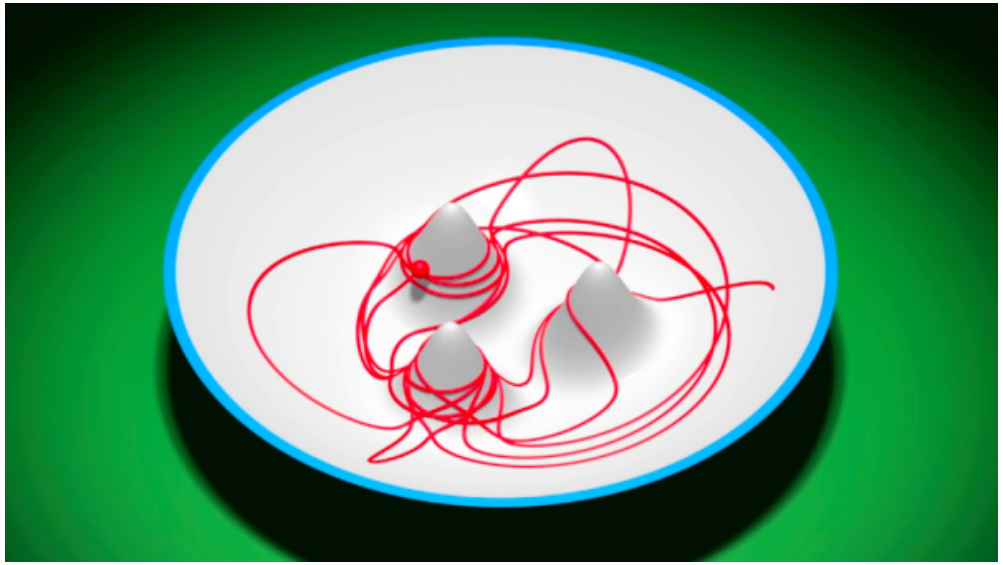
Pierre Pansu, Université Paris-Sud

19 octobre 2016

Flot géodésique = mouvement d'un point matériel sur une surface, sans pesanteur



Flot géodésique = mouvement d'un point matériel sur une surface, sans pesanteur



Questions

- comportement des trajectoires en temps grand (systèmes dynamiques)
- Influence de la forme, de la courbure, de la topologie (géométrie)

Le théorème sur les trajectoires périodiques

Référence : J. Hadamard, *Les surfaces à courbures opposées et leurs lignes géodésiques*, J. Math. Pures Appl. **4** (1898), 27–74.

Le théorème sur les trajectoires périodiques

Référence : J. Hadamard, *Les surfaces à courbures opposées et leurs lignes géodésiques*, J. Math. Pures Appl. **4** (1898), 27–74.

Trajectoire périodique = point critique de la fonctionnelle énergie

$$E(\gamma) = \int_0^1 \frac{1}{2} |\dot{\gamma}(t)|^2 \, dt$$

sur l'espace X des applications 1-périodiques $\mathbb{R} \to X$.

Le théorème sur les trajectoires périodiques

Référence : J. Hadamard, *Les surfaces à courbures opposées et leurs lignes géodésiques*, J. Math. Pures Appl. **4** (1898), 27–74.

Trajectoire périodique = point critique de la fonctionnelle énergie

$$E(\gamma) = \int_0^1 \frac{1}{2}|\dot{\gamma}(t)|^2 \, dt$$

sur l'espace X des applications 1-périodiques $\mathbb{R} \to X$.

Suite fini de rebonds ABBCABC... = composante connexe de X.

Le théorème sur les trajectoires périodiques

Référence : J. Hadamard, *Les surfaces à courbures opposées et leurs lignes géodésiques*, J. Math. Pures Appl. **4** (1898), 27–74.

Trajectoire périodique = point critique de la fonctionnelle énergie

$$E(\gamma) = \int_0^1 \frac{1}{2}|\dot{\gamma}(t)|^2 \, dt$$

sur l'espace X des applications 1-périodiques $\mathbb{R} \to X$.

Suite fini de rebonds ABBCABC... = composante connexe de X.

Courbures opposées = courbure strictement négative = convexité locale stricte de E.

Le théorème sur les trajectoires périodiques

Référence : J. Hadamard, *Les surfaces à courbures opposées et leurs lignes géodésiques*, J. Math. Pures Appl. **4** (1898), 27–74.

Trajectoire périodique = point critique de la fonctionnelle énergie

$$E(\gamma) = \int_0^1 \frac{1}{2}|\dot{\gamma}(t)|^2 \, dt$$

sur l'espace X des applications 1-périodiques $\mathbb{R} \to X$.

Suite fini de rebonds ABBCABC... = composante connexe de X.

Courbures opposées = courbure strictement négative = convexité locale stricte de E.

Convexité locale stricte $\Rightarrow$ un unique point critique (minimum) dans chaque composante connexe.

Le théorème sur la stabilité du comportement asymptotique

Référence : J. Hadamard, *Les surfaces à courbures opposées et leurs lignes géodésiques*, J. Math. Pures Appl. **4** (1898), 27–74.

En chaque point de la surface, le cercle des vitesses est partitionné suivant les comportements asymptotiques :

- trajectoire périodique,
- trajectoire récurrente non périodique,
- part dans telle branche infinie,
- ni l'un ni l'autre.

Le théorème sur la stabilité du comportement asymptotique

Référence : J. Hadamard, *Les surfaces à courbures opposées et leurs lignes géodésiques*, J. Math. Pures Appl. **4** (1898), 27–74.

En chaque point de la surface, le cercle des vitesses est partitionné suivant les comportements asymptotiques :

- trajectoire périodique,
- trajectoire récurrente non périodique,
- part dans telle branche infinie,
- ni l'un ni l'autre.

Théorème. *Pour une surface à pointes fines,*

- *Chacun des sous-ensembles est dense*.*
- *Le motif reste le même (à homéomorphisme près) quand on change de point.*

(*) Pour le cas récurrent non périodique, voir plus loin.

Jacques Hadamard (1865-1963)

1893 : Matrices d'Hadamard
1896 : Théorème des 3 cercles
1896 : Théorème des Nombres Premiers
1902 : Problèmes bien posés en EDP
Psychology of Invention in the Mathematical Field (1945)

Jacques Hadamard (1865-1963)

1893 : Matrices d'Hadamard
1896 : Théorème des 3 cercles
1896 : Théorème des Nombres Premiers
1902 : Problèmes bien posés en EDP
Psychology of Invention in the Mathematical Field (1945)

Pierre Duhem (1861-1916)

1878 : Potentiel chimique
1886 : Potentiel thermodynamique
La Théorie physique. Son objet et sa structure (1906)

Marston Morse (1892-1977)

Prouve l'existence de géodésiques bornées non périodiques.
Méthode : Morse code chaque géodésique par la suite des "pavés" qu'elle traverse. On obtient exactement les suites sans répétition. Comme exemple de suite récurrente, Morse redécouvre la suite dite de *Thue-Morse* engendrée par l'automate $0 \to 01$, $1 \to 10$.

Marston Morse (1892-1977)

Prouve l'existence de géodésiques bornées non périodiques.
Méthode : Morse code chaque géodésique par la suite des "pavés" qu'elle traverse. On obtient exactement les suites sans répétition. Comme exemple de suite récurrente, Morse redécouvre la suite dite de *Thue-Morse* engendrée par l'automate $0 \to 01$, $1 \to 10$.

Dynamique symbolique. Le flot géodésique est orbite-équivalent au décalage sur un espace de suites doublement infinies.

Référence : *Recurrent geodesics on a surface of negative curvature*, Trans. Amer. Math.Soc. **43** (1921), 84-110.

Gustav Hedlund (1904-1993)

Prouve l'existence de géodésiques denses, puis l'ergodicité en courbure constante.

Ergodicité : les moyennes temporelles convergent vers la moyenne spatiale.

Référence : *On the metrical transitivity of geodesics on closed surfaces of constant negative curvature*, Ann. of Math. **35** (1934), 787-808.

Gustav Hedlund (1904-1993)

Prouve l'existence de géodésiques denses, puis l'ergodicité en courbure constante.

Ergodicité : les moyennes temporelles convergent vers la moyenne spatiale.

Référence : *On the metrical transitivity of geodesics on closed surfaces of constant negative curvature*, Ann. of Math. **35** (1934), 787-808.

Eberhard Hopf démontre l'ergodicité pour les surfaces à courbure variable en 1940. **Dmitri Anosov** passe aux dimensions supérieures en 1962.

Gustav Hedlund (1904-1993)

Prouve l'existence de géodésiques denses, puis l'ergodicité en courbure constante.

Ergodicité : les moyennes temporelles convergent vers la moyenne spatiale.

Référence : *On the metrical transitivity of geodesics on closed surfaces of constant negative curvature*, Ann. of Math. **35** (1934), 787-808.

Eberhard Hopf démontre l'ergodicité pour les surfaces à courbure variable en 1940. **Dmitri Anosov** passe aux dimensions supérieures en 1962.

Anosov démontre la *stabilité structurelle* : le flot perturbé reste orbite-équivalent à lui-même.

Approximation diophantienne. Si $x \in \mathbb{R}$, notons $\langle x \rangle$ la distance de x à l'entier le plus proche. Approximer x par des rationnels revient à rendre $n\langle nx \rangle$ petit. La théorie des fractions continues montre que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\liminf_{n \to \infty} n\langle nx \rangle \leq 1.$$

Approximation diophantienne. Si $x \in \mathbb{R}$, notons $\langle x \rangle$ la distance de x à l'entier le plus proche. Approximer x par des rationnels revient à rendre $n\langle nx \rangle$ petit. La théorie des fractions continues montre que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\liminf_{n \to \infty} n\langle nx \rangle \leq 1.$$

On montre que l'ensemble des réels x tels que

$$\liminf_{n \to \infty} n\langle nx \rangle = 0$$

est de mesure pleine (mais son complémentaire est de dimension 1).

Approximation diophantienne. Si $x \in \mathbb{R}$, notons $\langle x \rangle$ la distance de x à l'entier le plus proche. Approximer x par des rationnels revient à rendre $n\langle nx \rangle$ petit. La théorie des fractions continues montre que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\liminf_{n \to \infty} n\langle nx \rangle \leq 1.$$

On montre que l'ensemble des réels x tels que

$$\liminf_{n \to \infty} n\langle nx \rangle = 0$$

est de mesure pleine (mais son complémentaire est de dimension 1).

Approximation diophantienne simultanée. La version bidimensionnelle de l'approximation diophantienne est toujours ouverte.

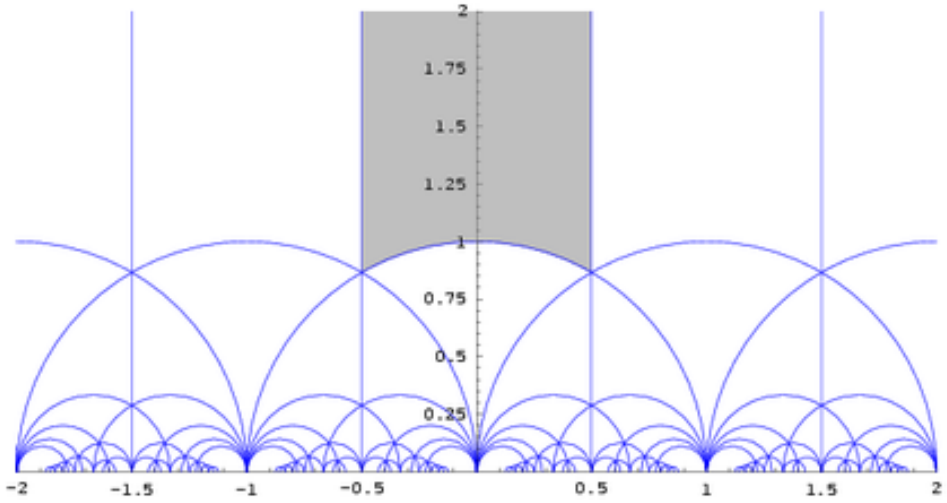
Conjecture (Littlewood, 1930). Pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

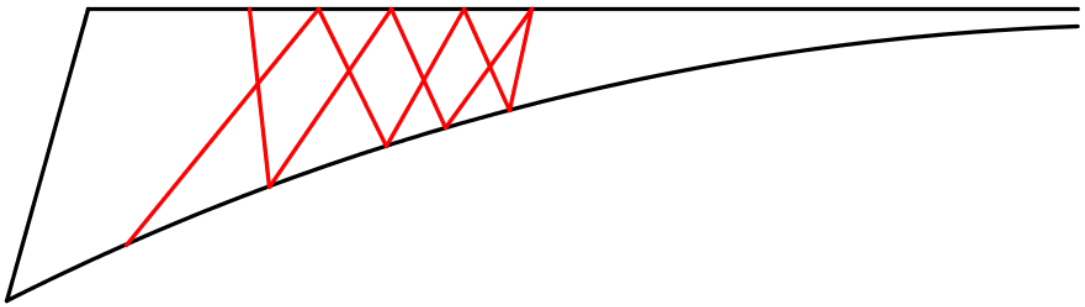
$$\liminf_{n \to \infty} n\langle nx \rangle \langle ny \rangle = 0.$$

La surface modulaire, c'est l'espace des réseaux, muni d'une métrique à courbure -1.

Les demi-droites verticales donnent des géodésiques de la surface modulaire.

Part à l'infini $\Leftrightarrow$ abscisse rationnelle.

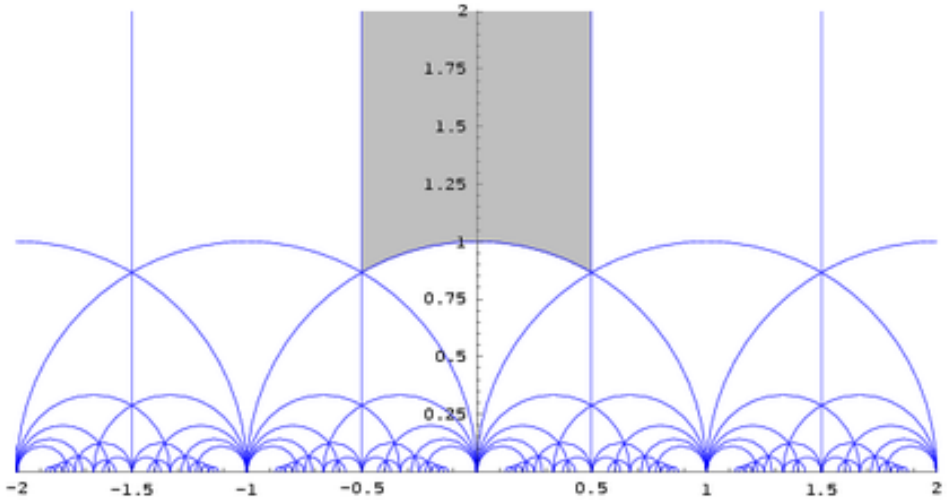


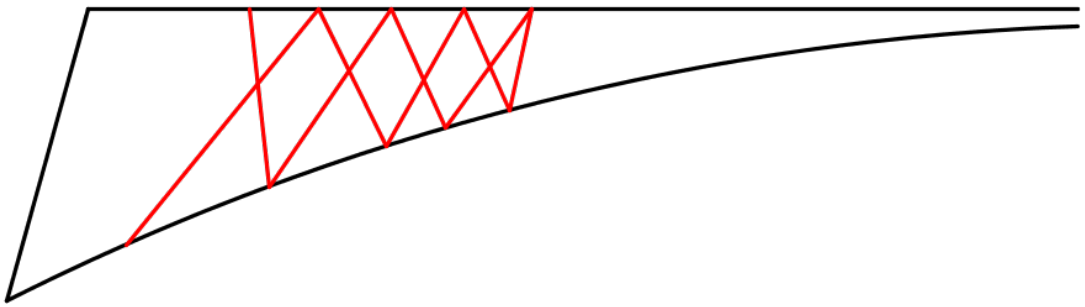


La surface modulaire, c'est l'espace des réseaux, muni d'une métrique à courbure -1.

Les demi-droites verticales donnent des géodésiques de la surface modulaire.

Part à l'infini $\Leftrightarrow$ abscisse rationnelle.





Proposition. $\liminf_{n\to\infty} n\langle nx\rangle = 0$ *si et seulement si* x *est le point à l'infini d'une géodésique non bornée de la surface modulaire* $SO(2)\setminus SI(2,\mathbb{R})/SI(2,\mathbb{Z})$.

Proposition. $\liminf_{n\to\infty} n\langle nx\rangle\langle ny\rangle = 0$ *si et seulement si* (x, y) *représente une chambre de Weyl non bornée de la variété modulaire* $SO(3) \setminus Sl(3,\mathbb{R})/Sl(3,\mathbb{Z})$.

Proposition. $\liminf_{n\to\infty} n\langle nx\rangle\langle ny\rangle = 0$ *si et seulement si* (x, y) *représente une chambre de Weyl non bornée de la variété modulaire* $SO(3) \setminus Sl(3,\mathbb{R})/Sl(3,\mathbb{Z})$.

Théorème (Einsiedler, Katok, Lindenstrauss 2006). *L'ensemble des couples* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *tels que* $\liminf_{n\to\infty} n\langle nx\rangle\langle ny\rangle \neq 0$ *est de dimension 0.*