GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE. — *Une inégalité isopérimétrique sur le groupe de Heisenberg*. Note (*) de **Pierre Pansu**, présentée par André Lichnerowicz.

Pour une métrique riemannienne invariante à gauche sur le groupe de Heisenberg, i. e., le groupe de Lie nilpotent simplement connexe de dimension 3, nous démontrons une inégalité isopérimétrique. Nous en tirons des conséquences pour les applications quasi conformes et les inégalités de Sobolev sur ce groupe.

DIFFERENTIAL GEOMETRY. — An Isoperimetric Inequality on the Heisenberg Group.

For a left invariant riemannian métric on the 3-dimensional Heisenberg group, an isoperimetric inequality is proved. Corollaries are given concerning quasi conformal mappings and Sobolev inequalities in the group.

1. Le *groupe de Heisenberg* de dimension 3, noté G, muni d'une métrique invariante à gauche, est sans doute l'objet le plus simple à considérer d'un point de vue riemannien, après les espaces à courbure constante. Pour le décrire, on ne dispose pas des invariants ordinaires des variétés compactes (diamètre, volume, systoles). Pourtant, le but de cette note est de montrer que G est strictement plus « grand » que l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$.

Une façon de l'exprimer est d'estimer le volume des boules (*cf.* [9]). Un renseignement plus précis est donné par l'*inégalité isopérimétrique* suivante :

2. THÉORÈME. — *Pour toute sous-variété compacte à bord* D, *dans* G *muni d'une métrique riemannienne invariante à gauche, on a l'inégalité* $\mathrm{vol}(D) \leqq (12/\pi)^{1/3} (\mathrm{vol}\, \partial D)^{4/3}$.

L'exposant 4/3 est optimal, mais la constante $(12/\pi)^{1/3}$ ne l'est pas.

3. Pour démontrer le théorème 2, nous utilisons une métrique auxiliaire, la *métrique de Carnot-Carathéodory*.

Fixons une métrique riemannienne g, invariante à gauche sur le groupe G, choisissons une base orthonormée (X, Y, Z) de l'algèbre de Lie, telle que les champs de vecteurs invariants à gauche correspondants satisfassent aux relations :

$$[X, Z] = [Y, Z] = 0, \qquad [X, Y] = Z.$$

Notons H le champ de plans invariant à gauche sur G, orthogonal à la direction Z du centre, c'est la distribution horizontale de la submersion riemannienne :

$$G \to G/\text{centre} = \mathbb{R}^2 \text{ euclidien}.$$

Rappelons que la distance riemannienne $d_g(x, y)$ de deux points de G est, par définition, la borne inférieure des longueurs des arcs absolument continus qui les relient. Si on se restreint aux arcs horizontaux, i. e., presque toujours tangents à H, on obtient la *distance Carnot-Carathéodory* $d_\infty(x, y)$.

Plus généralement, une métrique de Carnot-Carathéodory est définie chaque fois qu'un sous-fibré tangent à une variété est muni d'une norme sur les fibres. *Voir* ([1], [3], [11]).

4. *Notons* dx, dy, ω les formes invariantes sur G duales des champs de vecteurs X, Y, Z. La forme volume riemannienne attachée à g s'écrit $\mathrm{vol} = dx \wedge dy \wedge \omega$.

Notons $d\,\mathrm{aire}$ la forme volume riemannienne induite par g sur une surface S; *définissons* une mesure $\mathscr{H}^3$ au moyen de la forme différentielle $d\mathscr{H}^3 = |\omega \restriction_S|\, d\,\mathrm{aire}$.

PROPOSITION. — *La mesure vol est une version de la mesure de Hausdorff 4-dimensionnelle induite par la distance* d_g. *Si* S *est une surface de classe* C^2, *la mesure* $\mathscr{H}^3$ *est une version de la mesure de Hausdorff sphérique 3-dimensionnelle induite par la distance* d_∞ (cf. [4], § 2.10). *Elles*

satisfont à la formule de la coaire : *si f est une fonction lipschitzienne et u une fonction mesurable positive sur* G, *alors* :

$$\int_G u\, d\,\mathrm{vol} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{f^{-1}(t)} \frac{u}{|hf|}\, d\mathscr{H}^3 \right) dt,$$

où hf désigne la composante horizontale du gradient riemannien de f.

5. Clairement, $\mathscr{H}^3 \leqq$ aire, donc le théorème 2 résulte de l'inégalité :

$$\mathrm{vol}(D) \leqq (12/\pi)^{1/3} (\mathscr{H}^3(\partial D))^{4/3}$$

qui sera démontrée au paragraphe 13.

6. *Une application géométrique du théorème* 2. — Comme conséquence d'un théorème d'Ahlfors ([7], 6.11), nous obtenons le corollaire suivant :

COROLLAIRE. — *Il n'y a pas d'application quasi conforme de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ dans le groupe d'Heisenberg* G *muni d'une métrique invariante à gauche.*

Du point de vue conforme, le groupe d'Heisenberg apparaît donc en position intermédiaire entre $\mathbb{R}^3$ et l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^3$. Cependant, il n'est pas clair s'il existe ou non des applications quasi conformes de G dans $\mathbb{H}^3$.

7. *Une application du théorème* 2 *à l'analyse.* — A une constante près, l'inégalité 5 est l'inégalité isopérimétrique de $\mathbb{R}^4$. La méthode de symétrisation de Faber-Krahn permet, au moyen de la formule de la coaire de 4, d'obtenir, par comparaison avec $\mathbb{R}^4$, des inégalités de Sobolev faisant intervenir seulement la composante horizontale du gradient.

COROLLAIRE. — *Soient p, q des réels tels que $1 \leqq p \leqq q \leqq +\infty$, $(1/p)-(1/q) \leqq 1/4$. Pour toute fonction lisse u à support dans un domaine borné Ω de* G, *on a* :

$$\left(\int_\Omega u^q \right)^{1/q} \leqq \mathrm{Cte}_{p,q} (\mathrm{vol}\,\Omega)^{(1/4)-(1/p)-(1/q)} \left(\int_\Omega |hu|^p \right)^{1/p},$$

où hu désigne *la composante horizontale du gradient riemannien de u.*

Pour une fonction lisse u à support dans Ω, *posons* :

$$\|u\|_{1,p} = \left(\int_\Omega u^p \right)^{1/p} + \left(\int_\Omega |hu|^p \right)^{1/p},$$

notons $S_1^p(\Omega)$ la complétion de $C^\infty(\Omega)$ relativement à cette norme.

COROLLAIRE. — *Si $1/q \geqq (1/p)-(1/4)$, on a l'inclusion $S_1^p(\Omega) \subset L^q(\Omega)$; cette inclusion est compacte si $1/q > (1/p)-(1/4)$. En particulier, si $p \geqq 4$, $S_1^p(\Omega) \subset C^0(\Omega)$.*

Ce résultat améliore l'inclusion $S_1^p \subset C^0$ obtenue pour $p > 4$ dans [5].

8. Enfin, le théorème 2 donne une information combinatoire sur les sous-groupes discrets cocompacts de G. Par exemple, pour le groupe Γ à deux générateurs a, b et deux relations $[a, [a, b]] = [b, [a, b]] = 1$, notons A une partie finie, et $\partial A = \{ \gamma \in A / a\gamma$ ou $a^{-1}\gamma$ ou $b\gamma$ ou $b^{-1}\gamma \notin A \}$.

COROLLAIRE. — *Pour toute partie finie* A *de* Γ, *on a* :

$$\mathrm{card}\, A \leqq 15 (\mathrm{card}(\partial A))^{4/3}.$$

Démonstration du théorème 2.

9. *Flot géodésique.* — Parmi les *géodésiques* de la métrique de Carnot-Carathéodory, i. e., les courbes localement minimisantes (*voir* [6], [8]), *appelons* droites celles qui minimisent sur toute leur longueur. Ce sont les relèvement horizontaux des droites de $\mathbb{R}^2$, elles sont aussi géodésiques pour la métrique riemannienne g; il en passe une et une seule par chaque point de G et chaque vecteur tangent horizontal, donc un *flot géodésique* (restriction du flot riemannien), *noté* T, est défini sur le fibré horizontal H et son fibré unitaire UH.

Le flot géodésique riemannien préserve une 1-forme α_g sur le fibré unitaire tangent à G (*voir* [2], p. 31), donc le flot T préserve la restriction α de α_g à UH; en fait, T préserve la forme $\omega \wedge \alpha \wedge d\alpha$; c'est une forme volume sur UH, car on peut l'écrire $\mathrm{vol} \wedge d\theta$, où la forme fermée $d\theta$, restreinte à chaque fibre de $UH \to G$, coïncide avec la forme volume de la fibre.

10. Imitant Santalo ([10], p. 338), on tire de cette propriété « de Liouville » la formule suivante pour le volume d'une sous-variété.

PROPOSITION. — *Soit* D *une sous-variété à bord compacte de* G. *Si $x \in \partial D$*, notons $e^{i\theta}$ *le vecteur tangent horizontal* $\cos\theta X + \sin\theta Y$, notons $r(x, \theta)$ *le plus grand r tel que $x \exp(te^{i\theta}) \in D$ pour tout $t < r$.* Notons N *le vecteur tangent horizontal en x, normal à* D, *dirigé vers l'intérieur de* D; *alors*:

$$2\pi\, \mathrm{vol}\,(D) = \int_D \left(\int_0^{2\pi} r(x, \theta) \langle e^{i\theta}, N \rangle\, d\theta \right) d\mathscr{H}^3(x).$$

11. *Sections canoniques.* — Si x est un point de G, sa *section canonique* est la réunion Σ_x des droites qui passent par x. C'est l'image de la section $s_x : \mathbb{R}^2 \to G$, $(a, b) \mapsto x \exp(aX + bY)$. Au moyen des coordonnées polaires de centre la projection de x sur $\mathbb{R}^2$, la mesure $\mathscr{H}^3$ s'écrit $s_x^* d\mathscr{H}^3 = (1/2) r^2\, dr \wedge d\theta$. Les sections canoniques possèdent une remarquable propriété de minimum :

12. PROPOSITION. — *Soit Ω une sous-variété compacte à bord de $\mathbb{R}^2$; si une surface lisse* V *dans* G *a pour bord la courbe plongée $s_1(\partial\Omega)$, alors $\mathscr{H}^3(V) \geqq \mathscr{H}^3(s_1 \Omega)$.*

Notons r la distance à l'origine dans $\mathbb{R}^2$ ainsi que la fonction induite sur G. Comme $|dr| \leqq 1$, on peut écrire :

$$\mathscr{H}^3(V) = \int_V |\omega \restriction_V|\, d\,\mathrm{aire} \geqq \int_V |\omega \restriction_V \wedge dr|\, d\,\mathrm{aire} \geqq \int_V dr \wedge \omega$$

$$= \int_{s_1(\Omega)} dr \wedge \omega = \int_\Omega dr \wedge s_1^* \omega = \int_\Omega \frac{1}{2} r^2\, dr \wedge d\theta = \mathscr{H}^3(s_1 \Omega).$$

On a utilisé le fait que $d(dr \wedge \omega) = dr \wedge (-dx \wedge dy) = 0$ et la formule de Stokes.

13. *Fin de la démonstration du théorème* 2. — Fixons une sous-variété à bord compacte D. Afin d'exploiter la formule 10, nous majorons l'intégrand $\int r(x, \theta) \langle e^{i\theta}, N \rangle\, d\theta$; nous remplaçons le produit scalaire par 1 (ce qui enlève tout espoir d'obtenir une constante optimale dans 5).

Notons (r, θ) les coordonnées polaires centrées sur la projection de x dans $\mathbb{R}^2$, notons (ρ, φ) les fonctions induites sur G. Notons P l'ouvert de Σ_x visible de x, i. e. :

$$P = \{ x \exp(\rho e^{i\theta}) / \forall\, t < \rho,\ x \exp(te^{i\theta}) \in \mathring{D} \}.$$

Alors :

$$\int_0^{2\pi} r(x,\theta)\,d\theta=\int_{\partial P}\rho\,d\varphi=2\int_P \rho^{-2}\frac{1}{2}\rho^2\,d\rho\wedge d\varphi=2\int_P \rho^{-2}\,d\mathscr{H}^3.$$

Or l'intégrale $\int \rho^{-2}\,d\mathscr{H}^3$ ne peut qu'augmenter si on remplace P par la boule $B=\{y\in\Sigma_x^{\cdot}/\rho(y)\leqq R\}$ dans Σ_x de même mesure 3-dimensionnelle que P, par conséquent :

$$\int_P \rho^{-2}\,d\mathscr{H}^3\leqq\int_B \rho^{-2}\,d\mathscr{H}^3=2\pi R=2\pi\left(\frac{3}{\pi}\mathscr{H}^3(P)\right)^{1/3}.$$

Nous remarquons que Σ_x partage ∂D en deux surfaces V_1 et V_2 dont le bord est ∂P, donc, d'après la proposition 12, on a $2\mathscr{H}^3(P)\leqq\mathscr{H}^3(V_1)+\mathscr{H}^3(V_2)=\mathscr{H}^3(D)$; enfin, de la formule 10, il vient :

$$\mathrm{vol}(D)\leqq\frac{1}{2\pi}\int_{\partial D}4\pi\left(\frac{3}{2\pi}\mathscr{H}^3(\partial D)\right)^{1/3}d\mathscr{H}^3\leqq\left(\frac{12}{\pi}\right)^{1/3}(\mathscr{H}^3(\partial D))^{4/3}.$$

Remise le 14 juin 1982.

[1] R. Azencott et coll., *Astérisque*, chap. 13,1981, (*Séminaire de Probabilités*, Paris-VII, 1977-1979).
[2] A. L. Besse, *Manifolds All of which Geodesics are Closed*, Springer, 1976.
[3] C. Caratheodory, *Variationsrechnung und Partielle Differentialgleichungen Erste Ordnung*, B. G. Teubner, éd., 1935.
[4] H. Federer, *Geometric Measure Theory*, Springer, 1969.
[5] G. B. Folland et E. M. Stein, *Comm. in Pure and Applied Math.*, 27, p. 429, 1974.
[6] B. Gaveau, *Acta Math.*, 139, 1977, p. 96.
[7] M. Gromov, *Structures métriques pour les variétés riemanniennes*, C.E.D.I.C., 1981.
[8] A. Kaplan, *Geometriae Dedicata*, 11, 1981, p. 127.
[9] J. Milnor, *J. of Differential Geometry*, 2, 1968, p. 1.
[10] S. Santalo, *Integral Geometry and Geometric Probability*, Addison Wesley, 1976.
[11] H. S. Sussmann, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 180, 1973, p. 171.

École polytechnique, Centre de Mathématiques, 91128 *Palaiseau Cedex.*

GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE. — *Variétés neutres à structure presque quaternionienne possédant la propriété de la quasi concourance.* Note (*) de **Ignazio Leurini,** présentée par André Lichnerowicz.

Les variétés $M(\mathscr{U},\Omega,g)$ portant le titre ci-dessus sont caractérisées par la propriété suivant laquelle certains couples de vecteurs d'une base de Witt $\{h_A\}$ sont quasi concourants. Ceci implique que les vecteurs quasi concourants h_a, h_{a^*} sont des directions géodésiques et que la distribution $\mathscr{D}_{qc}=\{h_a, h_{a^*}\}$, ainsi que la distribution orthogonale $\mathscr{D}_{qc}^{\perp}$, est involutive. Dans ce cas M est recouverte par deux familles de sous-variétés minimales orthogonales et est feuilletée par des surfaces hyperboliques minimales.

D'autres propriétés ayant trait aux immersions de différentes sous-variétés dans M sont aussi discutées.

DIFFERENTIAL GEOMETRY — Neutral Manifolds with Almost Quaternionic Structure Having the Quasi Concurrence Property.

Let $M(\mathscr{U},\Omega,g)$ be a neutral manifold with almost quaternionic structure [i. e. a pseudo-Riemannian manifold of signature $(2m,2m)$] and let $\{h_\alpha, h_{\alpha^*}\}$ $(\alpha=1,\ldots,2m;\ \alpha^*=\alpha+2m)$ be a Witt basis on M. We say that M has the quasi concurrence property if the pairings of basic vectors (h_a, h_{a^*}) $(a=1,\ldots,m)$ are quasi concurrent [1]. *In this case h_a, h_{a^*} are geodesic directions and the quasi concurrent distribution $\mathscr{D}_{qc}=\{h_a, h_{a^*}\}$, as well as the orthogonal distribution $\mathscr{D}_{qc}^{\perp}$, is involutive.*

Further, M is covered by two families of orthogonal minimal submanifolds and is foliated by minimal hyperbolic surfaces.

Finally, it is proved that (i) the invariant submanifolds of M tangent and normal to $\mathscr{D}_{qc}$ are totally geodesic; (ii) the CR-submanifolds and the Lagrangian submanifolds of M are (improperly) minimal.

1. Soit $M(\mathscr{U},\Omega,g)$ une C^∞-variété pseudo-riemannienne connexe, orientable et *neutre* de dimension $2n$ [la signature de M est (n,n)]. Soit $\mathscr{F}(M)$ le fibré des repères de Witt réels sur M [1] et $\mathscr{F}\in\mathscr{F}(M)$ un tel repère. Notons par $\{h_A\}$ $(A, B, C=1, 2, \ldots, 2n)$ la base vectorielle isotrope (réelle) de $\mathscr{F}$ et par $\{\theta^A\}$ la base duale. Si $T_p(M)$ est l'espace tangent à M en $p\in M$, on a la décomposition de Libermann [2]

$$T_p(M)=S_p(M)\oplus S_p^*(M), \tag{1.1}$$

où S_p et S_p^* sont deux sous-espaces *self-orthogonaux* [6] définis respectivement par h_α et h_{α^*} $(\alpha=1,\ldots,n;\ \alpha^*=\alpha+n)$. Le couple S_p, S_p^* définit un automorphisme involutif $\mathscr{U}$ tel que $\mathscr{U}(h_\alpha)=h_\alpha$, $\mathscr{U}(h_{\alpha^*})=-h_{\alpha^*}$.

La forme de soudure dp de $\mathscr{F}(M)$ est

$$dp=\theta^A\otimes h_A, \tag{1.2}$$

et $\mathscr{F}$ étant normé on a $\langle h_\alpha, h_{\beta^*}\rangle=\delta_{\alpha\beta}$. La métrique g de M a donc la forme *parahermitienne* $g=2\sum_\alpha\theta^\alpha\otimes\theta^{\alpha^*}$ et elle est échangeable avec la forme presque-symplectique $\Omega=\sum_\alpha\theta^\alpha\wedge\theta^{\alpha^*}$. Si θ_B^A sont les formes de connexion associées à $\mathscr{F}(M)$ et ∇ est l'opérateur de dérivation covariante défini par g, les équations de la connexion et les deux groupes d'équations de structure s'écrivent respectivement

$$\nabla h_A=\theta_A^B\otimes h_B \tag{1.3}$$

$$d\theta^A=\theta^B\wedge\theta_B^A \tag{1.4}$$

$$d\theta_B^A=\theta_B^C\wedge\theta_C^A+\Theta_B^A, \tag{1.5}$$

où Θ_B^A sont les 2-formes de courbure. A l'aide de (1.3) la normalisation de $\mathscr{F}$ donne

$$\theta_\beta^\alpha+\theta_{\alpha^*}^{\beta^*}=0,\qquad \theta_\beta^{\alpha^*}+\theta_\alpha^{\beta^*}=0,\qquad \theta_{\beta^*}^\alpha+\theta_{\alpha^*}^\beta=0. \tag{1.6}$$

2. Définition (R. Rosca [3]). — (*a*) Soit M une variété (pseudo)-riemannienne orientable et soient X_r $(r, s=1,2)$ deux champs vectoriels sur M. On dit que (X_r) est un couple de